УДК 519.65

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПАРАБОЛ ПОИСКА КОРНЯ

© 2023 **В. В. Богданов**[a], **Ю. С. Волков**[b]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]bogdanov@math.nsc.ru, [b]volkov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 27.04.2023 г.; после доработки 26.05.2023 г.;
принята к публикации 07.06.2023 г.

Предлагается модификация метода парабол для поиска корня непрерывной функции, состоящая в том, что одновременно строятся две параболы, интерполирующие значения заданной функции. Показано, что если третья производная исходной функции знакопостоянна на рассматриваемом промежутке локализации искомого корня, то корень лежит между корнями парабол. Это позволяет существенно сузить интервал локализации корня и уменьшить количество шагов для вычисления корня с заданной точностью. Предложенная модификация метода парабол используется в задаче расчёта изолиний при моделировании универсальной характеристики гидротурбин.

Ключевые слова: метод парабол, моделирование, функция эффективности гидротурбины, сплайн, многомерная аппроксимация.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.301

ВВЕДЕНИЕ

Проблема отыскания корней нелинейного алгебраического уравнения $f(x) = 0$ известна давно и в значительной степени изучена. Ей посвящена обширная литература, она подробно изложена в монографиях и учебниках [1–5]. Однако регулярно появляются работы, предлагающие какие-то улучшения известных методов (см., например, [6–8]). Одним из самых простых и надёжных методов поиска корня вещественной непрерывной функции является метод дихотомии или половинного деления. Но он является и самым медленно сходящимся. Для работы данного метода требуется выделение интервала, содержащего корень. Как альтернатива этому методу выступает метод секущих, называемый также методом хорд или методом линейной интерполяции. Сложность и скорость сходимости этих методов примерно одинакова. На каждом шаге интервал локализации корня уменьшается. В работе [9] в результате сопоставления различных методов поиска корней показано, что для простых корней наиболее экономичен метод секущих.

Немного более сложным, но и более быстрым выступает метод парабол, когда вместо линейной интерполяции осуществляется интерполяция квадратичной параболой уже по трём точкам интервала локализации (см. [2]). Ясно, что один из корней параболы всегда будет лежать между заданными точками со значениями функции разных знаков, что говорит о сходимости метода. Сходимость этого метода в целом быстрее сходимости методов дихотомии и хорд, хотя вместе с уменьшением числа итераций возрастают затраты на вычисление корня квадратного уравнения. Есть и другие быстро сходящиеся методы, например метод Ньютона, но все они являются локально сходящимися, так как могут не сходиться при определённых

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН (проект FWNF–2022–0015).

начальных приближениях. К классу полностью сходящихся методов относятся только методы половинного деления и секущих либо гибридные методы с использованием этих двух; обзор таких методов приведён в [10]. В данной работе мы предлагаем модификацию метода парабол путём построения одновременно двух парабол, позволяющую на каждом шаге существенно уменьшать интервал локализации корня. Также приводится пример практической задачи, где процедура поиска корня производится многократно, поэтому любое сокращение времени поиска корня весьма актуально. Это задача математического моделирования универсальной характеристики гидротурбины.

1. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПАРАБОЛ

Пусть на отрезке локализации корня $[a, b]$ имеются четыре значения функции по два с каждой стороны от корня, который необходимо вычислить. Будем для определённости считать, что в точках x_0 и x_1 значения заданной функции $f(x)$ отрицательны:

$$f(x_0) < 0, \;\; f(x_1) < 0, \quad x_0 < x_1,$$

а в точках x_2 и x_3 положительны:

$$f(x_2) > 0, \;\; f(x_3) > 0, \quad x_1 < x_2 < x_3.$$

Построим две интерполяционные параболы $P_1(x)$ и $P_2(x)$, одну через левые три точки и вторую через правые (см. рис. 1). Ясно, что каждая из этих парабол пересечёт ось абсцисс между точками x_1 и x_2. Интересен случай, когда искомый корень функции будет находиться между корнями этих парабол. Оказывается, такое положение корня гарантируется в случае постоянства знака третьей производной рассматриваемой функции.

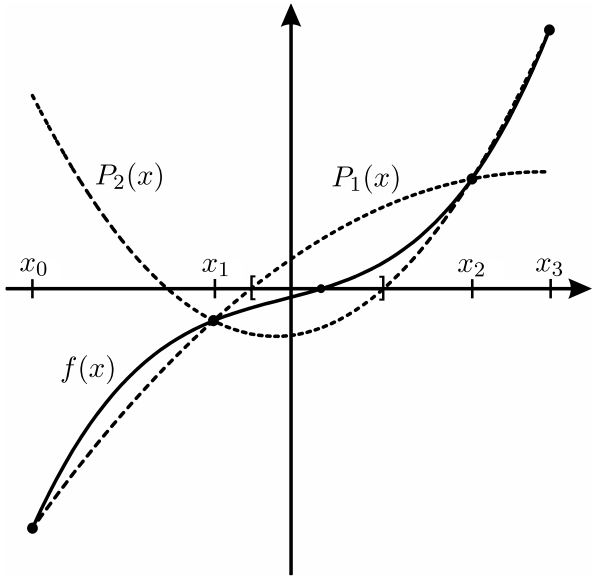

Рис. 1. Функция $f(x)$ (сплошная линия), точки локализации корня x_0, x_1, x_2, x_3 и две интерполяционные параболы $P_1(x)$ и $P_2(x)$ (пунктирные линии)

Теорема. *Пусть x_1^* и x_2^* суть корни интерполяционных парабол $P_1(x)$ и $P_2(x)$, лежащие в промежутке (x_1, x_2). Тогда если $f'''(x)$ знакопостоянна на отрезке $[x_0, x_3]$, то корень функции $f(x)$ расположен между точками x_1^* и x_2^*.*

Доказательство. Параболы $P_1(x)$ и $P_2(x)$ являются интерполяционными многочленами Лагранжа, следовательно [3], для погрешностей интерполяции справедливы формулы:

$$P_1(x) - f(x) = \frac{1}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f'''(\xi_1),$$
$$P_2(x) - f(x) = \frac{1}{3!}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f'''(\xi_2)$$

для некоторых чисел $\xi_1 \in (x_0, x_2)$ и $\xi_2 \in (x_1, x_3)$. Поэтому величина

$$[P_1(x) - f(x)][P_2(x) - f(x)] = \frac{1}{36}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)f'''(\xi_1)f'''(\xi_2)$$

всегда будет неположительна на рассматриваемом промежутке $[x_0, x_3]$, если значения функций $f'''(\xi_1)$ и $f'''(\xi_2)$ одного знака, что говорит о расположении парабол $P_1(x)$ и $P_2(x)$ по разные стороны от функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Теорема доказана. □

Таким образом, если на интервале поиска корня знак третьей производной заданной функции постоянен, то построение двух таких парабол приводит, как правило, к существенному сужению интервала локализации корня.

Приведём схему алгоритма предлагаемого метода. Считаем, что заданы функция $f(x)$ и точки $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ такие, что

$$f(x_0) < 0, \quad f(x_1) < 0, \quad f(x_2) > 0, \quad f(x_3) > 0.$$

Достаточно рассмотреть только такой случай, другой случай сводится к этому заменой функции на $-f(x)$.

Шаг 1. Строим параболу

$$P_1(x) = (x - x_2)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2)f[x_1, x_2] + f(x_2),$$

интерполирующую функцию $f(x)$ в точках x_0, x_1 и x_2. Здесь $f[x_1, x_2]$ и $f[x_0, x_1, x_2]$ суть обычные разделённые разности первого и второго порядков от функции $f(x)$. Корень этой параболы x_1^* находим по формуле

$$x_1^* = x_2 - \frac{2f(x_2)}{A + \operatorname{sign}(A)\sqrt{A^2 - 4f(x_2)f[x_0, x_1, x_2]}},$$

где $A = f[x_1, x_2] + f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]$. Отметим, что выбран корень параболы, который расположен на отрезке $[x_1, x_2]$.

Шаг 2. Аналогичным образом строим параболу

$$P_2(x) = (x - x_1)(x - x_2)f[x_1, x_2, x_3] + (x - x_1)f[x_1, x_2] + f(x_1),$$

интерполирующую функцию $f(x)$ в точках x_1, x_2 и x_3, и находим её корень

$$x_2^* = x_1 - \frac{2f(x_1)}{B + \operatorname{sign}(B)\sqrt{B^2 - 4f(x_1)f[x_1, x_2, x_3]}},$$

где $B = f[x_1, x_2] + f[x_1, x_3] - f[x_2, x_3]$, причём здесь также выбран корень параболы, который расположен на отрезке $[x_1, x_2]$.

Шаг 3. Проверяем взаимное расположение точек x_1^* и x_2^*.

Шаг 3.1. Если $x_1^* < x_2^*$, то проверяем знак функции $f(x)$ в точке x_1^*.

Шаг 3.1.1. Если $f(x_1^*) < 0$, то проверяем знак функции $f(x)$ в точке x_2^*.

Шаг 3.1.1.1. Если $f\left(x_2^*\right) < 0$, то точки x_2 и x_3 оставляем неизменными, а точки x_1^* и x_2^* обозначаем x_0 и x_1 соответственно.

Шаг 3.1.1.2. Если $f\left(x_2^*\right) > 0$, то точкам x_0, x_1, x_2, x_3 присваиваем значения x_1, x_1^*, x_2^*, x_2 соответственно.

Шаг 3.1.2. Если $f\left(x_1^*\right) > 0$, то точки x_0 и x_1 не меняем, а точки x_1^* и x_2^* обозначаем x_2 и x_3 соответственно.

Шаг 3.2. Если $x_1^* > x_2^*$, то проверяем знак функции $f(x)$ в точке x_2^*.

Шаг 3.2.1. Если $f\left(x_2^*\right) < 0$, то проверяем знак функции $f(x)$ в точке x_1^*.

Шаг 3.2.1.1. Если $f\left(x_1^*\right) < 0$, то точки x_2 и x_3 не меняем, а точки x_2^* и x_1^* обозначаем x_0 и x_1 соответственно.

Шаг 3.2.1.2. Если $f\left(x_1^*\right) > 0$, то точки x_1, x_2^*, x_1^*, x_2 обозначаем x_0, x_1, x_2, x_3 соответственно.

Шаг 3.2.2. Если $f\left(x_2^*\right) > 0$, то точки x_0 и x_1 не меняем, а точки x_2^* и x_1^* обозначаем x_2 и x_3 соответственно.

Шаг 4. Проверяем длину отрезка $[x_1, x_2]$ локализации корня. Если заданная точность не достигнута, то возвращаемся к шагу 1 и повторяем вычисления.

Один шаг модифицированного метода состоит в построении двух парабол, необходимо решить два квадратных уравнения и вычислить два значения функции. Поскольку заранее не известно, является ли третья производная заданной функции знакопостоянной на интервале $[x_0, x_3]$, то в алгоритме предусмотрены дополнительные проверки. В случае знакопостоянства на шаге 3 алгоритма следует выполнять только пп. 3.1.1.2 или 3.2.1.2. Проведённые многочисленные расчёты в подавляющем большинстве случаев демонстрируют сокращение времени вычисления корня, но иногда может оказаться, что предлагаемая модификация не даёт улучшения сходимости в сравнении с обычным методом парабол: количество построенных парабол для вычисления значения корня с компьютерной точностью примерно одинаково в обоих случаях и даже изредка в методе без модификации на одно-два построения парабол может быть меньше. Однако при использовании обычного метода парабол иногда может случиться так, что сужение интервала локализации искомого корня функции происходит очень медленно, например, если на каждом шаге значения функции в точках, являющихся корнями парабол, всегда оказываются одного знака. Тогда предлагаемая модификация метода парабол приводит к существенному уменьшению числа итераций.

Пример. Задана функция $f(x) = xe^x - 10$ с интервалом локализации корня $[-10, 10]$. Корень функции $f(x)$, равный $1.7455280027407\ldots$, на компьютере обычным методом парабол находится за 68 шагов, если в качестве начальных точек для параболы взять границы отрезка и его середину, причём правая граница локализации корня за всё время вычислений осталась неизменной. Даже метод половинного деления для этого примера потребует всего лишь 50 шагов.

Посмотрим, что даёт предлагаемая модификация. Кроме граничных точек -10 и 10, в которых заданная функция имеет разные знаки, нам нужны ещё две точки с разными знаками рассматриваемой функции. В качестве одной из них естественно взять середину исходного промежутка $x = 0$, значение в ней отрицательно. Другая также может быть взята как середина нового промежутка локализации корня, т. е. $x = 5$. Теперь требуется всего 13 шагов, т. е. 26 построений парабол.

В следующем разделе описана практическая задача, где использован предложенный алгоритм. На практике довольно часто исследуемая функция представлена кубическим сплайном, следовательно, у такой функции третья производная является кусочно-постоянной, что почти всегда ведёт к выполнению условий теоремы.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ГИДРОТУРБИНЫ

Турбина гидроэлектрических станций (ГЭС) использует потенциальную энергию воды, расположенной на разных высотах над уровнем моря. Мощность потока воды зависит от её количества и напора и определяется из общих законов механики. Эта мощность, отбираемая турбиной от протекающей жидкости, передаётся валу, и механическая энергия вращения вала далее преобразуется электрогенератором в электрическую. Однако не вся мощность жидкости будет передана валу и может быть использована, так как в самой турбоустановке имеются потери, учитываемые функцией эффективности турбины, т. е. коэффициентом полезного действия (КПД). Конечно же основной задачей при строительстве ГЭС является минимизация потерь мощности или задача увеличения эффективности, т. е. повышения КПД. В современных гидравлических турбинах величина КПД достигает 92–93% и выше (до 96%) [11].

Главным элементом турбины является рабочее колесо, в котором и осуществляется преобразование энергии за счёт взаимодействия потока жидкости с лопастями рабочего колеса. Поэтому вид турбины в основном определяется формой рабочего колеса и условиями движения жидкости в его лопастной системе. Большой накопленный опыт, как правило, позволяет определиться с типом гидротурбин для каждого конкретного случая.

Гидротурбины одной системы могут отличаться размерами, конструкцией механизмов, конфигурацией проточного тракта. Все эти различия определяют индивидуальные свойства турбины, в первую очередь её КПД. Зависимости КПД, кавитационного коэффициента и некоторых других функций от основных параметров (диаметр рабочего колеса, частота вращения, расход воды, напор) на различных режимах работы являются основными характеристиками турбины, они определяют все необходимые показатели турбин для различных условий её работы.

Однако такие данные для натурной гидротурбины, устанавливаемой на ГЭС при строительстве, получить заранее невозможно, но их можно получить для геометрически подобной модельной турбины при её испытаниях и исследованиях на лабораторных стендах. При лабораторных испытаниях на модели необходимо выдерживать требования закона подобия, должны соблюдаться геометрическое, кинетическое и динамическое подобия. Требования всех критериев подобия соблюсти трудно, в частности, практически неосуществимо условие равенства чисел Рейнольдса в натурной турбине и на модели. В то же время практический опыт показывает, что остающиеся различия оказывают малое влияние на различие в индивидуальных свойствах и основных характеристиках модели и натуры, и экспериментально разработаны методики пересчёта всех параметров, учитывающие масштабный эффект [12, 13].

Основным документом для выбора основных параметров натурной гидротурбины является так называемая главная универсальная характеристика или просто универсальная характеристика, представляющая изображение линий равных значений функции эффективности η в плоскости координат $Q'_I - n'_I$ (приведённые величины расхода воды и частоты вращения), с нанесением линий равных значений величины открытия направляющего аппарата a_0 и кавитационного коэффициента σ. Если турбина поворотно-лопастная (ПЛ), то наносятся ещё линии угла поворота лопастей φ. На рис. 2 приведён пример универсальной характеристики ПЛ-турбины, взятый из [14].

Вопросы построения функции эффективности η для создания математической модели универсальной характеристики рабочего колеса радиально осевой и ПЛ-гидротурбины по результатам энергетических испытаний модельной гидротурбины на лабораторном стенде рассматривались в работах [15, 16]. В основе рассмотренной методики лежит подход сплайн-аппроксимации многомерных хаотически расположенных данных с помощью радиальных базисных функций, который показал хорошие результаты и в других задачах, связанных с многомерной аппроксимацией [17, 18]. Построенная функция эффективности η в виде так называемых D^m-сплайна или натурального сплайна, иногда также называемых полигармоническими

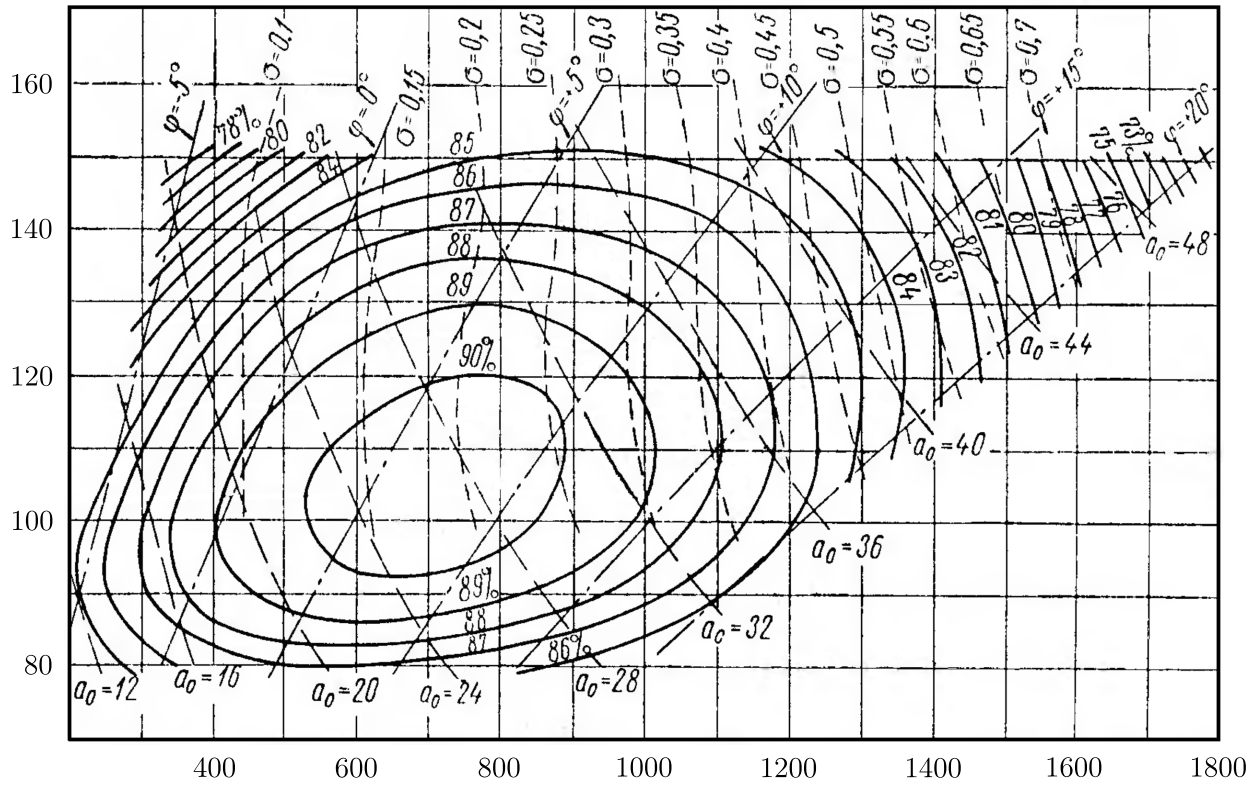

Рис. 2. Главная универсальная характеристика ПЛ-турбины [14]

сплайнами или псевдополиномиальными (см., например, [19–21]), используется в расчётах для создания основного документа, изображённого на рис. 2.

Для математического моделирования универсальной характеристики гидротурбины и решения необходимых задач разработан комплекс программ УХ, в котором для построения изолиний при поиске корня функции используется именно модифицированный метод парабол, что позволило сократить время расчёта изолиний примерно на 8%. Созданный комплекс программ УХ принят в промышленную эксплуатацию на АО «Ленинградский металлический завод».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модификация метода парабол для поиска корня непрерывной функции, которая основана на рассмотрении положения параболы, интерполирующей исходную функцию относительно этой функции. Указано, когда две параболы, интерполирующие значения функции, будут лежать по разные стороны от заданной функции. Показано, что построение двух парабол позволяет существенно сузить интервал локализации корня и уменьшить количество шагов для вычисления корня. Приведена практическая задача, в которой предложенная модификация метода парабол позволяет повысить эффективность расчёта изолиний при моделировании универсальной характеристики гидротурбин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Островский А.М.* Решение уравнений и систем уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бином, 2012.
3. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1966.

4. *Воеводин В.В.* Численные методы алгебры (теория и алгорифмы). М.: Наука, 1966.
5. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
6. *Costabile F., Gualtieri M.I., Luceri R.* A modification of Muller's method // Calcolo. 2006. V. 43, N 1. P. 39–50.
7. *Gemechu T., Thota S.* On new root finding algorithms for solving nonlinear transcendental equations // Internat. J. Chem. Math. Phys. 2020. V. 4, N 2. P. 18–24.
8. *Cordero A., Garrido N., Torregrosa J.R., Triguero—Navarro P.* Iterative schemes for finding all roots simultaneously of nonlinear equations // Appl. Math. Lett. 2022. V. 134. Article 108325.
9. *Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В.* Вычисление корней уравнения и определение их кратности // Мат. моделирование. 2010. Т. 22, № 7. С. 33–52.
10. *Intep S.* A review of bracketing methods for finding zeros of nonlinear functions // Appl. Math. Sci. 2018. V. 12, N 3. P. 137–146.
11. *Ковалёв Н.Н.* Гидротурбины. Конструкции и вопросы проектирования. Л.: Машиностроение, 1971.
12. *Барлит В.В.* Гидравлические турбины. Киев: Вища школа, 1977.
13. *Кривченко Г.И.* Гидравлические машины: турбины и насосы. М.: Энергоатомиздат, 1983.
14. *Бронштейн Л.Я., Герман А.Н., Гольдин В.Е. и др.* Справочник конструктора гидротурбин. Л.: Машиностроение, 1971.
15. *Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л.* Построение математической модели универсальной характеристики радиально-осевой гидротурбины // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 77–88.
16. *Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л., Салиенко А. Е.* Математическое моделирование универсальной характеристики поворотно-лопастной гидротурбины // Машинное обучение и анализ данных. 2014. Т. 1, № 10. С. 1439–1450.
17. *Bogdanov V.V., Karsten W.V., Miroshnichenko V.L., Volkov Yu.S.* Application of splines for determining the velocity characteristic of a medium from a vertical seismic survey // Central European J. Math. 2013. V. 11, N. 4. P. 779–786.
18. *Аниконов Ю.Е., Богданов В.В., Волков Ю.С., Деревцов Е.Ю.* Об определении скоростных и упругих параметров среды фокальной зоны по годографам от землетрясений // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 4. С. 1–18.
19. *Wendland H.* Scattered Data Approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
20. *Игнатов М.И., Певный А.Б.* Натуральные сплайны многих переменных. Л.: Наука, 1991.
21. *Schaback R.* Native Hilbert Spaces for Radial Basis Functions. I. New Developments in Approximation Theory. Basel: Birkhauser, 1999. P. 255—282.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.65

A MODIFIED QUADRATIC INTERPOLATION METHOD FOR ROOT FINDING

© 2023 **V. V. Bogdanov[a], Yu. S. Volkov[b]**

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]bogdanov@math.nsc.ru, [b]volkov@math.nsc.ru

Received 27.04.2023, revised 26.05.2023, accepted 07.06.2023

Abstract. A modification of the quadratic interpolation method for finding the root of a continuous function is proposed. Two quadratic interpolation polynomials are simultaneously constructed. It is shown that if the third derivative of the original function does not change sign on the considered interval of localization of the required root, then the root lies between the roots of the quadratic functions. This allows to significantly narrow the localization interval and reduce the number of steps to calculate the root with a given accuracy. The proposed modification of the quadratic interpolation method is used in the problem of calculating isolines when modeling the hill diagram of hydraulic turbines.

Keywords: quadratic interpolation, modeling, efficiency function of a hydraulic turbine, spline, multidimensional approximation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.301

REFERENCES

1. Ostrowski A.M. Solution of equations and systems of equations. N. Y.: Academ. Press, 1960.
2. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow: Binom, 2012 (in Russian).
3. Berezin I.S., Zhidkov N.P. Computing Methods. Vol. 1. Oxford: Pergamon Press, 1965.
4. Voevodin V.V. Chislennye metody algebry (teoria i algorifmy) [Numerical methods of algebra (theory and algorithms)]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
5. Kalitkin N.N. Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
6. Costabile F., Gualtieri M.I., Luceri R. A modification of Muller's method. *Calcolo*, 2006, Vol. 43, No. 1, pp. 39–50.
7. Gemechu T., Thota S. On new root finding algorithms for solving nonlinear transcendental equations. *Internat. J. Chem., Math. Phys.*, 2020, Vol. 4, No. 2, pp. 18–24.
8. Cordero A., Garrido N., Torregrosa J.R., Triguero—Navarro P. Iterative schemes for finding all roots simultaneously of nonlinear equations. *Appl. Math. Lett.*, 2022, Vol. 134, article 108325.
9. Kalitkin N.N., Kuz'mina L.V. Calculation of roots and there multiplicity for nonlinear equation. *Math. Models Comput. Simul.*, 2011, Vol. 3, No. 1, pp. 65–80.
10. Intep S. A review of bracketing methods for finding zeros of nonlinear functions. *Appl. Math. Sci.*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 137–146.
11. Kovalev N.N. Gidroturbiny. Konstrukcii i voprosy proektirovanija [Hydraulic turbines. Constructions and design issues]. Leningrad: Mashinostroenie, 1971 (in Russian).
12. Barlit V.V. Gidravlicheskie turbiny [Hydraulic turbines]. Kiev: Vishcha shkola, 1977 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 3.

13. Krivchenko G.I. Gidravlicheskie mashiny: turbiny i nasosy [Hydraulic machines: turbines and pumps]. Moscow: Jenergoatomizdat, 1983 (in Russian).
14. Bronshtejn L.Ya., German A.N., Goldin V.E. and others. Spravochnik konstruktora gidroturbin [Handbook of the designer of hydraulic turbines]. Leningrad: Mashinostroenie, 1971 (in Russian).
15. Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L. Postroenie matematicheskoj modeli universal'noj harakteristiki radial'no-osevoj gidroturbiny [Development of a mathematical model of an universal characteristic a francis turbine] // *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 1988, Vol. 1, No. 1, pp. 77–88 (in Russian).
16. Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L., Salienko A.E. Matematicheskoe modelirovanie universal'noj harakteristiki povorotno-lopastnoj gidroturbiny [Mathematical modeling of hill diagram for Kaplan turbine]. *Machine Learning and Data Analysis*, 2014, Vol. 1, No. 10, pp. 1439–1450.
17. Bogdanov V.V., Karsten W.V., Miroshnichenko V.L., Volkov Yu.S. Application of splines for determining the velocity characteristic of a medium from a vertical seismic survey. *Central European J. Math.*, 2013, Vol. 11, No. 4, pp. 779–786.
18. Anikonov Yu.E., Bogdanov V.V., Volkov Yu.S., Derevtsov E.Yu. On the Determination of the Velocity and Elastic Parameters of a Medium in the Focal Zone from Earthquake Hodographs. *J. Appl. Indust. Math.*, 2021, Vol. 24, No. 4, pp. 569–585.
19. Wendland H. Scattered Data Approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
20. Ignatov M.I., Pevnyi A.B. Natural'nye splajny mnogih peremennyh [Natural splines of many variables]. Leningrad: Nauka, 1991 (in Russian).
21. Schaback R. Native Hilbert Spaces for Radial Basis Functions. I. New Developments in Approximation Theory. Basel: Birkhauser, 1999, pp. 255–282.