

УДК 517.958:539.3

О РАВНОВЕСИИ УПРУГИХ ТЕЛ СО СЛАБО ИСКРИВЛЁННОЙ ПЕРЕМЫЧКОЙ

© 2023 А. М. Хлуднев

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: khlud@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 10.04.2023 г.; после доработки 19.04.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Работа посвящена анализу краевой задачи с неизвестной областью контакта, описывающей равновесие двумерных упругих тел с тонкой слабо искривлённой перемычкой. Перемычка отслаивается от упругих тел, образуя тем самым межфазные трещины. На берегах трещин задаются нелинейные краевые условия вида неравенств, исключающие взаимное проникание берегов. Установлена однозначная разрешимость краевой задачи. Проведён анализ предельных переходов по параметру жёсткости тонкой перемычки при стремлении параметра жёсткости к бесконечности и к нулю и исследованы предельные модели.

Ключевые слова: краевая задача, нелинейные краевые условия, упругое тело, тонкая перемычка, трещина.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.312

Задачи о равновесии упругих тел с тонкими включениями различной природы являются предметом анализа большого числа работ. При этом включения могут быть упругими, жёсткими, полужёсткими и т. д. Исследование тонких жёстких включений, расположенных в упругих телах, можно найти в [1–10]; тонкие упругие и полужёсткие включения анализировались в [11–13], где, в частности, можно найти обоснование возможности перехода к пределу по параметру жёсткости тонкого включения, а также дифференцирование функционала энергии по длине отслоения тонких включений. Можно отметить также статьи, касающиеся вопросов усреднения для моделей подобного рода [14, 15]. Имеются и другие работы, примыкающие к данной тематике (см., например, [16, 17]). В случае отслоения тонкого включения от окружающего упругого тела приходится иметь дело с трещиной, на берегах которой следует задавать подходящие краевые условия. С физической точки зрения наиболее правильными являются такие краевые условия, которые обеспечивают взаимное непроникание противоположных берегов трещины [18, 19]. Как правило, такой подход приводит к необходимости исследовать краевые задачи с неизвестными областями контакта.

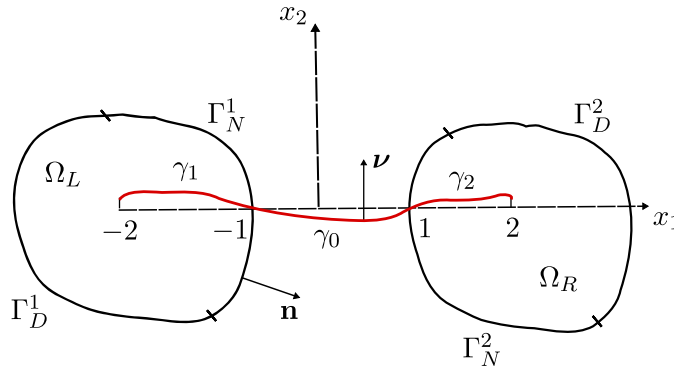
Данная работа посвящена анализу краевой задачи, описывающей равновесие двух упругих тел с тонкой слабо искривлённой перемычкой. Для описания слабо искривлённой перемычки используется модель Кирхгофа — Лява, с которой можно познакомиться по книге [20, с. 27]. Задача о равновесии двумерного упругого тела, содержащего слабо искривлённое включение, впервые исследовалась в [21]. Вопросы сопряжения для слабо искривлённых включений, расположенных в упругом теле, и асимптотические свойства решений представлены в работах [22, 23]. Анализ задач равновесия упругих пластин с тонкой прямолинейной перемычкой выполнен в [24, 25].

Структура работы следующая. Во первом разделе обсуждается постановка задачи и доказывается её разрешимость. Разделы 2, 3 посвящены исследованию предельных переходов при стремлении параметра жёсткости перемычки к бесконечности и к нулю. Для всех рассмат-

риваемых моделей приводятся как вариационные, так и дифференциальные формулировки задач и доказывается их эквивалентность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega_L, \Omega_R \subset \mathbb{R}^2$ — две ограниченные области с липшицевыми границами Γ^1, Γ^2 соответственно, такие что $\overline{\Omega}_L \cap \overline{\Omega}_R = \emptyset$. Предположим, что каждая из границ Γ^1, Γ^2 делится на две гладкие части Γ_N^i и Γ_D^i , $\text{meas } \Gamma_D^i > 0$, $i = 1, 2$. Через s, s_0, s_1, s_2 обозначим соответственно интервалы $(-2, 2), (-1, 1), (-2, -1), (1, 2)$ на оси x_1 . Пусть φ — заданная функция из пространства $H^1(s)$, такая что $\varphi'' \in L^\infty(s)$. Для простоты будем считать, что график γ функции $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_1 \in s$, пересекает границы Γ^1, Γ^2 в точках $(-1, 0), (1, 0)$. Графики функции $x_2 = \varphi(x_1)$ при $x_1 \in s_i$ обозначим соответственно через γ_i , $i = 0, 1, 2$. Считаем также, что угол между γ и Γ^i в точках пересечения ненулевой, $i = 1, 2$ (см. рисунок). Через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ будем обозначать единичные нормальные векторы к γ и Γ^i соответственно; $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$, $\Omega = \Omega_L \cup \Omega_R$, $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Считаем, что области Ω_L, Ω_R соответствуют упругим телам в естественном состоянии, а γ соответствует срединной линии тонкой слабо искривлённой перемычки.



Геометрия задачи

Обозначим через $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, заданный положительно определённый тензор модулей упругости:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

$$A\xi \cdot \xi \geq c_0|\xi|^2 \quad \xi = \{\xi_{ij}\}, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Все величины с двумя нижними индексами считаются симметричными по этим индексам.

Постановка задачи равновесия упругих тел с тонкой слабо искривлённой перемычкой γ состоит в следующем. Найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, упругих тел, определённые в Ω_γ , и перемещения v, w точек перемычки, определённые на s , такие что выполняются уравнения

$$-\text{div } \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1}$$

$$w_{,1111} + k(v_{,1} + kw) = [\sigma_\nu]pq_i \quad \text{на } s_i, \quad i = 0, 1, 2, \tag{2}$$

$$-v_{,11} - (kw)_{,1} = [\sigma_\tau]pq_i \quad \text{на } s_i, \quad i = 0, 1, 2, \tag{3}$$

и краевые условия

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \text{ на } \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \quad (4)$$

$$w_{,11} = w_{,111} = v_{,1} + kw = 0 \text{ при } x_1 = -2, 2, \quad (5)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\tau^-, \quad w = u_\nu^- \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (6)$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (7)$$

$$[v(\pm 1)] = [w(\pm 1)] = [w_{,1}(\pm 1)] = 0, \quad (8)$$

$$[(v_{,1} + kw)(\pm 1)] = [w_{,11}(\pm 1)] = [w_{,111}(\pm 1)] = 0. \quad (9)$$

Здесь $[h] = h^+ - h^-$ — скачок функции h на $\gamma_1 \cup \gamma_2$, где знаки \pm соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали ν ; $p = \sqrt{1 + \varphi_{,1}^2}$; $q_0 = 0$, $q_1 = q_2 = 1$; $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$ — тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, $i, j = 1, 2$; $\sigma n = (\sigma_{1j} n_j, \sigma_{2j} n_j)$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i$, $\sigma_\tau = \sigma \nu \cdot \tau$, $u_\nu = u \nu$, $u_\tau = u \tau$; $[g(b)] = g(b+) - g(b-)$ — скачок функции g в точке $b \in s$. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Второе и третье равенства (6) следует понимать так: $v(x_1) = u_\tau(x_1, \varphi(x_1))$, $x_1 \in s_1 \cup s_2$. При этом уравнение (1) — уравнение равновесия упругого тела и уравнение состояния (закон Гука), а уравнения (2), (3) представляют уравнения равновесия тонкой слабо искривлённой перемычки. Правые части уравнений (2), (3) описывают силы, действующие на неё со стороны упругого тела; $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ — заданный вектор внешних сил, действующих на упругие тела, а $k \in L^\infty(s)$ — кривизна срединной линии перемычки. Для простоты коэффициенты упругости в (2), (3) приняты равными единице. В дальнейшем зависимость от этих коэффициентов будет исследована подробно.

Второе и третье соотношения (6) обеспечивают равенство смещений для точек упругого тела и тонкой перемычки на $\gamma_1^- \cup \gamma_2^-$. Что касается краевых условий (5), то они соответствуют нулевому моменту, нулевой перерезывающей силе и нулевой деформации растяжения (сжатия) в концевых точках перемычки. Наконец, краевые условия (8), (9) являются условиями сопряжения в точках пересечения перемычки с внешней границей упругих тел. В целом модель (1)–(9) соответствует задаче с неизвестной областью контакта между берегами трещин. Первое краевое условие (6) описывает взаимное непроникание между противоположными берегами; при этом выполнены краевые условия (7) (см. [19]).

Как будет показано ниже, соотношения (1)–(9) в точности эквивалентны вариационной формулировке задачи минимизации функционала энергии на подходящем пространстве функций. При этом функционал энергии содержит слагаемые, соответствующие энергии деформирования упругого тела, работе внешних сил, энергии изгиба и растяжения тонкой перемычки.

На первом этапе приведём вариационную формулировку задачи (1)–(9) и докажем существование решения. Введём для этого пространство функций

$$H_D^1(\Omega_\gamma)^2 = \{u \in H^1(\Omega_\gamma)^2 \mid u = 0 \text{ на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2\}$$

и функционал энергии $E: W \rightarrow \mathbb{R}$,

$$E(u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma} f u + \frac{1}{2} \int_s w_{,11}^2 + \frac{1}{2} \int_s (v_{,1} + kw)^2,$$

где пространство W с нормой

$$\|(u, v, w)\|_W^2 = \|u\|_{H_D^1(\Omega_\gamma)^2}^2 + \|(v, w)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2$$

определяется следующим образом:

$$W = \{(u, v, w) \in H_D^1(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(s) \times H^2(s) \mid v = u_\tau^-, \quad w = u_\nu^- \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2\}.$$

Здесь $\sigma(u) \varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u)$, $fu = f_i u_i$, а $\sigma(u)$ определяется из (1), т. е. $\sigma(u) = A \varepsilon(u)$. Отметим, что введённое пространство W является подпространством в рефлексивном пространстве $H_D^1(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(s) \times H^2(s)$. Особенность этого подпространства состоит в том, что оно состоит из функций, следы которых u_τ, u_ν на $\gamma_1^- \cup \gamma_2^-$ являются более гладкими по сравнению со стандартной гладкостью $H^{1/2}(\gamma_1 \cup \gamma_2)$. Эта гладкость обеспечивается выполнением равенств $v = u_\tau^-, w = u_\nu^-$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2$ при $(v, w) \in H^1(s) \times H^2(s)$.

Введём множество допустимых перемещений

$$S = \{(u, v, w) \in W \mid [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2\}.$$

Заметим далее, что задача минимизации

$$E(u, v, w) \rightarrow \inf_S E, \quad (u, v, w) \in S,$$

эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$(u, v, w) \in S, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_s (v_{,1} + kw)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}) \\ & + \int_s \{w_{,11}(\bar{w}_{,11} - w_{,11}) + k(v_{,1} + kw)(\bar{w} - w)\} \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S. \end{aligned} \tag{11}$$

Для доказательства существования решения задачи (10), (11) сначала докажем следующее

Утверждение 1. *Существует постоянная $c > 0$, такая что*

$$\int_{s_1 \cup s_2} (v^2 + w^2) + \int_s \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\} \geq c \|(v, w)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2$$

для всех $(v, w) \in H^1(s) \times H^2(s)$.

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно. Тогда существует последовательность $(v^m, w^m) \in H^1(s) \times H^2(s)$, такая что при $m \rightarrow \infty$

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s) \times H^2(s)} = 1, \tag{12}$$

$$\int_{s_1 \cup s_2} \{(v^m)^2 + (w^m)^2\} + \int_s \{(w_{,11}^m)^2 + (v_{,1}^m + kw^m)^2\} \rightarrow 0. \tag{13}$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность с прежним обозначением, считаем что при $m \rightarrow \infty$

$$(v^m, w^m) \rightarrow (v, w) \quad \text{слабо в } H^1(s) \times H^2(s), \quad \text{сильно в } L^2(s) \times L^2(s). \tag{14}$$

Из (13), (14) следует

$$v \equiv w \equiv 0 \quad \text{на } s_1 \cup s_2. \tag{15}$$

Кроме того,

$$\int_{s_0} \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\} = 0.$$

Это означает, что

$$w(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = 0, \quad v(x_1) = a_2, \quad x_1 \in s_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

С учётом (15) получаем

$$(v, w) \equiv (0, 0) \quad \text{на } s. \quad (16)$$

Далее,

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2 = \|(v^m, w^m)\|_{L^2(s) \times L^2(s)}^2 + \int_s \{(v_{,1}^m)^2 + (w_{,11}^m)^2\}.$$

В силу (13), (14), (16) имеем

$$\int_s \{(v_{,1}^m)^2 + (w_{,11}^m)^2\} \rightarrow 0.$$

Тогда согласно (16) получим

$$\int_s \{(v_{,1}^m)^2 + (w_{,11}^m)^2\} \rightarrow \int_s \{(v_{,1})^2 + (w_{,11})^2\}$$

и поэтому

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2 \rightarrow \|(v, w)\|_{L^2(s) \times L^2(s)}^2 + \int_s \{v_{,1}^2 + w_{,11}^2\} = \|(v, w)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2.$$

Учитывая (14), будем иметь

$$(v^m, w^m) \rightarrow (v, w) \quad \text{сильно в } H^1(s) \times H^2(s),$$

что в силу (16) приводит к противоречию, поскольку из (12) следует

$$\|(v, w)\|_{H^1(s) \times H^2(s)} = 1.$$

Утверждение 1 доказано. \square

Теорема 1. *Задача (10), (11) имеет единственное решение.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить коэрцитивность функционала E на S . Слабая полунепрерывность снизу функционала E очевидна. Учитывая первое неравенство Корна, имеем для $\beta > 0$ с положительными постоянными c_i :

$$E(u, v, w) \geq c_0 \|u\|_{1, \Omega_\gamma}^2 - c_1 \|u\|_{1, \Omega_\gamma} \pm \frac{\beta}{2} (\|v\|_{L^2(s_1 \cup s_2)}^2 + \|w\|_{L^2(s_1 \cup s_2)}^2) + \frac{1}{2} \int_s w_{,11}^2 + \frac{1}{2} \int_s (v_{,1} + kw)^2, \quad (17)$$

где $\|\cdot\|_{1, \Omega_\gamma}$ — норма в $H_D^1(\Omega_\gamma)$. В силу соотношений $v = u_\tau^-$, $w = u_\nu^-$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2$ и теорем вложения для малых $\beta > 0$ получим

$$\frac{c_0}{2} \|u\|_{1, \Omega_\gamma}^2 - \frac{\beta}{2} (\|v\|_{L^2(s_1 \cup s_2)}^2 + \|w\|_{L^2(s_1 \cup s_2)}^2) \geq 0.$$

Таким образом, с учётом утверждения 1, из (17) при малых $\beta > 0$ следует неравенство

$$E(u, v, w) \geq c_2 \|u\|_{1, \Omega_\gamma}^2 - c_1 \|u\|_{1, \Omega_\gamma} + c_3 (\|v\|_{H^1(s)}^2 + \|w\|_{H^2(s)}^2),$$

что и доказывает коэрцитивность функционала E на W , т. е. $E(u, v, w) \rightarrow \infty$ при $\|(u, v, w)\|_W \rightarrow \infty$. Таким образом, получаем доказательство существования решения, удовлетворяющего (10), (11).

Можно доказать, что система соотношений (1)–(9) эквивалентна (10), (11) на гладких решениях. Это означает, что соотношения (1)–(9) следуют из (10), (11) и, наоборот, из (10), (11) можно получить все соотношения (1)–(9). Соответствующие рассуждения полностью приводить не будем, так как в целом они повторяют идеи работы [23]. Обоснования требуют лишь условия сопряжения (9). Итак, пусть выполнены (10), (11) и соотношения (1)–(7) уже получены из (10), (11). Подставим в (11) тестовую функцию $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = (u, v, w) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, где $[\tilde{u}_\nu] = 0$, $(\tilde{v}, \tilde{w}) = (u_\tau^-, u_\nu^-)$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Получим

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f(\tilde{u}) + \int_s (v_{,1} + kw)\tilde{v}_{,1} + \int_s \{w_{,11}\tilde{w}_{,11} + k(v_{,1} + kw)\tilde{w}\} = 0.$$

Интегрируя здесь по частям и пользуясь уравнением равновесия для упругих тел, будем иметь

$$\begin{aligned} & - \int_{s_1 \cup s_2} [\sigma_\nu \tilde{u}_\nu + \sigma_\tau \tilde{u}_\tau] - \sum_0^2 \int_{s_i} (v_{,1} + kw)_{,1} \tilde{v} + \sum_0^2 \int_{s_i} w_{,1111} \tilde{w} \\ & + \int_s k(v_{,1} + kw)\tilde{w} + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=-2}^{x_1=-1} + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=-1}^{x_1=1} \\ & + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=1}^{x_1=2} + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=-2}^{x_1=-1} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=-2}^{x_1=-1} + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=-1}^{x_1=1} \\ & - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=-1}^{x_1=1} + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=1}^{x_1=2} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=1}^{x_1=2} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Воспользуемся уравнениями равновесия тонкой перемычки (2), (3) и краевыми условиями (5). Тогда из (18) получим

$$\begin{aligned} & (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=-1}^{x_1=-1} + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=-1}^{x_1=1} + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=1} \\ & + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=-1}^{x_1=-1} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=-1}^{x_1=-1} + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=-1}^{x_1=1} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=-1}^{x_1=1} \\ & + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=1} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=1} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции \tilde{v} , \tilde{w} , $\tilde{w}_{,1}$ могут принимать произвольные значения в точках ± 1 . Это обстоятельство позволяет получить из (19) условия сопряжения (9). Таким образом, из (10), (11) вытекают все соотношения (1)–(9). Можно доказать и обратное. Из (1)–(9) следует (10), (11).

Отметим также, что решение задачи (10), (11) единственно. \square

2. ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ ПАРАМЕТРА ЖЁСТКОСТИ ПЕРЕМЫЧКИ К БЕСКОНЕЧНОСТИ

В этом разделе мы исследуем поведение решения задачи (1)–(9) при стремлении параметра жёсткости α тонкой перемычки к бесконечности. Для простоты этот параметр равнялся единице в (1)–(9); в данном случае зависимость от этого параметра будет явно указана в модели. Решение соответствующей краевой задачи будем снабжать символом α . Постановка задачи равновесия при заданном параметре $\alpha > 0$ состоит в следующем. Найти вектор перемещений $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_γ , и перемещения v^α, w^α точек тонкой перемычки, определённые на s , такие что выполняются уравнения

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u^\alpha) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad (20)$$

$$\alpha w_{,1111}^\alpha + \alpha k(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha) = [\sigma_\nu]pq_i \quad \text{на} \quad s_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (21)$$

$$-\alpha v_{,11}^\alpha - \alpha(kw^\alpha)_{,1} = [\sigma_\tau]pq_i \quad \text{на} \quad s_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (22)$$

и краевые условия

$$u^\alpha = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \quad (23)$$

$$w_{,11}^\alpha = w_{,111}^\alpha = v_{,1}^\alpha + kw^\alpha = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = -2, 2, \quad (24)$$

$$[u_\nu^\alpha] \geq 0, \quad v^\alpha = (u_\tau^\alpha)^-, \quad w^\alpha = (u_\nu^\alpha)^- \quad \text{на} \quad \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (25)$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu^\alpha] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (26)$$

$$[v^\alpha(\pm 1)] = [w^\alpha(\pm 1)] = [w_{,1}^\alpha(\pm 1)] = 0, \quad (27)$$

$$[(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\pm 1)] = [w_{,11}^\alpha(\pm 1)] = [w_{,111}^\alpha(\pm 1)] = 0. \quad (28)$$

Как и в предыдущем разделе, задача (20)–(28) допускает вариационную формулировку. Именно, рассмотрим функционал энергии

$$E^\alpha(u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma} f u + \frac{\alpha}{2} \int_s w_{,11}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_s (v_{,1} + kw)^2.$$

Тогда задача минимизации этого функционала на множестве S имеет решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha) \in S, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha) \varepsilon(\bar{u} - u^\alpha) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\alpha) + \alpha \int_s (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}^\alpha) \\ & + \alpha \int_s \{w_{,11}^\alpha(\bar{w}_{,11} - w_{,11}^\alpha) + k(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\bar{w} - w^\alpha)\} \geq 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S. \end{aligned} \quad (30)$$

На первом этапе получим априорные оценки решений в задаче (29), (30). Сначала заметим, что из (29), (30) следует равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha) \varepsilon(u^\alpha) - \int_{\Omega_\gamma} f u^\alpha + \alpha \int_s (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 + \alpha \int_s (w_{,11}^\alpha)^2 = 0. \quad (31)$$

Так же, как и при доказательстве коэрцитивности функционала E в предыдущем разделе, отсюда получаем равномерно по $\alpha \geq \alpha_0 > 0$

$$\|(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha)\|_W \leq c.$$

Выбирая подпоследовательность, можно считать, что при $\alpha \rightarrow \infty$

$$(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha) \rightarrow (u, v, w) \quad \text{слабо в} \quad W. \quad (32)$$

Кроме того, из (31) следует

$$\int_s (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 + \int_s (w_{,11}^\alpha)^2 \leq c/\alpha.$$

Это означает, что для предельных функций будем иметь

$$\int_s (v_{,1} + kw)^2 + \int_s w_{,11}^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $(v, w) \in L(s)$, где

$$L(s) = \{(v, w) \mid w(x_1) = a_0 + a_1 x_1, v_{,1}(x_1) + k(x_1)w(x_1) = 0, x_1 \in s; a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Введём далее множество допустимых перемещений с произвольными (\bar{v}, \bar{w})

$$S_r = \{\bar{u} \in H_D^1(\Omega_\gamma)^2 \mid [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2; (\bar{u}_\tau^-, \bar{u}_\nu^-)|_{\gamma_1 \cup \gamma_2} = (\bar{v}, \bar{w}), (\bar{v}, \bar{w}) \in L(s)\}$$

и возьмём произвольный элемент $\bar{u} \in S_r$. Тогда существуют функции \bar{v}, \bar{w} , такие что $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S$. Подставим $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ в качестве тестовой функции в (30) и перейдём к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$. В результате получим

$$u \in S_r, \tag{33}$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) \geq 0 \quad \text{для всех } \bar{u} \in S_r. \tag{34}$$

Итак, доказано следующая

Теорема 2. Решения задачи (29), (30) сходятся в смысле (32) при $\alpha \rightarrow \infty$ к решению задачи (33), (34).

Предельная задача (33), (34) допускает дифференциальную формулировку. Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_γ , и функции $(v, w) \in L(s)$, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{35}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \quad \text{на } \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \tag{36}$$

$$[u_\nu] \geq 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2; \quad (u_\tau^-, u_\nu^-)|_{\gamma_1 \cup \gamma_2} = (v, w), \tag{37}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu \cdot u] = 0, \quad \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu \cdot \bar{u}] \leq 0 \quad \text{для всех } \bar{u} \in S_r. \tag{38}$$

Можно привести ещё одну дифференциальную формулировку задачи (33), (34). Именно, требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_γ , и функции $(v, w) \in L(s)$, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{39}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \quad \text{на } \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \tag{40}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\tau^-, \quad w = u_\nu^- \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \tag{41}$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \tag{42}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma_\tau] \bar{v} + \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma_\nu] \bar{w} = 0 \quad \text{для всех } (\bar{v}, \bar{w}) \in L(s). \tag{43}$$

Теорема 3. На классе гладких решений формулировки (33), (34), (35)–(39) и (39)–(43) эквивалентны.

Доказательство. Покажем эквивалентность (33), (34) и (39)–(43). Пусть выполнено (39)–(43). Умножим первое уравнение (39) на $\bar{u} - u$, где $\bar{u} \in S_r$, и проинтегрируем по Ω_γ . Получим

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] + \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) = 0. \tag{44}$$

Заметим, что если

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] \leq 0, \quad (45)$$

то из (44) вытекает (34). Однако проверка справедливости (45) с учётом краевых условий (41)–(43) трудностей не доставляет.

В обратную сторону. Пусть выполнено (33), (34). Выбирая в (34) тестовую функцию $\bar{u} = u \pm \psi$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$, легко получим уравнение равновесия в Ω_γ . Краевые условия (42) являются типичными для отслоившихся тонких включений при краевых условиях взаимного непоникания противоположных берегов; их вывод мы опустим. Подставим теперь в (34) тестовую функцию вида $\bar{u} = u \pm \tilde{u}$, где \tilde{u} — произвольная функция из S_r , такая что $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Получим

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} = 0. \quad (46)$$

Интегрирование по частям в (46) с учётом справедливости уравнения равновесия приводит к тождеству

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu \cdot \tilde{u}] = 0. \quad (47)$$

Тождество (47) в точности совпадает с (43), что и требуется. Второе краевое условие (40) можно получить из (34) стандартным образом. Таким образом, из (33), (34) вытекают все соотношения (39)–(43).

Доказательство эквивалентности (33), (34) и (35)–(38) проще, и мы его опустим. \square

3. ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ ПАРАМЕТРА ЖЁСТКОСТИ ПЕРЕМЫЧКИ К НУЛЮ

Цель данного раздела — исследовать переход к пределу по параметру жёсткости тонкой перемычки при стремлении этого параметра к нулю. Будем предполагать, что параметр жёсткости меняется на интервале s_0 , а на множестве $s_1 \cup s_2$ параметр фиксирован и равен единице. В указанном случае решение соответствующей краевой задачи при каждом фиксированном параметре жёсткости α удовлетворяет вариационному неравенству

$$(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha) \in S, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha) \varepsilon(\bar{u} - u^\alpha) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\alpha) \\ & + \alpha \int_{s_0} \{w_{,11}^\alpha (\bar{w}_{,11} - w_{,11}^\alpha) + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}^\alpha + k(\bar{w} - w^\alpha))\} \\ & + \int_{s_1 \cup s_2} \{w_{,11}^\alpha (\bar{w}_{,11} - w_{,11}^\alpha) + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}^\alpha) + k(\bar{w} - w^\alpha)\} \geq 0 \end{aligned}$$

для всех $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S$. (49)

Задача (48), (49) соответствует минимуму функционала энергии

$$E_\alpha(u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma} f u + \frac{\alpha}{2} \int_{s_0} \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\} + \frac{1}{2} \int_{s_1 \cup s_2} \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\}$$

на множестве S . Можно выписать дифференциальную формулировку задачи (48), (49). Именно, требуется найти вектор перемещений $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_γ , и перемещения v^α, w^α точек тонкой перемычки, определённые на s , такие что выполняются уравнения

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u^\alpha) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad (50)$$

$$\alpha^\beta w_{,1111}^\alpha + \alpha^\beta k(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha) = [\sigma_\nu]pq_i \quad \text{на} \quad s_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (51)$$

$$-\alpha^\beta v_{,11}^\alpha - \alpha^\beta (kw^\alpha)_{,1} = [\sigma_\tau]pq_i \quad \text{на} \quad s_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (52)$$

и краевые условия

$$u^\alpha = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \quad (53)$$

$$w_{,11}^\alpha = w_{,111}^\alpha = v_{,1}^\alpha + kw^\alpha = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = -2, 2, \quad (54)$$

$$[u_\nu^\alpha] \geq 0, \quad v^\alpha = (u_\tau^\alpha)^-, \quad w^\alpha = (u_\nu^\alpha)^- \quad \text{на} \quad \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (55)$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ [u_\nu^\alpha] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (56)$$

$$[v^\alpha(\pm 1)] = [w^\alpha(\pm 1)] = [w_{,1}^\alpha(\pm 1)] = 0, \quad (57)$$

$$(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\mp 1 \mp) = \alpha(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\mp 1 \pm); \quad w_{,11}^\alpha(\mp 1 \mp) = \alpha w_{,11}^\alpha(\mp 1 \pm), \quad (58)$$

$$w_{,111}^\alpha(\mp 1 \mp) = \alpha w_{,111}^\alpha(\mp 1 \pm), \quad (59)$$

где $\beta = 0$ для $i = 1, 2$; $\beta = 1$ для $i = 0$. В формулах (58), (59) следует одновременно брать верхние и нижние знаки.

Сначала получим априорные оценки решений в задаче (48), (49). Как и в предыдущем разделе, из (48), (49) следует соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha) \varepsilon(u^\alpha) - \int_{\Omega_\gamma} f u^\alpha + \alpha \int_{s_0} \{ (w_{,11}^\alpha)^2 + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 \} \\ + \int_{s_1 \cup s_2} \{ (w_{,11}^\alpha)^2 + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 \} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Повторяя рассуждения, которые использовались при доказательстве коэрцитивности функционала E в разд. 1, из (60) получим равномерную по α оценку

$$\|u^\alpha\|_{H_D^1(\Omega_\gamma)}^2 + \|(v^\alpha, w^\alpha)\|_{H^1(s_1 \cup s_2) \times H^2(s_1 \cup s_2)}^2 \leq c. \quad (61)$$

Кроме того,

$$\alpha \int_{s_0} \{ (w_{,11}^\alpha)^2 + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 \} \leq c. \quad (62)$$

Из (61) заключаем, что величины $v^\alpha(\pm 1), w^\alpha(\pm 1), w_{,1}^\alpha(\pm 1)$ равномерно ограничены по α .

Пользуясь утверждением 2, доказанным ниже, и (62), получаем что равномерно при малых α

$$\|\sqrt{\alpha}(v^\alpha, w^\alpha)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)} \leq c. \quad (63)$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность, с учётом (61), (63) можно считать, что при $\alpha \rightarrow 0$

$$u^\alpha \rightarrow u \quad \text{слабо в} \quad H_D^1(\Omega_\gamma)^2, \quad (64)$$

$$(v^\alpha, w^\alpha) \rightarrow (v, w) \quad \text{слабо в} \quad H^1(s_1 \cup s_2) \times H^2(s_1 \cup s_2), \quad (65)$$

$$(\sqrt{\alpha}v^\alpha, \sqrt{\alpha}w^\alpha) \rightarrow (\tilde{v}, \tilde{w}) \quad \text{слабо в} \quad H^1(s_0) \times H^2(s_0). \quad (66)$$

Введём в рассмотрение множество допустимых перемещений для предельной задачи

$$S_0 = \{(u, v, w) \in H_D^1(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(s_1 \cup s_2) \times H^2(s_1 \cup s_2) \mid (u_\tau^-, u_\nu^-) = (v, w), [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2\}.$$

Возьмём произвольный элемент $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S_0$, считая, что функции \bar{v}, \bar{w} продолжены в s_0 с сохранением гладкости, и подставим его в качестве тестового в (49). Отметим при этом, что это допустимый элемент, т. е. $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S$. После перехода к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ на основе (64)–(66) получим

$$(u, v, w) \in S_0, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_{s_1 \cup s_2} (v_{,1} + kw)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}) \\ & + \int_{s_1 \cup s_2} \{w_{,11}(\bar{w}_{,11} - w_{,11}) + k(v_{,1} + kw)(\bar{w} - w)\} \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S_0. \end{aligned} \quad (68)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Решения задач (48), (49) сходятся в смысле (64)–(66) при $\alpha \rightarrow 0$ к решению задачи (67), (68).*

Приведём дифференциальную формулировку задачи (67), (68). Требуется найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, упругих тел, определённые в Ω_γ , и перемещения v, w точек перемычки, определённые на $s_1 \cup s_2$, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (69)$$

$$w_{,1111} + k(v_{,1} + kw) = [\sigma_\nu]p \quad \text{на } s_1 \cup s_2, \quad (70)$$

$$-v_{,11} - (kw)_{,1} = [\sigma_\tau]p \quad \text{на } s_1 \cup s_2, \quad (71)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2, \quad \sigma n = 0 \quad \text{на } \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \quad (72)$$

$$w_{,11} = w_{,111} = v_{,1} + kw = 0 \quad \text{при } x_1 = \pm 1, \pm 2, \quad (73)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\tau^-, \quad w = u_\nu^- \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (74)$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad s_\tau^+ = 0, \quad s_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2. \quad (75)$$

Видно, что краевая задача (69)–(75) распадается на две независимые задачи, сформулированные в областях Ω_L, Ω_R . Каждая из этих задач описывает равновесие упругого тела с тонким слабо искривлённым включением.

Имеет место следующая

Теорема 5. *На классе гладких решений формулировки (67), (68) и (69)–(75) эквивалентны.*

В заключение этого раздела докажем утверждение, которое использовалось при доказательстве теоремы 4.

Для гладких функций v, w , заданных на s_0 , обозначим

$$h^2(v, w) = v^2(1) + v^2(-1) + w^2(1) + w^2(-1) + w_{,1}^2(1) + w_{,1}^2(-1).$$

Утверждение 2. *Существует постоянная $c > 0$, такая что*

$$\int_{s_0} \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\} + h^2(v, w) \geq c \|(v, w)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)}^2$$

для всех $(v, w) \in H^1(s_0) \times H^2(s_0)$.

Доказательство. Предположим, что сформулированное утверждение не верно. В этом случае существует последовательность $(v^m, w^m) \in H^1(s_0) \times H^2(s_0)$, такая что при $m \rightarrow \infty$

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)} = 1, \quad (76)$$

$$\int_{s_0} \{(w_{,11}^m)^2 + (v_{,1}^m + kw^m)^2\} + h^2(v^m, w^m) \rightarrow 0. \quad (77)$$

Можно считать, выбирая при необходимости подпоследовательность, что при $m \rightarrow \infty$

$$(v^m, w^m) \rightarrow (v, w) \quad \text{слабо в } H^1(s_0) \times H^2(s_0), \quad \text{сильно в } L^2(s_0) \times H^1(s_0). \quad (78)$$

Для предельных функций в силу (77), (78) имеем

$$w_{,11} = 0, \quad v_{,1} + kw = 0 \quad \text{на } s_0; \quad h^2(v, w) = 0. \quad (79)$$

Тогда, учитывая (79), получаем

$$v \equiv w \equiv 0 \quad \text{на } s_0. \quad (80)$$

В силу (77), (78), (80) будем иметь

$$\begin{aligned} \|(v^m, w^m)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)}^2 &= \|(v^m, w^m)\|_{L^2(s_0) \times H^1(s_0)}^2 + \int_{s_0} \{(v_{,1}^m)^2 + (w_{,11}^m)^2\} \\ &\rightarrow \|(v, w)\|_{L^2(s_0) \times H^1(s_0)}^2 + \int_{s_0} \{v_{,1}^2 + w_{,11}^2\} = \|(v, w)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем сходимость норм

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)} \rightarrow \|(v, w)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)}.$$

Учитывая (78), заключаем

$$(v^m, w^m) \rightarrow (v, w) \quad \text{сильно в } H^1(s_0) \times H^2(s_0),$$

что силу (80) приводит к противоречию, поскольку из (76) следует

$$\|(v, w)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)} = 1.$$

Утверждение 2 доказано. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Caillerie D., Nedelec J.C. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // Math. Meth. Appl. Sci. 1980. V. 2. P. 251–270; <https://doi.org/10.1002/mma.1670020302>
2. El Jarroudi M. Homogenization of an elastic material reinforced with thin rigid von Karman ribbons // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24, N 7. P. 1–27; <https://doi.org/10.1177/1081286518810757>
3. Lazarev N. Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // Z. Angew. Math. Phys. 2015. V. 66. P. 2025–2040; <https://doi.org/10.1007/s00033-014-0488-4>
4. Rudoy E. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions // Technologies. 2020. V. 8, N 4. Article 59; <https://doi.org/10.3390/technologies8040059>
5. Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G. Multi-materials with strong interface: Variational modelings // Asymptot. Anal. 2009. V. 61, N 1. P. 1–19; DOI:10.3233/ASY-2008-0903

6. *Khudnev A.M., Fankina I.V.* Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary // *Z. Angew. Math. Phys.* 2021. V. 72, N 121; <https://doi.org/10.1007/s00033-021-01553-3>
7. *Lazarev N.P., Rudoy E.M.* Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies // *J. Comp. Appl. Math.* 2022. V. 403. Article 113710; DOI:10.1016/j.cam.2021.113710
8. *Lazarev N., Itou H.* Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff —Love plates with a crack // *Math. Mech. Solids.* 2019. V. 24. P. 3743–3752; <https://doi.org/10.1177/1081286519850608>
9. *Рудой Е.М., Итоу Х., Лазарев Н.П.* Асимптотическое обоснование моделей тонких включений в упругом теле в рамках антиплоского сдвига // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2021. Т. 24. № 1. С. 103–119; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.108
10. *Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A.* Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion // *Sib. Electron. Math. Rep.* 2022. V. 19, N 2. P. 935–948; DOI: 0.33048/semi.2022.19.078
11. *Shcherbakov V.V.* Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions // *Z. Angew. Math. Phys.* 2017. V. 68, N 26; <https://doi.org/10.1007/s00033-017-0769-9>
12. *Khudnev A.M.* T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter // *J. Comp. Appl. Math.* 2021. V. 393. Article 113540; <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113540>
13. *Furtsev A.I.* On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion // *J. Math. Sci.* 2019. V. 237, N 4. P. 530–545; <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.9>
14. *Bellieud M., Bouchitte G.* Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers // *Asymptotic Anal.* 2002. V. 32. P. 153–183.
15. *Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A.* Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material // *Philos. Trans. R. Soc. Ser. A.* 2022. V. 380. Article 20210354; <https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0354>
16. *Gaudiello A., Sili A.* Limit models for thin heterogeneous structures with high contrast // *J. Differ. Equ.* 2021. V. 302. P. 37–63; <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.08.032>
17. *Kovtunen V.A., Leugering G.* A shape-topological control problem for nonlinear crack — defect interaction: the anti-plane variational model // *SIAM J. Control Optim.* 2016. V. 54. P. 1329–1351; <https://doi.org/10.1137/151003209>
18. *Khudnev A.M., Kovtunen V.A.* *Analysis of Cracks in Solids.* Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
19. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
20. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
21. *Хлуднев А.М.* Слабо искривлённое включение в упругом теле при наличии отслоения // *Изв. РАН.* 2015. № 5. С. 131–144.
22. *Хлуднев А.М.* Асимптотика анизотропных слабо искривлённых включений в упругом теле // *Сиб. журнал индустр. математики.* 2017. Т. 20, № 1. С. 93–104; <https://doi.org/10.17377/sibjim.2017.20.110>
23. *Хлуднев А.М., Попова Т.С.* О задаче сопряжения двух слабо искривлённых включений в упругом теле // *Сиб. мат. журн.* 2020. Т. 61, № 4. С. 932–945; DOI: 10.33048/smzh.2020.61.414
24. *Khudnev A.M.* Asymptotics of solutions for two elastic plates with thin junction // *Sib. Electron. Math. Rep.* 2022. V. 19, N 2. P. 484–501; DOI: 10.33048/semi.2022.19.041
25. *Khudnev A.M.* On the crossing bridge between two Kirchhoff —Love plates // *Axioms.* 2023. V. 12, N 2. Article 120; <https://doi.org/10.3390/axioms12020120>

UDC 517.958:539.3

ON THE EQUILIBRIUM OF ELASTIC BODIES WITH WEAKLY CURVED JUNCTION

© 2023 A. M. Khludnev

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Acad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: khlud@hydro.nsc.ru

Received 10.04.2023, revised 19.04.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. The work is addressed to the analysis of a boundary value problem with an unknown contact area, which describes equilibrium of two-dimensional elastic bodies with a thin weakly curved junction. It is assumed that the junction exfoliates from the elastic bodies, thereby forming interfacial cracks. Nonlinear boundary conditions of the inequality form are set on the crack faces, excluding the mutual penetration. The unique solvability of the boundary value problem is established. The analysis of limit transitions in terms of the junction stiffness parameter is provided as the parameter tends to infinity and to zero, and limiting models are investigated.

Keywords: boundary value problem, nonlinear boundary conditions, elastic body, thin junction, crack

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.312

REFERENCES

1. Caillerie D., Nedelec J.C. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1980, Vol. 2, pp. 251–270; <https://doi.org/10.1002/mma.1670020302>
2. El Jarroudi M. Homogenization of an elastic material reinforced with thin rigid von Karman ribbons. *Math. Mech. Solids*, 2018, Vol. 24, No. 7, pp. 1–27; <https://doi.org/10.1177/1081286518810757>
3. Lazarev N. Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, Vol. 66, pp. 2025–2040; <https://doi.org/10.1007/s00033-014-0488-4>
4. Rudoy E. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions. *Technologies*, 2020, Vol. 8, No. 4, article 59; <https://doi.org/10.3390/technologies8040059>
5. Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G. Multi-materials with strong interface: Variational modelings. *Asympt. Analysis*, 2009, Vol. 61, No. 1, pp. 1–19; DOI:10.3233/ASY-2008-0903
6. Khludnev A.M., Fankina I.V. Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2021, Vol. 72, No. 121; <https://doi.org/10.1007/s00033-021-01553-3>
7. Lazarev N.P., Rudoy E.M. Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies *J. Comp. Appl. Math.* 2022. V. 403. Article 113710; DOI:10.1016/j.cam.2021.113710
8. Lazarev N., Itou H. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff —Love plates with a crack. *Math. Mech. Solids*, 2019, Vol. 24, pp. 3743–3752; <https://doi.org/10.1177/1081286519850608>

9. Rudoy E.M., Itou H., Lazarev N.P. Asimptoticheskoe obosnovanie modelej tonkih vkljuchenij v uprugom tele v ramkah antiploskogo sdviga [Asymptotic substantiation of models of thin inclusions in an elastic body within the framework of an antiplane shift]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2021, Vol. 24, No. 1, pp. 103–119 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.108
10. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2022, Vol. 19, No. 2, pp. 935–948; DOI: 0.33048/semi.2022.19.078
11. Shcherbakov V.V. Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017, Vol. 68, No. 26; <https://doi.org/10.1007/s00033-017-0769-9>
12. Khludnev A.M. T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter. *J. Comp. Appl. Math.*, 2021, Vol. 393, article 113540; <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113540>
13. Furtsev A.I. On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion. *J. Math. Sci.*, 2019, Vol. 237, No. 4, pp. 530–545; <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.9>
14. Bellieud M., Bouchitte G. Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers. *Asymptotic Anal.*, 2002, Vol. 32, pp. 153–183.
15. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material. *Philos. Trans. R. Soc. Ser. A*, 2022, Vol. 380, article 20210354; <https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0354>
16. Gaudiello A., Sili A. Limit models for thin heterogeneous structures with high contrast. *J. Differ. Equ.*, 2021, Vol. 302, pp. 37–63; <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.08.032>
17. Kovtunenkov V.A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack — defect interaction: the anti-plane variational model. *SIAM J. Control Optim.*, 2016, Vol. 54, pp. 1329–1351; <https://doi.org/10.1137/151003209>
18. Khludnev A.M., Kovtunenkov V.A. Analysis of Cracks in Solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
19. Khludnev A.M. Zadachi teorii uprugosti v negladkih oblastjakh [Problems of elasticity theory in non-smooth domains]. Moscow: Fizmatlit, 2010 (in Russian).
20. Vol'mir A.S. Nelinejnaja dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
21. Khludnev A.M. A weakly curved inclusion in an elastic body with separation. *Mechanics of Solids*, 2015, Vol. 50, No. 5, pp. 591–601; DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654415050106>
22. Khludnev A.M. Asimptotika anizotropnyh slabo iskrivljonykh vkljuchenij v uprugom tele [Asymptotics of anisotropic weakly curved inclusions in an elastic body]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2017, Vol. 20, No. 1, pp. 93–104 (in Russian); <https://doi.org/10.17377/sibjim.2017.20.110>
23. Khludnev A.M., Popova T.C. The junction problem for two weakly curved inclusions in an elastic body. *Sib. Math. J.*, 2020, Vol. 61, No. 4, pp. 743–754.
24. Khludnev A.M. Asymptotics of solutions for two elastic plates with thin junction. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2022, Vol. 19, No 2, pp. 484–501; DOI: 10.33048/semi.2022.19.041
25. Khludnev A.M. On the crossing bridge between two Kirchhoff —Love plates. *Axioms*, 2023, Vol. 12, No. 2, article 120; <https://doi.org/10.3390/axioms12020120>