УДК 531.36

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ГИРОСТАТА ГОРЯЧЕВА — СРЕТЕНСКОГО

© 2023 **А. А. Косов**[a], **Э. И. Семенов**[b]

Институт динамики систем и теории управления
им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, г. Иркутск 664033, Россия

E-mails: [a]kosov_idstu@mail.ru, [b]edwseiz@gmail.com

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.; после доработки 05.06.2023 г.;
принята к публикации 07.06.2023 г.

Изучаются уравнения движения гиростата Горячева — Сретенского. Найдены все стационарные решения на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей и проведён анализ их устойчивости. Для случая совпадения точки подвеса с центром масс и действия гироскопического момента специального вида выполнено интегрирование в квадратурах.

Ключевые слова: гиростат Горячева — Сретенского, стационарные решения, устойчивость, интегрирование в квадратурах.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.305

ВВЕДЕНИЕ

В динамике твёрдого тела с неподвижной точкой важное значение имеют как классические случаи полной интегрируемости (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), так и случаи частичной интегрируемости, когда удаётся получить дополнительный частный интеграл [1–3]. Один из таких частично интегрируемых случаев для уравнений движения тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки был найден Д. Н. Горячевым [4], который показал существование четвёртого по счёту интеграла на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей. Интегрирование дифференциальных уравнений движения с использованием этого интеграла было выполнено С. А. Чаплыгиным [5], установившим, что решения в общем случае представляются гиперэллиптическими функциями времени. Эти результаты были распространены Л. Н. Сретенским [6] на более общие по сравнению с твёрдым телом уравнения движения гиростата, содержащие дополнительный параметр — вектор гиростатического момента.

Исследования случая Горячева — Чаплыгина для твёрдого тела и гиростата Горячева — Сретенского, а также их аналогов и обобщений успешно продолжаются и в настоящее время по нескольким направлениям. Изучались [7] эргодические свойства решений волчка Горячева — Чаплыгина, показано, что собственное вращение и прецессия обладают главным движением, а нутация является квазипериодической функцией времени. Были установлены [8] свойства движения линии узлов для волчка Горячева — Чаплыгина. Обобщение случая Горячева-Чаплыгина, где в гамильтониане присутствует ряд новых дополнительных параметров, изучалось в [2], при этом сохраняется вывод об интегрируемости на нулевом уровне интеграла площадей. Доказана [9] периодичность движений тела в случае Горячева при малых значениях энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00819).

Были найдены [10] стационарные решения уравнений гиростата Горячева — Сретенского, лежащие на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей, но анализ их устойчивости не проводился. Изучалась [11] орбитальная устойчивость периодических движений твёрдого тела в случае Горячева — Чаплыгина показана их неустойчивость в первом приближении. Затем эта неустойчивость была подтверждена [12] и в строгой нелинейной постановке применением теоремы Четаева.

Объектом исследования в данной статье являются уравнения движения гиростата Горячева — Сретенского. Статья организована следующим образом. В разд. 1 приводятся уравнения движения, их первые интегралы и формулируются цели и задачи исследования. В разд. 2 найдены все стационарные решения, лежащие в множестве нулевого уровня интеграла площадей. В разд. 3 получены условия устойчивости найденных стационарных решений. В разд. 4 рассматривается случай совпадения точки подвеса с центром масс, но при этом действуют гироскопические моменты специального вида. Выполнено интегрирование уравнений движения в квадратурах, приведены примеры явного представления решений элементарными или специальными функциями времени. В заключении кратко отмечены возможные направления развития полученных результатов.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим векторную форму уравнений движения гиростата с неподвижной точкой под действием момента сил

$$I\dot{\omega} = (I\omega + \lambda) \times \omega + M, \tag{1}$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \tag{2}$$

Здесь $\omega = \operatorname{col}\{p, q, r\}$ — вектор угловой скорости, $\gamma = \operatorname{col}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ — единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат, $I = I^T > 0$ — симметричная положительно определённая матрица тензора инерции относительно неподвижной точки, $\lambda = \operatorname{col}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ — вектор гиростатического момента, $M = M(t, \gamma, \omega)$ — вектор момента сил, действующих на гиростат. Будем, следуя [13–15], рассматривать в качестве первых интегралов следующие функции:

$$J_1 = J_1(\gamma, \omega) = \omega^T I\omega + 2U(\gamma) = c_1 = \text{const}, \tag{3}$$

$$J_2 = J_2(\gamma, \omega) = \gamma^T (I\omega + \lambda) + \frac{1}{2}\gamma^T S\gamma = c_2 = \text{const}, \tag{4}$$

$$J_3 = J_3(\gamma) = \gamma^T \gamma = 1, \tag{5}$$

где $S = S^T$ — некоторая симметричная матрица.

Отметим, что геометрический интеграл (5) имеет место при любом выборе момента $M = M(t, \gamma, \omega)$. Но для того чтобы у системы (1), (2) существовали интеграл энергии (3) и интеграл площадей (4), момент $M = M(t, \gamma, \omega)$ не может быть произвольным, а должен удовлетворять определённым условиям. Эти необходимые и достаточные условия даются следующим утверждением, доказанным в [16].

Утверждение 1. *Для того чтобы функции* (3) *и* (4) *были первыми интегралами для системы* (1), (2), *необходимо и достаточно, чтобы момент M был представим в виде*

$$M = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} - \omega \times S\gamma + L(t, \gamma, \omega)\omega \times \gamma, \tag{6}$$

где $L(t, \gamma, \omega)$ — произвольная функция.

Данное утверждение показывает, что первые интегралы (3) и (4) определяют момент M в правой части (1) единственным образом с точностью до циркулярно-гироскопической составляющей $L(t,\gamma,\omega)\omega\times\gamma$. Первые два слагаемых в формуле момента (6) представляют собой соответственно момент потенциальных сил $\gamma\times\dfrac{\partial U}{\partial\gamma}$ с потенциалом $U(\gamma)$ и момент гироскопических сил $\omega\times S\gamma$, определяемый матрицей S.

Далее всюду будем считать матрицу инерции диагональной $I=\operatorname{diag}(A,B,C)$, потенциал линейным $U(\gamma)=a\gamma_1+b\gamma_2+c\gamma_3$ (это соответствует тяжёлому твёрдому телу) и задающую момент гироскопических сил матрицу также диагональной $S=\operatorname{diag}(k_1,k_2,k_3)$. Запишем систему (1), (2) в координатной форме:

$$
\begin{aligned}
A\dot p&=(B-C)qr+\lambda_2 r-\lambda_3 q+c\gamma_2-b\gamma_3+k_2\gamma_2 r-k_3\gamma_3 q+L(q\gamma_3-r\gamma_2),\\
B\dot q&=(C-A)pr+\lambda_3 p-\lambda_1 r+a\gamma_3-c\gamma_1+k_3\gamma_3 p-k_1\gamma_1 r+L(r\gamma_1-p\gamma_3),\\
C\dot r&=(A-B)pq+\lambda_1 q-\lambda_2 p+b\gamma_1-a\gamma_2+k_1\gamma_1 q-k_2\gamma_2 p+L(p\gamma_2-q\gamma_1),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\dot\gamma_1=r\gamma_2-q\gamma_3,\quad \dot\gamma_2=p\gamma_3-r\gamma_1,\quad \dot\gamma_3=q\gamma_1-p\gamma_2. \tag{8}
$$

Здесь $L(t,\gamma,\omega)$ — некоторая непрерывная функция по t, γ, ω.

Далее считаем, что моменты инерции и потенциал удовлетворяют условиям Горячева [4]

$$
A=B=4C,\quad b=c=0. \tag{9}
$$

а вектор гиростатического момента удовлетворяет условиям Сретенского [6]

$$
\lambda_1=\lambda_2=0. \tag{10}
$$

В качестве объекта исследования мы будем рассматривать систему (7), (8) при предположениях (9), (10), причём в двух вариантах. В первом варианте считается, что моменты гироскопических и циркулярно-гироскопических сил не действуют, т. е. $k_1=k_2=k_3=0$ и $L(t,\gamma,\omega)\equiv 0$. Тогда уравнения (7) совпадают с уравнениями гиростата Горячева — Сретенского [6]

$$
4C\dot p=3Cqr-\lambda_3 q,\quad 4C\dot q=-3Cpr+\lambda_3 p+a\gamma_3,\quad C\dot r=-a\gamma_2. \tag{11}
$$

Для системы (8), (11) первые интегралы (3) и (4) записываются в виде

$$
J_1=4C(p^2+q^2)+Cr^2+2a\gamma_1=c_1=\mathrm{const}, \tag{12}
$$

$$
J_2=4C(p\gamma_1+q\gamma_2)+\gamma_3(Cr+\lambda_3)=c_2=\mathrm{const}\,. \tag{13}
$$

В [6] установлено, что на инвариантном множестве $J_2=0$, задаваемом нулевым уровнем интеграла площадей (13), система (8), (11) имеет первый интеграл

$$
J_4=(Cr-\lambda_3)(p^2+q^2)-ap\gamma_3=c_4=\mathrm{const} \tag{14}
$$

с произвольной постоянной $c_4=\mathrm{const}$. Наличие четырёх известных первых интегралов (5), (12)–(14) позволяет выполнить на множестве $J_2=0$ интегрирование в квадратурах [6]. Однако выяснение поведения решений, расположенных на множестве $J_2=0$, и их свойства устойчивости, в том числе и по отношению к близким решениям, лежащим вне этого множества, представляют несомненный интерес.

Во втором варианте считается, что действуют моменты гироскопических сил с $k_1=k_2=k$ и циркулярно-гироскопических сил с $L=L(\gamma_3)\neq 0$, но центр масс гиростата совпадает с точкой подвеса и, значит, $a=0$. Тогда уравнения (7) примут вид

$$
\begin{aligned}
4C\dot p&=3Cqr-\lambda_3 q+k\gamma_2 r-k_3\gamma_3 q+L(q\gamma_3-r\gamma_2),\\
4C\dot q&=-3Cpr+\lambda_3 p+k_3\gamma_3 p-k\gamma_1 r+L(r\gamma_1-p\gamma_3),\\
C\dot r&=k\gamma_1 q-k\gamma_2 p+L(p\gamma_2-q\gamma_1).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Отметим, что момент вида $L\omega \times \gamma$, $L = \mathrm{const}$ возникает при вращении ферромагнитного тела в постоянном и однородном магнитном поле [17].

Задачи исследования в данной статье состоят в том, чтобы:

1) выявить все стационарные решения, которые лежат в множестве нулевого уровня $J_2 = 0$ интеграла площадей (13) и задаются постоянными, обращающими правые части уравнений движения (8), (11) в нуль;

2) используя первые интегралы (5), (12), (13), получить методом интегральных связок Четаева [18] условия устойчивости либо первым методом Ляпунова условия неустойчивости по отношению ко всем переменным для стационарных решений, являющихся состояниями покоя;

3) используя вместе с интегралами (5), (12), (13) также и условный интеграл (4), тем же методом связок Четаева получить достаточные условия условной устойчивости относительно множества $J_2 = 0$ для стационарных решений системы (8), (11), являющихся перманентными вращениями;

4) для случая отсутствия момента потенциальных сил при действии момента гироскопических и циркулярно-гироскопических сил специального вида выполнить интегрирование системы (8), (15) в квадратурах;

5) построить примеры точных решений системы (8), (15), представленные в явном виде элементарными или специальными функциями.

2. ПОСТРОЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ $J_2 = 0$

Стационарные решения (т. е. такие постоянные $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3) = \mathrm{const}$, которые обращают правые части в нуль), лежащие на инвариантном множестве $J_2 = 0$, для приведённой к безразмерной форме (в которой только один параметр λ_3, а остальные параметры C и a можно считать равными единице) системы (8), (11) были найдены в [10]. Анализ устойчивости стационарных решений при этом не проводился. В этом разделе статьи получим все стационарные решения системы (8), (11), лежащие в множестве $J_2 = 0$, выраженные в явном виде через все параметры C, a, λ_3. Это позволит в дальнейшем выявить влияние всех параметров на устойчивость стационарных решений.

Легко видеть, что для всех стационарных решений выполняются равенства $\bar{q} = \bar{\gamma}_2 = 0$. Для других компонент стационарного решения, лежащего на инвариантном множестве $J_2 = 0$, получаем систему трёх уравнений

$$-3C\bar{p}\bar{r} + \lambda_3\bar{p} + a\bar{\gamma}_3 = 0, \quad \bar{p}\bar{\gamma}_3 - \bar{r}\bar{\gamma}_1 = 0, \quad 4C\bar{p}\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_3(C\bar{r} + \lambda_3) = 0. \tag{16}$$

Из (16) сразу следует, что стационарными решениями системы (8), (11) будут два положения покоя (на них все компоненты угловой скорости равны нулю)

$$\bar{p} = \bar{q} = \bar{r} = \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_3 = 0, \quad \bar{\gamma}_1 = \sigma = \pm 1. \tag{17}$$

Из второго и третьего уравнений системы (16) с учётом геометрического интеграла (5) находим

$$\bar{\gamma}_3^2 = \frac{4C\bar{r}}{3C\bar{r} - \lambda_3}, \tag{18}$$

а из первого уравнения (16) следует

$$\bar{p} = \frac{a\bar{\gamma}_3}{3C\bar{r} - \lambda_3}. \tag{19}$$

Умножая (19) на $\bar{\gamma}_3$ и используя (18) и второе уравнение (16), получим уравнение для нахождения $\bar{r}$:

$$\frac{4aC}{(3C\bar{r} - \lambda_3)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{4C\bar{r}}{3C\bar{r} - \lambda_3}}.$$

Это уравнение сводится к отысканию корней полинома четвёртой степени

$$F_4(\bar{r}) = (C\bar{r} + \lambda_3)(3C\bar{r} - \lambda_3)^3 + 16a^2C^2 = 0,$$

удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant \frac{4C\bar{r}}{3C\bar{r} - \lambda_3} \leqslant 1, \quad \frac{C\bar{r} + \lambda_3}{3C\bar{r} - \lambda_3} \leqslant 0. \tag{20}$$

Дискриминант полинома $F_4(\bar{r})$ равен $D_4 = 128995088\big(16a^2C^2 - 9\lambda_3^4\big)$. Если параметры системы удовлетворяют неравенству

$$16a^2C^2 - 9\lambda_3^4 > 0, \tag{21}$$

то дискриминант положителен, значит, все четыре корня полинома $F_4(\bar{r})$ различны и либо все вещественные, либо все комплексные. Первый случай исключается тем фактом, что производная полинома $F_4(\bar{r})$ имеет кратный корень. Таким образом, при условии (21) система (8), (11) не имеет на множестве $J_2 = 0$ других стационарных решений, кроме состояний покоя (17).

Если параметры системы удовлетворяют равенству $16a^2C^2 - 9\lambda_3^4 = 0$, то полином $F_4(\bar{r})$ имеет двукратный корень $\bar{r} = -2\lambda_3/(3C)$ и соответствующие стационарные решения находятся в явном виде. При $a = -3\lambda_3^2/(4C) < 0$ система (8), (11) имеет два стационарных решения:

$$\bar{p} = \pm\frac{\lambda_3\sqrt{2}}{6C}, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{r} = -\frac{2\lambda_3}{3C}, \quad \bar{\gamma}_1 = -\frac{1}{3}, \quad \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}. \tag{22}$$

При $a = 3\lambda_3^2/(4C) > 0$ система (8), (11) также имеет два стационарных решения:

$$\bar{p} = \mp\frac{\lambda_3\sqrt{2}}{6C}, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{r} = -\frac{2\lambda_3}{3C}, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}. \tag{23}$$

Если параметры системы удовлетворяют неравенству

$$16a^2C^2 - 9\lambda_3^4 < 0, \tag{24}$$

то полином $F_4(\bar{r})$ имеет два различных вещественных корня и для получения стационарных решений по формулам (18), (19) и (16) необходимо отбирать только те из корней, для которых выполнены неравенства (20).

Например, при значениях параметров $a = C = 1$, $\lambda_3 = 3/2$ полином $F_4(\bar{r})$ имеет два вещественных корня, которые оба удовлетворяют неравенствам (20) и порождают четыре стационарных решения системы (8), (11), лежащих на множестве $J_2 = 0$. А для значений параметров $a = C = 1$, $\lambda_3 = 2$ условиям (20) удовлетворяет только один корень полинома $F_4(\bar{r})$, который порождает два стационарных решения.

Таким образом, при условии (24) на инвариантном множестве $J_2 = 0$ имеется либо два, либо четыре стационарных решения, являющихся, как и решения (22) и (23), перманентными вращениями (на них все компоненты вектора угловой скорости постоянны).

По отношению к неподвижной системе координат стационарные решения (17) означают состояния покоя, в которых центр масс гиростата занимает нижнее или верхнее положение. Другие стационарные решения $(\bar{p}, 0, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, 0, \bar{\gamma}_3)$ соответствуют перманентным вращениям с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = \bar{p}/\bar{\gamma}_1 = \bar{r}/\bar{\gamma}_3$ вокруг вертикальной оси, положение которой в связанной системе координат задаётся вектором с компонентами $(\bar{\gamma}_1, 0, \bar{\gamma}_3)$.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Перейдём теперь к анализу устойчивости стационарных решений. Введём обозначения для отклонений от невозмущённого стационарного движения:

$$x_1 = p - \bar{p}, \quad x_2 = q - \bar{q}, \quad x_3 = r - \bar{r}, \quad x_4 = \gamma_1 - \bar{\gamma}_1, \quad x_5 = \gamma_2 - \bar{\gamma}_2, \quad x_6 = \gamma_3 - \bar{\gamma}_3.$$

В этих переменных интегралы уравнений возмущённого движения для положений покоя (17) выпишутся следующим образом:

$$J_1 - \bar{J}_1 = 4C\big(x_1^2 + x_2^2\big) + Cx_3^2 + 2ax_4, \quad J_3 - \bar{J}_3 = 2\sigma x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2.$$

Здесь и далее $\bar{J}_i$ означает значение выбранного интеграла на невозмущённом движении. Функцию Ляпунова по методу Четаева [18] строим в виде связки (линейной комбинации) интегралов

$$V(x) = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_3(J_3 - \bar{J}_3).$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем число α_3 следующим образом: $\alpha_3 = -a\sigma$, тогда функция $V(x)$ будет квадратичной формой

$$V(x) = 4C\big(x_1^2 + x_2^2\big) + Cx_3^2 - a\sigma\big(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\big).$$

В случае $\sigma = -\operatorname{sign}(a)$ эта квадратичная форма является положительно определённой по отношению ко всем переменным $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_6)$. Тем самым доказано следующее

Утверждение 2. *Состояние покоя* (17)*, соответствующее значению* $\sigma = -\operatorname{sign}(a)$*, устойчиво по Ляпунову.*

Для анализа устойчивости второго состояния покоя (17), которому соответствует $\sigma = \operatorname{sign}(a)$, воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Для этого состояния покоя характеристическое уравнение линейного приближения имеет вид

$$z^2(z^4 + a_2 z^2 + a_0) = 0, \tag{25}$$

где

$$a_2 = \frac{\lambda_3^2 - 20C|a|}{16C^2}, \quad a_0 = \frac{|a|(4C|a| - \lambda_3^2)}{16C^3}. \tag{26}$$

Для того чтобы уравнение (25) не имело корней с положительной вещественной частью, оба коэффициента (26) должны быть неотрицательны, что приводит к противоречивым условиям $\lambda_3^2 \geqslant 20C|a|$, $4C|a| \geqslant \lambda_3^2$. Это означает, что один из коэффициентов (26) отрицателен и уравнение (25) имеет корень с положительной вещественной частью. Тем самым доказано следующее

Утверждение 3. *Состояние покоя* (17)*, соответствующее значению* $\sigma = \operatorname{sign}(a)$*, неустойчиво по Ляпунову.*

Перейдём теперь к анализу устойчивости стационарных решений, являющихся перманентными вращениями. В этом случае интегралы уравнений возмущённого движения записываются в виде

$$\begin{gathered}
J_1 - \bar{J}_1 = 8C\bar{p}x_1 + 2C\bar{r}x_3 + 2ax_4 + 4C\big(x_1^2 + x_2^2\big) + Cx_3^2,\\
J_2 - \bar{J}_2 = 4C\bar{\gamma}_1 x_1 + C\bar{\gamma}_3 x_3 + 4C\bar{p}x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3)x_6 + 4Cx_1x_4 + 4Cx_2x_5 + Cx_3x_6,\\
J_3 - \bar{J}_3 = 2\bar{\gamma}_1 x_4 + 2\bar{\gamma}_3 x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2,\\
J_4 - \bar{J}_4 = (2\bar{p}(C\bar{r} - \lambda_3) - a\bar{\gamma}_3)x_1 + C\bar{p}^2 x_3 - a\bar{p}x_6 + (C\bar{r} - \lambda_3)\big(x_1^2 + x_2^2\big) - ax_1x_6 + o(\|x\|^2).
\end{gathered}$$

Для анализа устойчивости перманентных вращений будем использовать все четыре интеграла, в том числе условный интеграл J_4. Поэтому будут получены достаточные условия устойчивости только относительно инвариантного множества $J_2 = 0$, т. е. условной устойчивости.

Функцию Ляпунова по методу Четаева [18] строим в виде связки интегралов

$$V(x) = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_2(J_2 - \bar{J}_2) + \alpha_3(J_3 - \bar{J}_3) + \alpha_4(J_4 - \bar{J}_4) + \beta_2(J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2 + \beta_4(J_4 - \bar{J}_4)^2.$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке числа α_2 и α_3 выберем следующим образом:

$$\alpha_2 = -\frac{\bar{p}^2}{\bar{\gamma}_3}\,\alpha_4 - \frac{2\bar{r}}{\bar{\gamma}_3}, \quad \alpha_3 = \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2} + \left(\frac{a\bar{p}}{2\bar{\gamma}_3} + \frac{\bar{p}^2(C\bar{r} + \lambda_3)}{2\bar{\gamma}_3^2}\right)\alpha_4.$$

При этом число α_4 будем рассматривать как свободный параметр, значение которого можно выбирать с целью обеспечения положительной определённости связки интегралов. Тогда квадратичную часть функции Ляпунова можно записать в виде

$$V_2(x) = V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6) + V_{25}(x_2, x_5) + \beta_2(J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2 + \beta_4(J_4 - \bar{J}_4)^2,$$

где

$$V_{25}(x_2, x_5) = (4C + \alpha_4(C\bar{r} - \lambda_3))x_2^2 + 4\alpha_2 C x_2 x_5 + \alpha_3 x_5^2,$$

$$V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6) = (4C + \alpha_4(C\bar{r} - \lambda_3))x_1^2 + Cx_3^2 + \alpha_2(4Cx_1x_4 + Cx_3x_6) + \alpha_3\bigl(x_4^2 + x_6^2\bigr) - \alpha_4 a x_1 x_6.$$

Так как положительные числа β_2, β_3 и β_4 можно брать как угодно большими, то для положительной определённости квадратичной части функции Ляпунова необходимо и достаточно [19], чтобы квадратичная форма $V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6) + V_{25}(x_2, x_5)$ была положительно определённой на линейном множестве

$$\Theta = \{\bar{\gamma}_1 x_4 + \bar{\gamma}_3 x_6 = 0,\ 4C\bar{\gamma}_1 x_1 + C\bar{\gamma}_3 x_3 + 4C\bar{p}x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3)x_6 = 0, (2\bar{p}(C\bar{r} - \lambda_3) - a\bar{\gamma}_3)x_1 + C\bar{p}^2 x_3 - a\bar{p}x_6 = 0\}.$$

Поскольку переменные x_2 и x_5 не входят в линейные ограничения Θ, то квадратичная форма $V_{25}(x_2, x_5)$ должна быть положительно определена, для чего в соответствии с критерием Сильвестра необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_{25}(\alpha_4) = m_2\alpha_4^2 + m_1\alpha_4 + m_0 > 0, \tag{27}$$

где коэффициенты m_i квадратного трёхчлена $\Delta_{25}(\alpha_4)$ выражаются по явным формулам через параметры системы C, a, λ_3 и через компоненты исследуемого на устойчивость перманентного вращения $(\bar{p}, 0, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, 0, \bar{\gamma}_3)$.

На линейном множестве Θ переменные x_3, x_4, x_6 можно выразить через x_1. Тогда, подставляя эти выражения в квадратичную форму $V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6)$, на множестве Θ представим её как форму от одной переменной $V_{1346} = K(\alpha_4)x_1^2$, коэффициент которой K будет линейной функцией $K(\alpha_4) = n_1\alpha_4 + n_0$ свободного параметра α_4. Поэтому для положительной определённости формы $V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6)$ на множестве Θ необходимо и достаточно положительности $K(\alpha_4)$.

Поскольку $m_2 = -4C\bar{p}^4/\bar{\gamma}_3^2 < 0$, то для того чтобы существовало такое значение свободного параметра α_4, на котором одновременно выполнены неравенства $K(\alpha_4) > 0$ и (27), необходимо и достаточно, чтобы трёхчлен (27) имел два вещественных корня $\alpha_{41} < \alpha_{42}$ и чтобы для них выполнялось неравенство

$$\max\{K(\alpha_{41}), K(\alpha_{42})\} > 0. \tag{28}$$

Тем самым доказано

Утверждение 4. *Каждое перманентное вращение, для которого выполнено неравенство* (28), *является условно устойчивым по Ляпунову относительно инвариантного множества* $J_2 = 0$.

Пример 1. Пусть параметры системы (8), (11) имеют значения $C = 1$, $\lambda_3 = 2$, $a = -3\lambda_3^2/4C = -3$. Тогда в соответствии с (22) система имеет два стационарных решения, являющихся перманентными вращениями:

$$\bar{p} = \pm\sqrt{2}/3, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{r} = -4/3, \quad \bar{\gamma}_1 = -1/3, \quad \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \pm 2\sqrt{2}/3. \tag{29}$$

Полином (27) для обоих стационарных решений (29) будет одинаковым:

$$\Delta_{25}(\alpha_4) = -\frac{2}{9}\,\alpha_4^2 - \frac{32}{3}\,\alpha_4 - 36,$$

поэтому $\alpha_{41} = -2 - 3\sqrt{46}$, $\alpha_{42} = -2 + 3\sqrt{46}$. Функции $K(\alpha_4)$ соответственно будут такими:

$$K(\alpha_4) = \frac{\mp 64}{9(3\sqrt{2} \pm 2)^2}((6\sqrt{2} \pm 11)\alpha_4 \mp 33).$$

Для обоих стационарных решений (29) получаем $\max\{K(\alpha_{41}), K(\alpha_{42})\} = 168,344\ldots > 0$, неравенство (28) выполнено. Поэтому в соответствии с утверждением 4 они оба являются условно устойчивыми по Ляпунову относительно инвариантного множества $J_2 = 0$.

В этом примере $\Delta_{25}(0) = -36 < 0$, поэтому построить положительно определённую связку Четаева из трёх интегралов J_1, J_2, J_3 невозможно. Характеристическое уравнение системы линейного приближения для стационара (29) имеет вид $z^4(z^2+3) = 0$, и корней с положительной вещественной частью у него нет. Поэтому вопрос о том, является ли условная устойчивость безусловной или же имеет место неустойчивость стационаров (29), в данном примере остаётся открытым.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ (8), (15) В КВАДРАТУРАХ

Система (8), (15) имеет четыре первых интеграла

$$J_1 = 4C(p^2 + q^2) + Cr^2 = c_1 \equiv \text{const}, \tag{30}$$

$$J_2 = 4C(p\gamma_1 + q\gamma_2) + (Cr + \lambda_3)\gamma_3 + \frac{1}{2}\big(k\gamma_1^2 + k\gamma_2^2 + k_3\gamma_3^2\big) = c_2 \equiv \text{const}, \tag{31}$$

$$J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \tag{32}$$

$$J_4 = Cr + \mathcal{L}(\gamma_3) = c_4 \equiv \text{const}, \tag{33}$$

где

$$\mathcal{L}(\gamma_3) = -k\gamma_3 + \int\limits_0^{\gamma_3} L(s)\,ds. \tag{34}$$

Из выражения для первого интеграла (33) имеем

$$r = \frac{1}{C}(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3)). \tag{35}$$

С учётом формулы (35) уравнения системы (8), (15) перепишем как

$$4C\dot{p} = f(\gamma_3)q - g(\gamma_3)\gamma_2, \tag{36}$$

$$4C\dot{q} = -f(\gamma_3)p + g(\gamma_3)\gamma_1, \tag{37}$$

$$\dot{\gamma_3} = q\gamma_1 - p\gamma_2, \tag{38}$$

$$\dot{\gamma_1} = \frac{1}{C}(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3))\gamma_2 - q\gamma_3, \tag{39}$$

$$\dot{\gamma_2} = p\gamma_3 - \frac{1}{C}(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3))\gamma_1, \tag{40}$$

где введены следующие обозначения:

$$f(\gamma_3) = 3(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3)) - \lambda_3 + (L(\gamma_3) - k_3)\gamma_3, \tag{41}$$

$$g(\gamma_3) = \frac{1}{C}(L(\gamma_3) - k)(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3)). \tag{42}$$

Введём полярные координаты (Ω, φ):

$$p = \Omega \cos\varphi, \quad q = \Omega \sin\varphi, \quad \text{где} \quad \Omega = \Omega(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

При этом из выражения для первого интеграла (30) находим

$$\Omega^2 = \frac{c_1}{4C} - \frac{1}{4C^2}(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3))^2. \tag{43}$$

Из соотношений (36), (37) имеем

$$4C\dot{\Omega}\cos\varphi - 4C\Omega\dot{\varphi}\sin\varphi = f(\gamma_3)\Omega\sin\varphi - g(\gamma_3)\gamma_2, \tag{44}$$

$$4C\dot{\Omega}\sin\varphi + 4C\Omega\dot{\varphi}\cos\varphi = -f(\gamma_3)\Omega\cos\varphi + g(\gamma_3)\gamma_1. \tag{45}$$

Складывая равенства (44), (45), умножив предварительно первое на $\cos\varphi$, второе на $\sin\varphi$, получим

$$4C\dot{\Omega} = g(\gamma_3)(\gamma_1 \sin\varphi - \gamma_2 \cos\varphi). \tag{46}$$

Теперь вычтем из (45), умножив его на $\cos\varphi$, равенство (44), умножив его на $\sin\varphi$. В итоге получим

$$4C\Omega\dot{\varphi} = -\Omega f(\gamma_3) + g(\gamma_3)(\gamma_1 \cos\varphi + \gamma_2 \sin\varphi). \tag{47}$$

Из выражения для первого интеграла (31) находим

$$4C\Omega(\gamma_1 \cos\varphi + \gamma_2 \sin\varphi) = W(\gamma_3), \tag{48}$$

где

$$W(\gamma_3) = c_2 - (c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3) + \lambda_3)\gamma_3 - \frac{1}{2}\big(k + (k_3 - k)\gamma_3^2\big). \tag{49}$$

Из равенств (47), (48) получим

$$\dot{\varphi} = -\frac{f(\gamma_3)}{4C} + \frac{g(\gamma_3)W(\gamma_3)}{16C^2\Omega^2}. \tag{50}$$

Таким образом, мы получили выражение для нахождения функции $\varphi(t)$ путём интегрирования правой части равенства (50), которая, с учётом формулы (43), зависит только от функции $\gamma_3(t)$.

Уравнение (38) перепишем как

$$\dot{\gamma_3} = \Omega(\gamma_1 \sin\varphi - \gamma_2 \cos\varphi). \tag{51}$$

Из соотношений (48), (51), рассматриваемых как система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных γ_1, γ_2, находим

$$\gamma_1 = \frac{W(\gamma_3)}{4C\Omega}\cos\varphi + \frac{\dot{\gamma_3}}{\Omega}\sin\varphi, \tag{52}$$

$$\gamma_2 = \frac{W(\gamma_3)}{4C\Omega}\sin\varphi - \frac{\dot{\gamma_3}}{\Omega}\cos\varphi. \tag{53}$$

Осталось получить дифференциальное уравнение для нахождения функции $\gamma_3(t)$. Для этого возведём в квадрат равенство (51)

$$\dot{\gamma}_3^2 = \Omega^2\big(\gamma_1^2 \sin^2\varphi + \gamma_2^2\cos^2\varphi - 2\gamma_1\gamma_2 \sin\varphi\cos\varphi\big). \tag{54}$$

Также возведём в квадрат выражение (48)

$$\gamma_1^2\cos^2\varphi + \gamma_2^2\sin^2\varphi + 2\gamma_1\gamma_2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{W^2(\gamma_3)}{16C^2\Omega^2}.$$

Выразим из этого соотношения слагаемое, содержащее смешанное произведение $\gamma_1\gamma_2$, и подставим его в формулу (54), которая примет вид

$$\dot{\gamma}_3^2 = \Omega^2\big(1-\gamma_3^2\big) - \frac{W^2(\gamma_3)}{16C^2}.$$

С использованием формул (43), (49) окончательно получим дифференциальное уравнение для нахождения функции $\gamma_3(t)$ следующего вида:

$$\dot{\gamma}_3^2 = P(\gamma_3)\mathcal{L}^2(\gamma_3) + Q(\gamma_3)\mathcal{L}(\gamma_3) + R(\gamma_3), \tag{55}$$

где $P(\gamma_3)$, $Q(\gamma_3)$, $R(\gamma_3)$ — многочлены от γ_3 соответственно второй, третьей и четвёртой степени:

$$P(\gamma_3) = -\frac{5\gamma_3^2}{16C^2} + \frac{\gamma_3}{2C^2} - \frac{1}{4C^2}, \quad Q(\gamma_3) = \frac{k_3-k}{16C^2}\,\gamma_3^3 + \frac{\lambda_3+5c_4}{8C^2}\,\gamma_3^2 + \frac{k-2c_2-16c_4}{16C^2}\,\gamma_3 + \frac{c_4}{2C^2},$$

$$\begin{aligned}R(\gamma_3) = -\frac{(k_3-k)^2}{64C^2}\,\gamma_3^4 - \frac{(c_4+\lambda_3)(k_3-k)}{16C^2}\,\gamma_3^3 \\ \left(-\frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C} + \frac{0.5(k-2c_2)(k_3-k)-(c_4+\lambda_3)^2}{16C^2}\right)\gamma_3^2 \\ + \left(\frac{c_4^2}{2C^2} - \frac{c_1}{2C} - \frac{(c_4+\lambda_3)(k-2c_2)}{16C^2}\right)\gamma_3 + \frac{c_1}{4C} - \frac{c_4^2}{4C^2} - \frac{(k-2c_2)^2}{64C^2}.\end{aligned}$$

Если квадратура (34) сводится к элементарной функции, то решение уравнения (55) сводится к квадратуре. В частности, этот случай реализуется тогда, когда функция $L(\gamma_3)$ является полиномом. Покажем на примерах, что в некоторых случаях решения могут быть получены в виде параметрических семейств, задаваемых в явной форме элементарными или специальными функциями времени.

5. ПРИМЕРЫ

Пример 2. Пусть $k=0$, $L(\gamma_3) = L \equiv \mathrm{const}$, $\mathcal{L}(\gamma_3) = L\gamma_3$. Тогда формулы (35), (43), (50), (52), (53) примут вид

$$r = \frac{1}{C}(c_4 - L\gamma_3), \quad \Omega^2 = \frac{c_1}{4C} - \frac{(c_4-L\gamma_3)^2}{4C^2},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(2L+k_3)\gamma_3 + \lambda_3 - 3c_4}{4C} + \frac{\Theta_1(\gamma_3)}{16C^2\Omega^2}, \tag{56}$$

$$\gamma_1 = \frac{\sin\varphi}{\Omega}\,\dot{\gamma}_3 + \frac{\cos\varphi}{4C\Omega}\,\Theta_2(\gamma_3), \quad \gamma_2 = -\frac{\cos\varphi}{\Omega}\,\dot{\gamma}_3 + \frac{\sin\varphi}{4C\Omega}\,\Theta_2(\gamma_3), \tag{57}$$

где введены обозначения

$$\Theta_1(\gamma_3) = -\frac{L^2(2L-k_3)}{2C}\gamma_3^3 + \frac{L(c_4(4L-k_3)+2L\lambda_3)}{2C}\gamma_3^2 - \frac{L\big(c_4^2+c_4\lambda_3+Lc_2\big)}{C}\gamma_3 + \frac{Lc_2c_4}{C},$$
$$\Theta_2(\gamma_3) = \frac{1}{2}(2L-k_3)\gamma_3^2 - (c_4+\lambda_3)\gamma_3 + c_2.$$

При этом уравнение (55) для функции γ_3 сводится к квадратуре

$$\Phi(\gamma_3) = t - t_0. \tag{58}$$

Здесь

$$\Phi(\gamma_3) = \int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{a_4\gamma_3^4 + a_3\gamma_3^3 + a_2\gamma_3^2 + a_1\gamma_3 + a_0}}\,, \tag{59}$$

где t_0 — константа интегрирования и введены следующие обозначения:

$$a_4 = \frac{4Lk_3 - 20L^2 - k_3^2}{64C^2}, \quad a_3 = \frac{L^2}{2C^2} + \frac{(\lambda_3+5c_4)L}{8C^2} - \frac{(c_4+\lambda_3)k_3}{16C^2},$$
$$a_2 = -\frac{c_2k_3 + (c_4+\lambda_3)^2 + 2(c_2+8c_4)L}{16C^2} - \frac{L^2}{4C^2} - \frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C},$$
$$a_1 = \frac{c_4L}{2C^2} + \frac{(c_4+\lambda_3)c_2}{8C^2} + \frac{c_4^2}{2C^2} - \frac{c_1}{2C}, \quad a_0 = -\frac{c_2^2}{16C^2} - \frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C}.$$

Интеграл в правой части равенства (59) в общем случае вычисляется в эллиптических функциях. Приведём пример, когда интеграл (59) вычисляется в элементарных функциях и при этом уравнение (58) разрешимо относительно γ_3. Пусть, например, выполнены условия $c_2 \neq 0$, $c_4 \neq 0$ и имеют место следующие равенства:

$$c_1 = \frac{c_2^2+4c_4^2}{4C}, \quad \lambda_3 = c_2 - c_4 - \frac{4c_4L}{c_2}, \quad k_3 = -\frac{2L\big(2L\big(c_2^2+4c_4^2\big)+(c_2+4c_4)c_2^2\big)}{c_2^3},$$

тогда получим $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. В этом случае интеграл (59) легко вычисляется и из уравнения (58) находим

$$\gamma_3(t) = \frac{H_0}{H_1(t-t_0)^2 + H_2},$$

где коэффициенты H_0, H_1, H_2 зависят от постоянных c_2, c_4, L и являются слишком громоздкими. Поэтому придадим постоянным c_2, c_4, L конкретные значения. Пусть выполнены равенства

$$c_2 = \frac{3}{C}, \quad c_4 = \frac{2}{C}, \quad L = \frac{1}{C}, \quad c_1 = \frac{25}{4C^3}, \quad k_3 = -\frac{298}{27C}, \quad \lambda_3 = -\frac{5}{3C}.$$

Тогда получим

$$\gamma_3(t) = \frac{185976C^4}{82369\,t^2 + 305028C^4}. \tag{60}$$

Для функции $\gamma_3(t)$ вида (60) функция $\varphi(t)$ находится по формуле (56) простым интегрированием по времени t. Из формулы (56) находим

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{5}{4C^2}\,t - \frac{68}{\sqrt{8473}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{287\sqrt{8473}}{50838C^2}\,t\right)$$
$$- \frac{89\sqrt{293}}{1465}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{287\sqrt{293}}{8790C^2}\,t\right) - \frac{259}{\sqrt{18805}}\,\mathrm{arcth}\left(\frac{287\sqrt{18805}}{112830C^2}\,t\right),$$

где φ_0 — постоянная интегрирования.

Пример 3. Пусть $k = 0$, $k_3 = 8$, $C = 2$, $L = 4$, $\mathcal{L}(\gamma_3) = 4\gamma_3$,

$$\lambda_3 = -2 \cdot 6^{1/3} - \frac{6^{2/3}}{4} - 1, \quad c_1 = \frac{3 \cdot 6^{1/3}}{64} - \frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{6^{2/3}}{4}, \quad c_4 = 1.$$

Тогда ОДУ (55) для определения функции $\gamma_3(t)$ примет вид

$$\dot{\gamma}_3^2 = (1 - \gamma_3)(\gamma_3 - 3/4)(\gamma_3 - 1/2)(\gamma_3 - 1/4). \tag{61}$$

Легко видеть, что ОДУ (61) имеет следующие стационарные решения: $\gamma_3 = 1$, $\gamma_3 = 3/4$, $\gamma_3 = 1/2$, $\gamma_3 = 1/4$.

Для нахождения нестационарного решения запишем уравнение (61) в виде равенства

$$\int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{(1-\gamma_3)(\gamma_3 - 3/4)(\gamma_3 - 1/2)(\gamma_3 - 1/4)}} = t - t_0,$$

где t_0 — постоянная интегрирования. Интеграл в левой части этого равенства является табличным [20], вычисляя который при условии $1 > \gamma_3 > 3/4$, получим

$$\int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{(1-\gamma_3)(\gamma_3 - 3/4)(\gamma_3 - 1/2)(\gamma_3 - 1/4)}} = 4F\left(\arcsin\sqrt{\frac{4\gamma_3 - 3}{2\gamma_3 - 1}}, \frac{1}{2}\right).$$

Здесь $F(\phi, \kappa)$ — эллиптический интеграл первого рода, ϕ — амплитуда, κ — модуль эллиптической функции. Обращая равенство

$$4F\left(\arcsin\sqrt{\frac{4\gamma_3 - 3}{2\gamma_3 - 1}}, \frac{1}{2}\right) = t - t_0,$$

находим

$$\gamma_3(t) = \frac{\operatorname{sn}^2\Big((t-t_0)/4, 1/2\Big) - 3}{2\operatorname{sn}^2\Big((t-t_0)/4, 1/2\Big) - 4}. \tag{62}$$

Здесь $\operatorname{sn}(\cdot,\cdot)$ — эллиптический синус Якоби с модулем $\kappa = 1/2$. Функция (62) является ограниченной периодической. Для функции $\gamma_3(t)$ вида (62) из формулы (56) находим

$$\varphi(t) = \left(\frac{3}{4} - \frac{6^{1/3}}{4} - \frac{6^{2/3}}{32}\right)t + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sn}((t-t_0)/4, 1/2)}{2\operatorname{cn}((t-t_0)/4, 1/2)\operatorname{dn}((t-t_0)/4, 1/2)}\right) + \Phi(t),$$

где $\operatorname{cn}(\cdot,\cdot)$ — эллиптический косинус Якоби, $\operatorname{dn}(\cdot,\cdot)$ — дельта амплитуды Якоби и введено обозначение

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t \frac{(\operatorname{sn}^2(\tau/4, 1/2) - 4)((6^{1/3} - 8)\operatorname{sn}^2(\tau/4, 1/2) + 24 - 6^{1/3})\,d\tau}{3(6^{1/3} - 16)\operatorname{sn}^4(\tau/4, 1/2) + (320 - 12 \cdot 6^{1/3})\operatorname{sn}^2(\tau/4, 1/2) + 12(6^{1/3} - 48)}.$$

Здесь для краткости записи мы положили $t_0 = 0$.

Пример 4. Пусть $k \neq 0$, $L(\gamma_3) = L \equiv \text{const}$, $\mathcal{L}(\gamma_3) = (L-k)\gamma_3$. Тогда формулы (35), (43), (50), (52), (53) примут вид

$$r = \frac{1}{C}(c_4 - (L-k)\gamma_3), \quad \Omega^2 = \frac{c_1}{4C} - \frac{(c_4 - (L-k)\gamma_3)^2}{4C^2},$$
$$\dot{\varphi} = \frac{(2L + k_3 - 3k)\gamma_3 + \lambda_3 - 3c_4}{4C} + \frac{\Theta_1(\gamma_3)}{16C^2\Omega^2}, \tag{63}$$

$$\gamma_1 = \frac{\sin\varphi}{\Omega}\,\dot{\gamma}_3 + \frac{\cos\varphi}{4C\Omega}\,\Theta_2(\gamma_3), \quad \gamma_2 = -\frac{\cos\varphi}{\Omega}\,\dot{\gamma}_3 + \frac{\sin\varphi}{4C\Omega}\,\Theta_2(\gamma_3), \tag{64}$$

где введены обозначения

$$\Theta_1(\gamma_3) = -\frac{(L-k)^2(2L-k-k_3)}{2C}\gamma_3^3 + \frac{(L-k)(c_4(4L-3k-k_3)+2\lambda_3(L-k))}{2C}\gamma_3^2 + \frac{(L-k)((L-k)(k-2c_2)-2c_4(c_4+\lambda_3))}{2C}\gamma_3 - \frac{(L-k)c_4(k-2c_2)}{2C},$$

$$\Theta_2(\gamma_3) = \frac{1}{2}(2L-k-k_3)\gamma_3^2 - (c_4+\lambda_3)\gamma_3 - \frac{1}{2}(k-2c_2).$$

При этом уравнение (55) для функции γ_3 сводится к следующей квадратуре:

$$\int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{b_4\gamma_3^4 + b_3\gamma_3^3 + b_2\gamma_3^2 + b_1\gamma_3 + b_0}} = t - t_0, \tag{65}$$

где t_0 — константа интегрирования и введены обозначения

$$b_4 = \frac{(L-k)(k_3-k)}{16C^2} - \frac{5(L-k)^2}{16C^2} - \frac{(k_3-k)^2}{64C^2},$$
$$b_3 = \frac{(L-k)^2}{2C^2} + \frac{(\lambda_3+5c_4)(L-k)}{8C^2} - \frac{(c_4+\lambda_3)(k_3-k)}{16C^2},$$
$$b_2 = \frac{0.5(k-2c_2)(k_3-k) - (c_4+\lambda_3)^2 + (k-2c_2-16c_4)(L-k)}{16C^2} - \frac{(L-k)^2}{4C^2} - \frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C},$$
$$b_1 = \frac{c_4(L-k)}{2C^2} - \frac{(c_4+\lambda_3)(k-2c_2)}{16C^2} + \frac{c_4^2}{2C^2} - \frac{c_1}{2C}, \quad b_0 = -\frac{(k-2c_2)^2}{64C^2} - \frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C}.$$

При значениях постоянных

$$c_1 = \frac{153k^2}{6C}, \quad c_2 = 2k, \quad c_4 = 3k, \quad k_3 = -74k, \quad \lambda_3 = \frac{21k}{2}, \quad L = -\frac{k}{2}$$

из формулы (65) получим $\gamma_3(t) = \dfrac{1696C^2}{25281k^2t^2 + 2320C^2}$. А из равенства (63) находим

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{21k}{8C}\,t - \frac{28}{\sqrt{145}}\operatorname{arctg}\left(\frac{159\sqrt{145}\,k}{580C}\,t\right) + \frac{(\sqrt{17}-6)}{\sqrt{212\sqrt{17}-703}}\operatorname{arcth}\left(\frac{159k}{4C\sqrt{212\sqrt{17}-703}}\,t\right) + \frac{7(\sqrt{17}+6)}{\sqrt{212\sqrt{17}+703}}\operatorname{arcth}\left(\frac{159k}{4C\sqrt{212\sqrt{17}+703}}\,t\right),$$

где φ_0 — постоянная интегрирования.

Пример 5. Пусть $k \neq 0$, $L(\gamma_3) = L\gamma_3 + l_0$, $\mathcal{L}(\gamma_3) = \dfrac{1}{2}L\,\gamma_3^2 + (l_0-k)\gamma_3$, $L \neq 0$, l_0 — произвольные постоянные. Тогда формулы (35), (43) примут вид

$$r = \frac{1}{C}\big(c_4 - \gamma_3^2 L/2 - (l_0-k)\gamma_3\big), \quad \Omega^2 = \frac{c_1}{4C} - \frac{\big(c_4 - \gamma_3^2 L/2 - (l_0-k)\gamma_3\big)^2}{4C^2}.$$

Формулы (50), (52), (53) приводить не будем ввиду их громоздкости. При значениях постоянных

$$c_1 = k^2/C, \quad c_2 = k/2, \quad c_4 = -k, \quad \lambda_3 = -k, \quad L = -k, \quad l_0 = k, \quad k_3 = 5k$$

получим

$$\gamma_3(t) = \frac{4C}{\sqrt{k^2t^2 + 20C^2}}.$$

Полагая $C = 1$, $k = 2$, для функции $\gamma_3(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t^2+5}}$ находим

$$\varphi(t) = \varphi_0 + 2t + 2\arcsin(t/\sqrt{5}) - 3/\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}(t/\sqrt{5}) + \mathrm{arctg}\left(\frac{t}{2\sqrt{t^2+5}}\right),$$

где φ_0 — постоянная интегрирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем кратко основные результаты статьи и возможные направления их дальнейшего развития. В работе найдены все стационарные решения гиростата Горячева — Сретенского, лежащие на инвариантном множестве $J_2 = 0$ нулевого уровня интеграла площадей. Максимальное количество таких решений равно шести (два положения покоя и не более четырёх перманентных вращений). Доказано, что одно состояние покоя устойчиво, а другое неустойчиво. Получены достаточные условия условной устойчивости перманентных вращений относительно множества $J_2 = 0$. Представляет интерес выяснить, в каких случаях условная устойчивость является на самом деле безусловной, требуются ли какие-либо дополнительные ограничения на параметры системы. Для случая совпадения точки подвеса с центром масс ($a = 0$) и действия специального вида гироскопического момента выполнено интегрирование в квадратурах, для ряда примеров получены параметрические семейства решений, представимые элементарными или специальными функциями времени. Представляет интерес выяснить, используя метод малого параметра, сохраняются ли эти семейства решений при достаточно малом $|a| \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения твёрдого тела около неподвижной точки. М: Гостехиздат, 1953.
2. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твёрдого тела. Ижевск: изд. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
3. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твёрдого тела. Киев: Наукова думка, 2012.
4. *Горячев Д.Н.* О движении тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Мат. сб. 1900. Т. 21, №. 3. С. 431–438.
5. *Чаплыгин С.А.* Новый случай вращения тяжёлого твёрдого тела, подпёртого в одной точке // Тр. Отд. физ. наук об-ва любителей естествознания. 1901. Т. 10, вып. 3. С. 32–34.
6. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 2. С. 292–294.
7. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твёрдого тела. Ижевск: изд. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
8. *Polekhin I.Yu.* Precession of the Kovalevskaya and Goryachev—Chaplygin tops // Regular and Chaotic Dynamics. 2019. V. 24, N 3. P. 281–297.
9. *Гашененко И.Н.* О решении Д.Н. Горячева // Механика твёрдого тела. 2009. №. 39. С. 29–41.
10. *Харламов М.П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
11. *Маркеев А. П.* О тождественном резонансе в одном частном случае задачи об устойчивости периодических движений твёрдого тела // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 32–37.
12. *Бардин Б.С.* К задаче об устойчивости маятникообразных движений твёрдого тела в случае Горячева — Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 14–21.

13. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О решениях уравнений движения твёрдого тела в потенциальном силовом поле в случае постоянного модуля кинетического момента // Механика твёрдого тела. 2017. №. 47. С. 12–24.

14. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egyptian. Math. Soc. 2017. V. 25. P. 216–219; DOI: https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001

15. *Зыза А.В.* Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10, № 1. С. 7–25; DOI: https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25

16. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2022. V. 430. Article 133103; DOI: https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.133103

17. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твёрдого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.

18. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

19. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988.

20. *Прудников А.П, Брычков Ю.А, Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 531.36

ON THE INTEGRABILITY AND STABILITY OF STATIONARY SOLUTIONS OF THE GORYACHEV—SRETENSKY GYROSTAT

© 2023 A. A. Kosov[a], E. I. Semenov[b]

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, ul. Lermontova 134, Irkutsk 664033, Russia

E-mails: [a]kosov_idstu@mail.ru, [b]edwseiz@gmail.com

Received 16.08.2022, revised 05.06.2023, accepted 07.06.2023

Abstract. The equations of motion of the Goryachev-Sretensky gyrostat are studied. All stationary solutions are found on the invariant set of the zero level of the area integral and their stability is analyzed. For the case where the suspension point coincides with the center of mass and the action of a gyroscopic moment of a special type, integration in quadratures is performed.

Keywords: Goryachev—Sretensky gyrostat, stationary solutions, stability, quadrature integration.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.305

REFERENCES

1. Golubev V.V. Lekcii po integrirovaniju uravnenij dvizhenija tverdogo tela okolo nepodvizhnoj tochki [Lectures on the integration of the equations of motion of a rigid body around a fixed point]. Moscow: Gostekhizdat, 1953 (in Russian).
2. Borisov A.V., Mamaev I.S. Dinamika tverdogo tela [Rigid Body Dynamics]. Izhevsk: Pabl. NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», 2001 (in Russian).
3. Gashenenko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M. Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela [Classical problems of rigid body dynamics]. Kiev: Naukova dumka, 2012 (in Russian).
4. Gorjachev D.N. O dvizhenii tjazhelogo tverdogo tela vokrug nepodvizhnoj tochki v sluchae $A = B = 4C$ [On the motion of a heavy rigid body around a fixed point in the case $A = B = 4C$]. *Mat. Sbornik*, 1900, Vol. 21, No. 3, pp. 431–438 (in Russian).
5. Chaplygin S.A. Novyj sluchaj vrashhenija tjazhelogo tverdogo tela, podpertogo v odnoj tochke [A new case of rotation of a heavy rigid body supported at one point]. *Tr. Otd. Fiz. Nauk Obshchestva Lyubitelei Estestvoznaniya*, 1901, Vol. 10, No. 3, pp. 32–34 (in Russian).
6. Sretenskij L.N. O nekotoryh sluchajah integriruemosti uravnenij dvizhenija girostata [On some cases of integrability of the equations of motion of a gyrostat]. *Dokl. AN SSSR*, 1963, Vol. 149, No. 2, pp. 292–294 (in Russian).
7. Kozlov V.V. Metody kachestvennogo analiza v dinamike tverdogo tela [Qualitative Analysis Methods in Rigid Body Dynamics]. Izhevsk: Pabl. NIC «Reguljarnaja i Haoticheskaja Dinamika», 2000 (in Russian).
8. Polekhin I.Yu. Precession of the Kovalevskaya and Goryachev—Chaplygin Tops. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, Vol. 24, No. 3, pp. 281–297.
9. Gashenenko I.N. O reshenii D.N. Gorjacheva [On D.N. Goryachev's decision]. *Solid State Mechanics* [Mehanika Tverdogo Tela], 2009, No. 39, pp. 29–41 (in Russian).
10. Harlamov M.P. Topologicheskij analiz integriruemyh zadach dinamiki tverdogo tela [Topological analysis of integrable problems of rigid body dynamics]. Leningrad: Izd-vo LGU, 1988 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 3.

11. Markeev A.P. O tozhdestvennom rezonanse v odnom chastnom sluchae zadachi ob ustojchivosti periodicheskih dvizhenij tverdogo tela [On identical resonance in one particular case of the problem of stability of periodic motions of a rigid body]. *Izv. RAN. MTT*, 2003, No. 3, pp. 32–37 (in Russian).
12. Bardin B.S. K zadache ob ustojchivosti majatnikoobraznyh dvizhenij tverdogo tela v sluchae Gorjacheva—Chaplygina [On the problem of stability of pendulum motions of a rigid body in the case of Goryachev—Chaplygin]. *Izv. RAN. MTT*, 2007, No. 2, pp. 14–21 (in Russian).
13. Gorr G.V., Maznev A.V. O reshenijah uravnenij dvizhenija tverdogo tela v potencial'nom silovom pole v sluchae postojannogo modulja kineticheskogo momenta [On solutions of the equations of motion of a rigid body in a potential force field in the case of a constant modulus of angular momentum]. *Solid State Mechanics* [Mehanika Tverdogo Tela], 2017, No. 47, pp. 12–24 (in Russian).
14. Yehia H.M. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields. *J. Egyptian. Math. Soc.*, 2017, Vol. 25, pp. 216–219; DOI: https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001
15. Zyza A.V. Komp'juternoe issledovanie polinomial'nyh reshenij uravnenij dinamiki girostata [Computer study of polynomial solutions of equations of gyrostat dynamics]. *Computer Research and Modeling* [Komp'juternye issledovanija i modelirovanie], 2018, Vol. 10, No. 1, pp. 7–25 (in Russian); DOI: https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25
16. Kosov A.A., Semenov E.I. On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2022, Vol. 430, article 133103; DOI: https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.133103
17. Kozlov V.V. K zadache o vrashhenii tverdogo tela v magnitnom pole [On the problem of rotation of a rigid body in a magnetic field]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1985, No. 6, pp. 28–33 (in Russian).
18. Chetaev N.G. Ustojchivost' dvizhenija. Raboty po analiticheskoj mehanike [Movement stability. Works on analytical mechanics]. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1962 (in Russian).
19. Rubanovskij V.N., Samsonov V.A. Ustojchivost' stacionarnyh dvizhenij v primerah i zadachah [Stability of stationary motions in examples and problems]. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
20. Prudnikov A.P, Brychkov Ju.A, Marichev O.I. Integraly i rjady [Integrals and series]. Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).