УДК 517.977

# ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ЭТАЛОННОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ

**© 2023 В. А. Соболев[1,2]**

[1]*ФИЦ «Информатика и управление» РАН,*
*ул. Вавилова, 44, г. Москва 119333, Россия,*
[2]*Самарский НИУ им. акад. С. П. Королёва,*
*Московское шоссе, 34, г. Самара 443086, Россия*

E-mail: v.sobolev@ssau.ru

Поступила в редакцию 28.02.2023 г.; после доработки 30.03.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Впервые рассматривается задача оптимального слежения с заданной эталонной траекторией и интегральным квадратичным критерием качества при наличии сингулярных возмущений. Для анализа возникающих при решении этой задачи сингулярно возмущённых дифференциальных систем применяется метод декомпозиции, в основе которого лежит техника интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Построено субоптимальное управление, применение которого приводит к отличию значений минимизируемого функционала для отптимального и субоптимального управлений на величину порядка второй степени малого параметра, характеризующего сингулярные возмущения.

**Ключевые слова:** задача слежения, сингулярные возмущения, интегральные многообразия, декомпозиция.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.309

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального слежения относятся к числу традиционных задач как теории, так и практики автоматического управления [1, 2]. Такие задачи возникают при управлении маневрированием движущихся объектов, при управлении сменой режимов технологических процессов, при прецизионном слежении антенной радиолокатора за летательными аппаратами (см., например, [3]). Наличие переменных состояния, изменяющихся с разными скоростями, приводит к необходимости рассмотрения динамических моделей с сингулярными возмущениями. Исследованию различных задач управления с сингулярными возмущениями посвящено значительное число публикаций (см. обзоры [4–6]). При этом в большинстве работ (см., например, [4, 5]) применяется метод пограничных функций Васильевой, это относится и к последним публикациям в этой области (см. обзор [7] и оригинальные статьи [8, 9]). Наряду с методом пограничных функций для исследования таких задач успешно применяются метод усреднения, аппроксимация Паде [10], метод интегральных многообразий [11–14] и метод декомпозиции [14, 15]. При этом автору известна только одна публикация, посвящённая анализу сингулярно возмущённой задачи слежения (не оптимального) [16], в которой рассматривается очень узкий специальный класс таких задач, а исследование основывается на применении метода декомпозиции [14], который авторы называют методом Соболева.

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\varepsilon\dot{x} = Ax + Bu. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00202).

Здесь $A = A(t,\varepsilon)$, $B = B(t,\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^{n+m}$, $u \in \mathbb{R}^r$, $t \in [0,t_f]$, $\varepsilon$ — положительный малый параметр. Эталонное движение задаётся в явном виде $\eta = \eta(t)$.

Функционал качества имеет вид

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_f} [e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)]\,dt,$$

где $e(t) = x(t) - \eta(t)$, $Q = Q(t) = Q^T(t) \geqslant 0$, $R = R(t) = R^T(t) > 0$. Пусть матричные и векторные функции, входящие в (1) и функционал качества, могут быть записаны в блочной форме следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon A_1 & \varepsilon A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \varepsilon B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

где $A_1$, $Q_1$ — $(m \times m)$-матрицы, $A_2$, $Q_2$ — $(m \times n)$-матрицы, $A_3$ — $(n \times m)$-матрица, $A_4$, $Q_3$ — $(n \times n)$-матрицы, $B_1$ — $(m \times r)$-матрица, $B_2$ — $(n \times r)$-матрица, а $R$ — $(r \times r)$-матрица; $x_1$, $x_2$ и $\eta_1$, $\eta_2$ — векторы размерностей $m$, $n$ соответственно. Предполагается, что все матричные блоки зависят только от $t$ и векторы $\eta_1$, $\eta_2$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0,t_f]$.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для линейной нестационарной системы (1) рассматривается задача нахождения управляющего воздействия $u$, которое минимизирует функционал качества $J$. Известно (см., например, [2, 17]), что решение рассматриваемой задачи при точных измерениях координат вектора $x$ и отсутствии ограничений на управление даётся следующим выражением для оптимального управления:

$$u_{\mathrm{opt}} = -\varepsilon^{-1}R^{-1}B^T(Px - \zeta),$$

здесь $P$ — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} + \varepsilon^{-1}PA + \varepsilon^{-1}A^TP - \varepsilon^{-2}PBR^{-1}B^TP + Q = 0, \quad P(t_f) = 0, \tag{2}$$

а $\zeta$ — решение линейной дифференциальной системы

$$\dot{\zeta} = -\varepsilon^{-1}(A - SP)^T\zeta - Q\eta = 0, \quad \zeta(t_f) = 0. \tag{3}$$

Представим $P$ и $\zeta$ в следующем виде:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & \varepsilon P_3 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \varepsilon\zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для матриц $P_1$, $P_2$, $P_3$ получается нелинейная система матричных уравнений вида

$$\dot{P}_1 = F_1(P_1, P_2, t, \varepsilon),$$
$$\varepsilon\dot{P}_2 = F_2(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon),$$
$$\varepsilon\dot{P}_3 = F_3(P_2, P_3, t, \varepsilon),$$

где

$$S_1 = B_1R^{-1}B_1^T, \quad S_2 = B_1R^{-1}B_2^T, \quad S_3 = B_2R^{-1}B_2^T,$$

$$F_1 = -P_1A_1 - A_1^TP_1 - P_2A_3 - A_3^TP_2^T + P_1S_1P_1 + P_1S_2P_2^T + P_2S_2^TP_1 + P_2S_3P_2^T - Q_1,$$

$$F_2 = -P_1A_2 - P_2A_4 - \varepsilon A_1^TP_2 - A_3^TP_3 + P_1S_2P_3 + P_2S_3P_3 + \varepsilon\big(P_1S_1P_2 + P_2S_2^TP_2\big) - Q_2,$$

$$F_3 = -P_3A_4 - A_4^TP_3 + P_3S_3P_3 + \varepsilon\big(-P_2^TA_2 - A_2^TP_2 + \varepsilon P_2^TS_1P_2 + P_2^TS_2P_3 + P_3S_2^TP_2\big) - Q_3$$

с граничными условиями $P_1(t_f) = 0$, $P_2(t_f) = 0$, $P_3(t_f) = 0$.

Для анализа этой сингулярно возмущённой системы матричных дифференциальных уравнений применяется метод декомпозиции, в основе которого лежит техника интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Этот метод позволяет редуцировать данную систему к одному матричному дифференциальному уравнению для блока, соответствующего блоку медленных переменных $P_1$ в уравнении Риккати.

Векторы $\zeta_1$ и $\zeta_2$ удовлетворяют линейной дифференциальной системе

$$\dot{\zeta}_1 = -(A_1 - S_1P_1)^T\zeta_1 - \big(A_3 - S_2^TP_1 - S_3P_2^T\big)^T\zeta_2 - Q_1\eta_1 - Q_2\eta_2, \tag{4}$$

$$\varepsilon\dot{\zeta}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1P_2 - S_2P_3)^T\zeta_1 - \big(A_4 - \varepsilon S_2^TP_2 - S_3P_3\big)^T\zeta_2 - Q_2^T\eta_1 - Q_3\eta_2 \tag{5}$$

с граничными условиями $\zeta_1(t_f) = 0$, $\zeta_2(t_f) = 0$.

## 2. АНАЛИЗ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Уравнения системы матричных дифференциальных уравнений Риккати не зависят от $\zeta$, поэтому можно анализ начать с этой системы, следуя [14, 15]. Эта система имеет медленное интегральное многообразие, которое может быть найдено в виде разложений по степеням малого параметра [14, 15, 18] в виде

$$P_2 = L(P_1,t) + \varepsilon L_1(P_1,t) + \varepsilon^2 \ldots,$$
$$P_3 = H(P_1,t) + \varepsilon H_1(P_1,t) + \varepsilon^2 \ldots.$$

Положив $\varepsilon = 0$, получим следующие соотношения для определения матричных функций $L(P_1,t)$ и $H(P_1,t)$:

$$0 = -P_1A_2 - LA_4 - A_3^TH + P_1S_2H + LS_3H - Q_2,$$
$$0 = H^TS_3H - HA_4 - A_4^TH - Q_3.$$

Второе уравнение представляет собой матричное уравнение Лурье (в англоязычной литературе применяется термин алгебраическое матричное уравнение Риккати), решение которого $H = M(t)$ представляет собой положительно определённую матрицу, если тройка матриц $(\overline{Q}_3, A_4, B_2)$ стабилизируема и полностью наблюдаема при всех $t \in [0,1]$, где $\overline{Q}_3^T\overline{Q}_3 = Q_3$ (см., например, [13]). Напомним, что в этом случае матрица $D = A_4 - S_3M$ является гурвицевой при всех $t \in [0,t_f]$. Теперь можно подставить $H = M(t)$ в первое уравнение и найти

$$L = -\big(P_1A_2 + A_3^TM + Q_2 - P_1S_2M\big)D^{-1}.$$

Матричные функции $L_1$ и $H_1$ определяются из уравнений инвариантности, которые в рассматриваемом случае с учётом равенства

$$\dot{P}_1 = \overline{F}_1 = F_1(P_1, L(P_1,t) + \varepsilon L_1(P_1,t) + \varepsilon^2, \ldots, t, \varepsilon)$$

принимают вид

$$\varepsilon\Big[\frac{\partial}{\partial t}(L(P_1,t) + \varepsilon L_1(P_1,t) + \varepsilon^2, \ldots) + \frac{\partial}{\partial P_1}(L(P_1,t) + \varepsilon L_1(P_1,t) + \varepsilon^2, \ldots)\overline{F}_1\Big]$$
$$= F_2(P_1, L + \varepsilon L_1(P_1,t) + \varepsilon^2, \ldots, H + H_1 + \varepsilon^2, \ldots, t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}(H(P_1,t)+\varepsilon H_1(P_1,t)+\varepsilon^2\dots)+\frac{\partial}{\partial P_1}(H(P_1,t)+\varepsilon H_1(P_1,t)+\varepsilon^2,\dots)\overline{F}_1\right]$$
$$=F_3(L+\varepsilon L_1(P_1,t)+\varepsilon^2,\dots,H(P_1,t)+\varepsilon H_1+\varepsilon^2,\dots,t,\varepsilon).$$

Приравнивая коэффициенты при первой степени малого параметра, получаем линейные относительно неизвестных матричных функций $L_1$ и $H_1$ соотношения

$$\overline{F}_1(P_1,L,t,0)(-A_2+S_2M)D^{-1}+\frac{\partial L}{\partial t}=-L_1A_4-A_1^TL$$
$$-A_3^TH_1+P_1S_1L+P_1S_2H_1+LS_2^TL+LS_3H_1+L_1S_3M,$$

$$\dot{M}=-L^TA_2-A_2^TL-A_4^TH_1+L^TS_2M+MS_2^TL+H_1S_3M+MS_3H_1,$$

из второго соотношения находим сначала $H_1$, подставляем найденное выражение в первое уравнение и находим $L_1$. При необходимости аналогичным образом из соответствующих линейных уравнений находятся $L_2$, $H_2$, $\dots$ .

Движение по медленному интегральному многообразию описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{P}_1=-P_1(A_1-S_2L^T)-\left(A_1^T-LS_2^T\right)P_1-LA_3-A_3^TL^T+P_1S_1P_1-Q_1$$
$$+\varepsilon\left(P_1S_2L_1^T+L_1S_2^TP_1-L_1A_3-A_3^TL_1^T+L_1S_2^T+LS_3L_1^T\right)+\varepsilon^2\dots \quad (6)$$

Заметим, что при $\varepsilon=0$ это уравнение является матричным дифференциальным уравнением Риккати

$$\dot{P}_1=-P_1\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_1^TP_1+P_1S_1P_1-\left(Q_1-\widetilde{Q}_1-\widetilde{Q}_1^T\right),$$

где

$$\widetilde{A}_1=A_1-S_2L^T,\quad \widetilde{Q}_1=Q_1+LA_3+A_3^TL^T.$$

Чтобы исключить медленную матричную переменную $P_1$ из быстрой подсистемы, вводятся новые переменные $Z_2$ и $Z_3$ по формулам

$$P_2=Z_2+L+\varepsilon L_1+\varepsilon^2\dots,\quad P_3=Z_3+M+\varepsilon H_1+\varepsilon^2\dots.$$

В этом представлении функции $Z_2$ и $Z_3$ играют роль функций правого пограничного слоя, а $L+\varepsilon L_1\dots$ и $M+\varepsilon H_1\dots$ соответствуют регулярным членам асимптотики представления решений [4]. Если ограничиться рассмотрением регулярной составляющей решений до порядка $O(\varepsilon)$ и правых пограничных функций $Z_2$, $Z_3$ до порядка $O(1)$ включительно, то $Z_2$ из уравнения для $P_1$ удалять не нужно. В противном случае можно использовать технику быстрых интегральных многообразий для удаления переменной $Z_2$ с требуемой степенью точности [14, 15].

## 3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Вернёмся к рассмотрению системы дифференциальных уравнений для $\zeta_1$ и $\zeta_2$. После анализа решений матричного дифференциального уравнения Риккати коэффициенты этой системы можно считать известными. Более того, как отмечалось выше, в рассматриваемых предположениях матрица $D$ является гурвицевой, и может сложиться впечатление, что для анализа системы (4), (5) можно применить известную методику блочной диагонализации (см., например, [13, 14]) соответствующей однородной системы. Однако при этом могут возникнуть два препятствия, мешающие осуществить процедуру блочной диагонализации. Оба связаны с тем, что матрица $P_3$ представляет собой сумму матрицы $M(t)$, главной части матрицы $Z_3$ и слагаемых, содержащих малый параметр в качестве множителя. Аргументом матрицы $Z_3$ является

$(t - t_f)/\varepsilon$, что влечёт за собой проблемы, связанные с дифференцированием $Z_3$ по $t$. Сказанное в равной степени относится и к матрице $Z_2$. Второе препятствие связано с тем, что матрица $M + Z_3$ вырождается при $t = t_f$. Если матрица $A_4$ тоже вырожденная в этой точке, то матрица $D$ не будет иметь обратной при $t = t_f$ и процедура блочной диагонализации станет нереализуемой. Можно предложить несколько способов преодоления этих препятствий. Первый из них — прямое применение метода пограничных функций Тихонова — Васильевой для получения приближений решений. Учитывая то обстоятельство, что рассматриваемая дифференциальная система является линейной, такой подход представляется вполне естественным и может быть эффективно реализован. В основе второго подхода лежит идея модификации метода блочной диагонализации. Суть модификации состоит в следующем. Система (4), (5) представляется в следующем виде:

$$\dot{\zeta}_1 = -(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T\zeta_1 - (A_3 - S_2^T\,\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T)^T\zeta_2 + f_1, \tag{7}$$

$$\varepsilon\dot{\zeta}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1\overline{P}_2 - S_2\overline{P}_3)^T\zeta_1 - (A_4 - \varepsilon S_2^T\,\overline{P}_2 - S_3\overline{P}_3)^T\zeta_2 + f_2. \tag{8}$$

Здесь $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ — регулярные компоненты матричных блоков, которые соответствуют решению, принадлежащему интегральному многообразию медленных движений, т. е. $\overline{P}_1$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (6):

$$P_2 = L + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 \ldots, \quad P_3 = M + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 \ldots,$$

а функции $f_1$, $f_2$ задаются равенствами

$$f_1 = \varepsilon Z_1 S_1\zeta_1 + (\varepsilon Z_1 S_2 + Z_2 S_3)\zeta_2 - Q_1\eta_1 - Q_2\eta_2,$$
$$f_2 = \big(\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3 S_2^T\big)\zeta_1 + \big(\varepsilon Z_2^T S_2 + Z_3 S_3\big)\zeta_2 - Q_2^T\eta_1 - Q_3\eta_2,$$

в которых учтено, что матричный блок $P_1$ представим в виде суммы $\overline{P}_1$ и функции типа правого пограничного слоя $\varepsilon Z_1$, и рассматриваются как неоднородные члены линейной системы. К соответствующей однородной системе

$$\dot{\zeta}_1 = -(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T\zeta_1 - \big(A_3 - S_2^T\,\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T\zeta_2,$$
$$\varepsilon\dot{\zeta}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1\overline{P}_2 - S_2\overline{P}_3)^T\zeta_1 - \big(A_4 - \varepsilon S_2^T\,\overline{P}_2 - S_3\overline{P}_3\big)^T\zeta_2$$

применим известный метод приведения к блочно-диагональной форме. Детальное изложение можно найти, например, в [13, 15]. С этой целью сначала вводится новая быстрая переменная $y_2 = \zeta_2 - L\zeta_1$. Используемая этой формуле матричная функция $L = L(t,\varepsilon)$ удовлетворяет несимметричному матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\varepsilon\dot{L} + \varepsilon L[-(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T - \big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T L]$$
$$= -(A_2 - \varepsilon S_1\overline{P}_2 - S_2\overline{P}_3)^T - \big[\big(A_4 - \varepsilon S_2^T\overline{P}_2 - S_3\overline{P}_3\big)^T\big]L,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра

$$L = L_0(t) + \varepsilon L_1(t) + \varepsilon^2 \ldots,$$

где

$$L_0(t) = -[D^T(t)]^{-1}(A_2 - S_2M)^T,$$

$$L_1(t) = -[D^T(t)]^{-1}\big[\dot{L}_0 + L_0\big(-(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T - \big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\bar{L}^T\big)^T L_0\big)$$
$$- L^T S_1 - H_1 S_2^T - \big(S_2^T L + S_3 H_1\big)^T L_0\big].$$

Для переменных $\zeta_1$, $y_2$ получаем систему

$$\dot{\zeta}_1 = [-(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T - \big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T L]\zeta_1 - (A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T)^T y_2, \tag{9}$$

$$\varepsilon\dot{y}_2 = -\big[\big(A_4 - \varepsilon S_2^T\overline{P}_2 - S_3\overline{P}_3\big)^T + \varepsilon L\big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T\big]y_2. \tag{10}$$

На следующем шаге вводится новая медленная переменная $y_1 = \zeta_1 - \varepsilon H y_2$. При этом матричная функция $H = H(t,\varepsilon)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\varepsilon\dot{H} + H\big[\big(A_4 - \varepsilon S_2^T\overline{P}_2 - S_3\overline{P}_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T\big] = -\big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра

$$H = H_0(t) + \varepsilon H_1(t) + \varepsilon^2 \ldots,$$

где

$$H_0(t) = -\big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T[D^T(t)]^{-1}.$$

В результате получаются две независимые подсистемы

$$\dot{y}_1 = \big[-(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T - \big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T L\big]y_1,$$

$$\varepsilon\dot{y}_2 = -\big[\big(A_4 - \varepsilon S_2^T\overline{P}_2 - S_3\overline{P}_3\big)^T + \varepsilon L\big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T\big]y_2.$$

Если применить преобразование $y_2 = \zeta_2 - L\zeta_1$, $y_1 = \zeta_1 - \varepsilon H y_2$ к неоднородной системе (7), (8), то получится дифференциальная система вида

$$\dot{y}_1 = \big[-(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T - \big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T L\big]y_1 + \tilde{f}_1, \tag{11}$$

$$\varepsilon\dot{y}_2 = -\big[(A_4 - \varepsilon S_2^T\overline{P}_2 - S_3\overline{P}_3)^T + \varepsilon L\big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T\big]y_2 + \tilde{f}_2, \tag{12}$$

где

$$\tilde{f}_1 = (I + \varepsilon HL)f_1 - Hf_2, \quad \tilde{f}_2 = f_2 - \varepsilon L f_1.$$

Здесь $I$ — единичная матрица.

Поскольку правые части уравнений (11), (12) разнотипны, имеет смысл представить переменные $y_1$, $y_2$ в виде сумм переменных $v_1$, $v_2$ и $z_1$, $z_2$, т. е. $y_1 = v_1 + z_1$, $y_2 = v_2 + z_2$. Для этих переменных получаются уравнения

$$\dot{v}_1 = \big[-(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T - \big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T L\big]v_1 + g_{11}, \tag{13}$$

$$\varepsilon\dot{v}_2 = -\big[\big(A_4 - \varepsilon S_2^T\overline{P}_2 - S_3\overline{P}_3\big)^T + \varepsilon L\big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T\big]v_2 + g_{12}, \tag{14}$$

$$\dot{z}_1 = \big[-(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T - \big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T L\big]z_1 + g_{21}, \tag{15}$$

$$\varepsilon\dot{z}_2 = -\big[(A_4 - \varepsilon S_2^T\overline{P}_2 - S_3\overline{P}_3)^T + \varepsilon L\big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3\overline{P}_2^T\big)^T\big]z_2 + g_{22}. \tag{16}$$

Здесь

$$g_{11} = \big[HQ_2^T - (I + \varepsilon HL)Q_1\big]\eta_1 + [HQ_3 - (I + \varepsilon HL)Q_2]\eta_2,$$

$$g_{12} = \big(\varepsilon LQ_1 - Q_2^T\big)\eta_1 + (\varepsilon LQ_2 - Q_3)\eta_2,$$

$$g_{21} = [\varepsilon Z_1S_1 + (\varepsilon Z_1S_2 + Z_2S_3)L](v_1 + z_1) + [\varepsilon^2 Z_1S_1H + (\varepsilon Z_1S_2 + Z_2S_3)(I + \varepsilon LH)](v_2 + z_2),$$

$$g_{22} = \big[\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3Z_2^T + \big(\varepsilon Z_2^T S_2 + Z_3Z_3\big)\big](v_1 + z_1) + \big[\varepsilon\big(\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3S_2^T\big)H + (\varepsilon Z_2S_2 + Z_3S_3)(I + \varepsilon HL)\big](v_2 + z_2).$$

Вектор $v_1$ может быть найден с любой степенью точности как решение независимого линейного дифференциального уравнения (13). Ещё проще ситуация с вектором $v_2$, который может быть найден из независимого линейного дифференциального уравнения (14) при помощи только алгебраических операций. После того, как найдены $v_1$ и $v_2$, линейные уравнения (15), (16) можно рассматривать как независимые и находить векторы $z_1$ и $z_2$ с любой степенью точности.

Таким образом, применение техники интегральных многообразий позволило осуществить декомпозицию задачи построения оптимального управления (2), (3) на несколько независимых подзадач, каждая из которых может быть решена с любой степенью точности по отношению к степеням малого параметра.

## 4. ПОСТРОЕНИЕ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

При построении субоптимального управления ограничимся вычислением регулярной составляющей решений до порядка $O(\varepsilon)$ и главных членов правых пограничных функций $Z_2$, $Z_3$ ($Z_1$ имеет множителем малый параметр).

Из уравнений (13) и (14) переменные $v_1$ и $v_2$ могут быть найдены с любой степенью точности в виде асимптотических разложений без особых затруднений в силу линейности уравнений. В уравнении (13) достаточно учитывать члены нулевого и первого порядков по малому параметру. Тогда это уравнение принимает вид

$$\dot{v}_1 = \big[-(A_1 - S_1\overline{P}_1)^T - \big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3(L+\varepsilon L_1)^T\big)^T L\big]v_1 + g_{11},$$

Из уравнения (14), которое можно представить в виде

$$\varepsilon\dot{v}_2 = -\big[\big(D - \varepsilon S_2^T L - S_3\varepsilon H\big)^T + \varepsilon L\big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3L^T\big)^T\big]v_2 + g_{12},$$

последовательно находим

$$v_2 = L_0 + \varepsilon L_1, \quad L_0 = -D^{-1}(Q_2^T\eta_1 + Q_3\eta_2),$$
$$L_1 = D^{-1}\big[L_0(Q_1\eta_1 + Q_2\eta_2)\big] + D^{-1}\big[\dot{L} + \big(S_2^T L + S_3H\big) - L_0\big(\big(A_3 - S_2^T\overline{P}_1 - S_3L^T\big)^T\big)\big]L.$$

Для вектора $z_2$ приходим к уравнению

$$\varepsilon\dot{z}_2 = -Dz_2 + \big(Z_3Z_2^T + Z_3Z_3\big)v_1, + Z_3S_3(v_2 + z_2),$$

так как в пределах выбранной степени точности вектором $z_1$ можно пренебречь.

Это означает что и функции $\zeta_1$, $\zeta_2$ могут быть найдены с любой степенью точности на основании формул

$$\zeta_1 = y_1 + \varepsilon Hy_2, \quad \zeta_2 = Ly_1 + (I + \varepsilon LH)y_2.$$

Учитывая введённые выше ограничения на точность вычислений, можно сделать вывод о том, что при вычислении переменной $y_1$ правыми пограничными функциями можно пренебречь, а для вычисления $\zeta_1$, $\zeta_2$ можно использовать следующие формулы:

$$\zeta_1 = y_1 + \varepsilon H_0y_2, \quad \zeta_2 = (L_0 + \varepsilon L_1)y_1 + (I + \varepsilon L_0H_0)y_2.$$

Для главного члена $y_2$ имеем задачу

$$\varepsilon\dot{y}_2 = -D(t)y_2 + Z_3S_3y_2,$$

где $Z_3$ является решением задачи

$$\varepsilon\dot{Z}_3 = -Z_3D - D^TZ_3 + Z_3S_3Z_3, \quad Z_3(t_f) = -M(t_f).$$

Заметим, что решение этого матричного уравнения сводится к построению фундаментальной матрицы для линейной однородной системы с матрицей $\varepsilon^{-1}D^T$ [15].

Формула для субоптимального управления может быть представлена следующим образом:

$$u_{\text{subopt}} = -R^{-1}\big[\big(B_1^T P_1 + B_2^T P_2^T\big)x_1 + \big(\varepsilon B_1^T P_2 + B_2^T P_3\big)x_2 - B_1^T\zeta_1 - B_2^T\zeta_2\big]. \tag{17}$$

Здесь $P_1$ — решение матричного дифференциального уравнения (6) при $\varepsilon = 0$, $P_2 = L+\varepsilon L_1+Z_2$, где $Z_2$ является решением задачи

$$\varepsilon \dot Z_2 = Z_2S_3H + Z_2S_3Z_3 + P_1S_2Z_3 - A_3^TZ_3 - LS_3Z_3, \quad Z_2(t_f) = -L(t_f),$$

а при вычислении $P_1$ достаточно ограничиться приближением нулевого порядка.

Пусть величина $J_{\text{opt}}$ соответствует оптимальному значению функционала качества, а значение $J_{\text{subopt}}$ получается при использовании субоптимального управления (17). Тогда полученные результаты позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Теорема.** *Существуют такие положительные числа $C$ и $\varepsilon_0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедлива оценка $J_{\text{subopt}} - J_{\text{opt}} \leqslant C\varepsilon^2$.*

**Доказательство.** Доказательство проводится по стандартной схеме (см., например, [19, 20]) и основывается на том очевидном факте, что интеграл от пограничной функции представляет собой величину порядка $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. □

**Пример.** Рассмотрим управляемую систему вида

$$\varepsilon \ddot x = u, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функционал качества имеет вид

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2(t) + (1+\varepsilon^2)\dot x^2(t) + u^2(t)]\,dt.$$

В рассматриваемом случае имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \varepsilon^{-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = (1).$$

Формула для субоптимального управления принимает вид

$$u_{\text{subopt}} = -[p_2x + p_3\dot x - \zeta_2].$$

Матричное дифференциальное уравнение Риккати для элементов матрицы

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \varepsilon p_2 \\ \varepsilon p_2 & \varepsilon p_3 \end{pmatrix}$$

может быть записано в виде системы трёх скалярных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot p_1 &= p_2^2 - 1, \\ \varepsilon \dot p_2 &= p_2p_3 - p_1, \\ \varepsilon \dot p_3 &= p_3^2 - 2\varepsilon p_2 - 1 - \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Эта система имеет точное инвариантное многообразие $p_2 = p_1-\varepsilon, \quad p_3 = \varepsilon p_1+1-\varepsilon^2$, т. е. $L = P_1$, $L_1 = -1$, $H = 1$, $H_1 = P_1$, движение на котором описывается скалярным дифференциальным уравнением Риккати $\dot p_1 = p_1^2 - 2\varepsilon p_1 - (1+\varepsilon^2)$.

Преобразование $p_2 = p_1 - \varepsilon + Z_2, \quad p_3 = 1 + \varepsilon p_1 - \varepsilon^2 + Z_3$ приводит эту систему к виду

$$\dot{p_1} = (p_1 - \varepsilon + Z_2)^2 - 1,$$
$$\varepsilon \dot{Z}_2 = Z_2 Z_3 + Z_2(1 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 - \varepsilon 2 p_1) + Z_3(p_1 - \varepsilon),$$
$$\varepsilon \dot{Z}_2 = Z_3^2 + 2Z_3(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon p_1) - 2\varepsilon Z_2.$$

Ограничимся рассмотрением регулярных компонентов [4] решений до порядка $O(\varepsilon)$ и правых пограничных функций $Z_2$, $Z_3$ до порядка $O(1)$ включительно. Заметим, что $Z_2(1) = O(\varepsilon)$; это позволяет не принимать во внимание значения $Z_2$ и перейти к рассмотрению следующих двух уравнений:

$$\dot{p_1} = (p_1 - \varepsilon)^2 - 1, \quad \varepsilon \dot{Z}_3 = Z_3^2 + 2Z_3$$

с граничными условиями

$$p_1(1) = 0, \quad Z_3(1) = -1.$$

Это уравнения с разделяющимися переменными, поэтому их интегрирование представляет собой простое упражнение. Для $p_1$, $Z_3$ имеем

$$p_1(t, \varepsilon) = \varepsilon + \frac{1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon)\exp(2(t-1))}{1 - \varepsilon + (1 + \varepsilon)\exp(2(t-1))}, \quad p_1(t, 0) = \frac{1 - \exp(2(t-1))}{1 + \exp(2(t-1))},$$
$$Z_3 = -\frac{2\exp(2(t-1)/\varepsilon)}{1 + \exp(2(t-1)/\varepsilon)}.$$

Следовательно, имеем $p_2 = p_1(t, \varepsilon) - \varepsilon$, $P_3 = 1 + \varepsilon p_1(t, 0) + Z_3$. Отметим равенства $D = -1$, $L = 1 + O(\varepsilon^2)$, $H = p_1 + O(\varepsilon^2)$. Переход к переменным $y_1$, $y_2$ совершается по формулам $\zeta_1 = y_1 + \varepsilon P_1 y_2$, $\zeta_2 = y_1 + y_2$.

Уравнение для $v_1$, $v_2$ принимает в рассматриваемом случае вид

$$\dot{v}_1 = p_1 v_1 - (1 + p_1(t, 0))\eta_1 + p_1(t, 0)\eta_2.$$

Это скалярное линейное дифференциальное уравнение, решение которого представимо в виде

$$v_1(t, \varepsilon) = -\int_t^1 V_1(t, s, \varepsilon)[-(1 + P_1(s, 0))\eta_1(s) + P_1(s, 0)\eta_2(s)]\, ds.$$

Здесь

$$V_1(t, s, \varepsilon) = \exp\left(\int_s^t p_1(\tau, \varepsilon)\, d\tau\right) = \varphi(t, \varepsilon)/\varphi(s, \varepsilon),$$

где

$$\varphi(t, \varepsilon) = \frac{\exp(t-1)}{1 - \varepsilon + (1 + \varepsilon)\exp(2(t-1))}.$$

Из уравнения (14), которое можно представить в виде

$$\varepsilon \dot{v}_2 = [1 + \varepsilon(1 + p_1(t, 0))]v_2 + \varepsilon\eta_1 - \eta_2,$$

последовательно находим

$$v_2 = \phi_0 + \varepsilon\phi_1, \quad \phi_0 = \eta_2,$$
$$\phi_1 = \dot{\eta}_2 - (1 + p_1(t, 0))\eta_2 - \eta_1.$$

Для вектора $z_2$ приходим к уравнению

$$\varepsilon\dot{z}_2 = z_2 + Z_3^2 v_1 + Z_3(v_2 + z_2) = (1 + Z_3)z_2 + Z_3^2 v_1 + Z_3 v_2,$$

так как в пределах выбранной степени точности вектором $z_1$ можно пренебречь. Решение этого уравнения может быть представлено в форме

$$V_2(t,1,\varepsilon)(-\eta(1)) - \varepsilon^{-1}\int_t^1 V_2(t,s,\varepsilon)[Z_3^2(s,\varepsilon)v_1(s,0) + Z_3(s,\varepsilon)\eta_2(s)]\,ds.$$

Здесь

$$V_2(t,s,\varepsilon) = \exp\left(\int_s^t \mathrm{th}(2(t-1)/\varepsilon)\,d(\tau/\varepsilon)\right) = \frac{\mathrm{ch}((t-1)/\varepsilon)}{\mathrm{ch}((s-1)/\varepsilon)}.$$

Разумеется, можно применить асимптотический метод Тихонова — Васильевой и упростить выражение под знаком интеграла, что позволит вычислить его в аналитическом виде.

В результате для функции $\zeta_2$ получено следующее приближённое выражение:

$$\zeta_2 = y_1 + y_2 = v_1 + v_2 + z_2,$$

для каждого из слагаемых в котором получена соответствующая формула, содержащая функции, задающие эталонную траекторию. Таким образом, все необходимые для построения субоптимального управления компоненты найдены. Следует отметить, что решение исходной пятимерной системы дифференциальных уравнений в итоге свелось к решению четырёх независимых скалярных уравнений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для исследования сингулярно возмущённых задач оптимального слежения с заданной эталонной траекторией применяется метод декомпозиции, основанный на геометрическом подходе к анализу дифференциальных систем с быстрыми и медленными переменными. Показано, что применение метода декомпозиции позволяет существенно понизить размерность систем матричных дифференциальных уравнений, возникающих при решении задач оптимального слежения и тем самым упрощает анализ этих задач. Следует заметить, что при наличии случайных возмущений типа гауссовского белого шума в случае точных измерений вектора состояния закон оптимального управления сохраняет свой вид.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Егупов Н.Д., Пупков К.А.* Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 4. Теория оптимизации систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004.
2. *Sontag E.* Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems. N. Y.: Springer-Verl., 1998.
3. *Смагин В.И., Параев Ю.И.* Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1996.
4. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–78.
5. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

6. *Naidu D.S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview // Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2002. V. 9, N 2. P. 233–278.
7. *Курина Г.А., Калашникова М.А.* Сингулярно возмущённые задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автоматика и телемеханика. 2022. № 11, С. 3–61.
8. *Kurina G, Kalashnikova M.* Justification of direct scheme for asymptotic solving three-tempo linear-quadratic control problems under weak nonlinear perturbations // Axioms. 2022. V. 11, N 11. Article 647; https://doi.org/10.3390/axioms11110647
9. *Drăgan V.* On the linear quadratic optimal control for systems described by singularly perturbed Itô differential equations with two fast time scales // Axioms. 2019. V. 8, N 1. Article 30; https://doi.org/10.3390/axioms8010030
10. *Danik Y., Dmitriev M.* Padé Approximations and the SDRE technique in the design of parametric families of feedback laws // Internat. Russian Automation Conference (RusAutoCon). Sochi. 2022. P. 587–594; DOI: 10.1109/RusAutoCon54946.2022.9896329
11. *O'Malley R.E., Mortell M.P., Pokrovskii A., Sobolev V.A.* Singular Perturbations and Hysteresis. Philadelphia: SIAM, 2005.
12. *Ghorbel F., Spong M. W.* Integral manifolds of singularly perturbed systems with application to rigid-link flexible-joint multibody systems // Internat. J. Non-Linear Mech. 2000. V. 35. P. 133–155.
13. *Kokotović P.V., Khalil H.K., O'Reily J.* Singular Perturbations Methods in Control. Analysis and Design. N. Y.: Acad. Press, 1986.
14. *Sobolev V.A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system // Syst. Control Lett. 1984. N 5. P. 169–179.
15. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущённых систем. М.: Физматлит, 2009.
16. *Prasov A., Khalil H.K.* Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise // Internat. J. Adapt. Control Signal Proc. 2016. V. 30, N 8–10. P. 1228–1243.
17. *Sobolev V.* Dimensional reduction of optimal tracking problems with a given reference trajectory // 16th Internat. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). Moscow. 2022. P. 1–3; DOI: 10.1109/STAB54858.2022.9807563
18. *Кононенко Л.И., Соболев В.А.* Асимптотические разложения медленных интегральных многообразий // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1264–1278.
19. *O'Malley R. E. Jr.* On two methods of solution for a singularly perturbed linear state regulator problem // SIAM Rev. 1975. V. 17, N 1. P. 16–37.
20. *Drăgan V., Halanay A.* Suboptimal linear controller by singular perturbation techniques // Rev. Roumaine Sci. Techn. Ser. Electrotechn. Engrg. 1975. V. 21, N 4. P. 585–591.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.977

# DECOMPOSITION OF SINGULARLY PERTURBED OPTIMAL TRACKING PROBLEMS WITH A GIVEN REFERENCE TRAJECTORY



**V. A. Sobolev**[1, 2]

[1] *Federal Research Center «Informatics and Management» RAS, Vavilova 44, Moscow 119333, Russia,*
[2] *Samara Scientific Research University named after Academician S. P. Koroleva, Moskovskoe shosse 34, Samara 443086, Russia*

E-mail: v.sobolev@ssau.ru

Received 28.02.2023, revised 30.03.2023, accepted 27.04.2023

**Abstract.** For the first time, the problem of optimal tracking with a given reference trajectory and an integral quadratic performance criterion in the presence of singular perturbations is considered. To analyze the singularly perturbed differential systems that arise in solving this problem, the decomposition method is used, which is based on the technique of integral manifolds of fast and slow motions. A suboptimal control is constructed, the use of which leads to a difference in the values of the minimized functional for the optimal and suboptimal controls by an amount of the order of the second power of a small parameter characterizing singular perturbations.

**Keywords:** tracking problem, singular perturbations, integral manifolds, decomposition.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.309

## REFERENCES

1. Egupov N.D., Pupkov K.A. Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija. T. 4. Teorija optimizacii sistem avtomaticheskogo upravlenija [Methods of classical and modern theory of automatic control. Vol. 4. Theory of optimization of automatic control systems]. Moscow: Bauman Moscow State Tech. Univ. Press, 2004 (in Russian).
2. Sontag E. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems. N. Y.: Springer-Verl., 1998.
3. Smagin V.I., Paraev Ju.I. Sintez sledjashhih sistem upravlenija po kvadratichnym kriterijam [Synthesis of tracking control systems by quadratic criteria]. Tomsk: Tomsk State Univ. Press, 1996.
4. Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G., Singular perturbations in optimal control problems. *J. Math. Sci.*, 1986, Vol. 34, pp. 1579–1629.
5. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Autom. Remote Control*, 2006, Vol. 67, pp. 1–43.
6. Naidu D.S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview. *Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. Algorithms*, 2002, Vol. 9, No. 2, pp. 233–278.
7. Kurina G.A., Kalashnikova M.A. Singulyarno vozmushchennye zadachi s raznotempovymi bystrymi peremennymi [Singularly perturbed problems with different-time fast variables]. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2022, No. 11, pp. 3–61 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 3.

8. Kurina G, Kalashnikova M. Justification of direct scheme for asymptotic solving three-tempo linear-quadratic control problems under weak nonlinear perturbations. *Axioms*, 2022, Vol. 11, No. 11, article 647; https://doi.org/10.3390/axioms11110647
9. Drăgan V. On the linear quadratic optimal control for systems described by singularly perturbed Itô differential equations with two fast time scales. *Axioms*, 2019, Vol. 8, No. 1, article 30; https://doi.org/10.3390/axioms8010030
10. Danik Y., Dmitriev M. Padé Approximations and the SDRE technique in the design of parametric families of feedback laws. *Internat. Russian Automation Conference (RusAutoCon)*. Sochi, 2022, pp. 587–594; DOI: 10.1109/RusAutoCon54946.2022.9896329
11. O'Malley R.E., Mortell M.P., Pokrovskii A., Sobolev V.A. Singular Perturbations and Hysteresis. Philadelphia: SIAM, 2005.
12. Ghorbel F., Spong M. W. Integral manifolds of singularly perturbed systems with application to rigid-link flexible-joint multibody systems. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 2000, Vol. 35, pp. 133–155.
13. Kokotović P.V., Khalil H.K., O'Reily J. Singular Perturbations Methods in Control. Analysis and Design. N. Y.: Acad. Press, 1986.
14. Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system. *Syst. Control Lett.*, 1984, No. 5, pp. 169–179.
15. Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Geometricheskaya dekompozitsiya singulyarno vozmushchennykh sistem [Geometric decomposition of singularly perturbed systems]. Moscow: Fizmatlit, 2009.
16. Prasov A., Khalil H.K. Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise. *Internat. J. Adapt. Control Signal Proc.*, 2016, Vol. 30, No. 8–10, pp. 1228–1243.
17. Sobolev V. Dimensional reduction of optimal tracking problems with a given reference trajectory. *16th Internat. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)*. Moscow, 2022, pp. 1–3; DOI: 10.1109/STAB54858.2022.9807563
18. Kononenko L.I., Sobolev V.A. Asymptotic decomposition of slow integral manifolds. *Sib. Math. J.*, 1994, Vol. 35, No. 6, pp. 1119–1132.
19. O'Malley R. E. Jr. On two methods of solution for a singularly perturbed linear state regulator problem. *SIAM Rev.*, 1975, Vol. 17, No. 1, pp. 16–37.
20. Drăgan V., Halanay A. Suboptimal linear controller by singular perturbation techniques. *Rev. Roumaine Sci. Techn. Ser. Electrotechn. Engrg.*, 1975, Vol. 21, No 4, pp. 585–591.