

УДК 517.958:539.3

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО С НЕЗАКРЕПЛЁННЫМИ КРАЯМИ

© 2023 С. Н. Тимергалиев

*Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зелёная, 1, г. Казань 420043, Россия*

E-mail: samat_tim@mail.ru

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.; после доработки 12.11.2023 г.;
принята к публикации 15.11.2023 г.

Исследуется существование решений краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка относительно обобщённых перемещений при заданных нелинейных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих непологих изотропных неоднородных оболочек нулевой гауссовой кривизны с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко. В основе метода исследования лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные функции, которые позволяют исходную краевую задачу свести к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве. Разрешимость операторного уравнения устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: непологая оболочка типа Тимошенко нулевой гауссовой кривизны, нелинейная краевая задача, дифференциальные уравнения с частными производными, обобщённое решение, голоморфная функция, операторное уравнение, теорема существования.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.411

В настоящее время достаточно глубоко изучена разрешимость плоских задач теории упругости [1, 2]. Исследования разрешимости пространственных краевых задач теории упругости ведутся по двум основным направлениям. Первое направление основано на применении теории сингулярных интегральных уравнений [3–6], а также метода сведения пространственных задач к плоским [7] с последующим использованием теории аналитических и обобщённых аналитических функций. На этом пути получены теоремы существования линейных краевых задач для однородных и кусочно-однородных изотропных и анизотропных упругих тел. Второе направление исследований связано с использованием методов функционального анализа, которые позволяют исследовать существование обобщённых решений задач теории упругости в Соболевских пространствах для более широкого класса упругих тел [8–13]. Здесь используются такие методы, как метод гильбертовых пространств, вариационные методы [8–11], теорема о неявной функции и метод Джона Болла, основанный на понятиях слабой сходимости и слабо полунепрерывного снизу функционала [12, 13]. Эти же методы применялись к исследованию разрешимости нелинейных краевых задач равновесия упругих оболочек и пластин в рамках простейшей модели Кирхгофа—Лява ([14–19] и цитированная литература) и задач термоупругости для оболочек в рамках гипотез Григолюка—Чулкова [20, 21]. Вопросы существования решений нелинейных задач в рамках более общих моделей теории оболочек вошли в известный список нерешённых проблем математической теории оболочек И. И. Воровича [14]. В настоящее время имеется немало работ, посвящённых построению новых неклассических моделей

теории оболочек и нахождению в рамках этих моделей решений конкретных задач различными численными и численно-аналитическими методами (см., например, [22–27] и цитируемая литература). Разрешимость линейных краевых задач для упругих микрополярных оболочек исследовалась в [28]. Однако, вопросы обоснования применяемых методов и анализа разрешимости статических задач для более сложных нелинейных уравнений до недавнего времени оставались открытыми. На сегодняшний день имеется ряд работ [29–33], в которых в рамках сдвиговой модели С. П. Тимошенко [22] исследовалась разрешимость нелинейных краевых задач для упругих пологих оболочек. Для исследования этих задач разработан новый метод, в основе которого лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные функции. Построение интегральных представлений является одним из существенных моментов метода исследования. Произвольные функции находятся таким образом, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли линейной системе уравнений равновесия и линейным граничным условиям. В результате исходная краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в Соболевском пространстве. Существенным моментом метода исследования также является исследование разрешимости операторного уравнения. В настоящей статье метод работ [29–33] развивается на случай непологих неоднородных изотропных оболочек типа Тимошенко нулевой гауссовой кривизны, отнесённых к евклидовой системе координат. Переход к непологим оболочкам существенно усложняет исследование краевой задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В плоской односвязной ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} T_{\alpha\lambda}^{j\lambda} - \kappa_j T^{j\mu} \omega_\mu - \kappa_j T^{j3} + R^j &= 0, \quad j = 1, 2, \\ (T^{\lambda\mu} \omega_\mu)_{\alpha\lambda} + T_{\alpha\lambda}^{\lambda 3} + \kappa_1 T^{11} + R^3 &= 0, \quad M_{\alpha\lambda}^{j\lambda} - T^{j3} + L^j = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

при выполнении на границе Γ области Ω условий

$$\begin{aligned} T^{j1} d\alpha^2/ds - T^{j2} d\alpha^1/ds &= P^j(s), \quad j = 1, 2, \\ T^{13} d\alpha^2/ds - T^{23} d\alpha^1/ds + (T^{1\lambda} d\alpha^2/ds - T^{2\lambda} d\alpha^1/ds) \omega_\lambda &= P^3(s), \\ M^{j1} d\alpha^2/ds - M^{j2} d\alpha^1/ds &= N^j(s), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

В (1), (2) и ниже используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} T^{ij} &\equiv T^{ij}(\gamma) = D_{\lambda-1}^{ijkn} \gamma_{kn}^{\lambda-1}, \quad M^{ij} \equiv M^{ij}(\gamma) = D_{\lambda}^{ijkn} \gamma_{kn}^{\lambda-1}, \\ \gamma &= (\gamma^0, \gamma^1), \quad \gamma^k = (\gamma_{11}^k, \gamma_{12}^k, \gamma_{13}^k, \gamma_{22}^k, \gamma_{23}^k, \gamma_{33}^k), \quad k = 0, 1; \\ D_m^{ijkn} &= D_m^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2) = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) (\alpha^3)^m d\alpha^3, \quad m = \overline{0, 2}, \quad i, j, k, n = \overline{1, 3}; \\ B^{1111} &= B^{2222} = E/(1 - \nu^2), \quad B^{1122} = \nu E/(1 - \nu^2), \quad B^{1212} = E/(2(1 + \nu)), \\ B^{1313} &= B^{2323} = E\kappa^2/(2(1 + \nu)); \quad \omega_j = w_{3\alpha^j} + \kappa_j w_j, \quad j = 1, 2; \\ \gamma_{jj}^0 &= w_{j\alpha^j} - \kappa_j w_3 + \omega_j^2/2 \quad (j = 1, 2), \quad \gamma_{12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + \omega_1 \omega_2, \quad \gamma_{jj}^1 = \psi_{j\alpha^j} \quad (j = 1, 2), \\ \gamma_{12}^1 &= \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}, \quad \gamma_{j3}^0 = \omega_j + \psi_j \quad (j = 1, 2), \quad \gamma_{33}^0 = \gamma_{k3}^1 \equiv 0, \quad k = \overline{1, 3}; \end{aligned} \quad (3)$$

остальные B^{ijkn} равны нулю, $\alpha^j = \alpha^j(s)$ ($j = 1, 2$) — уравнения кривой Γ , s — длина дуги Γ ; нижний индекс α^λ в (1)–(3) и далее означает дифференцирование по α^λ , $\lambda = 1, 2$.

Система (1) совместно с граничными условиями (2) описывает состояние равновесия упругой неполюгой изотропной неоднородной оболочки с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [22], стр. 164–173, отнесённой к евклидовой системе координат. При этом: T^{ij} — усилия, M^{ij} — моменты; γ_{ij}^k ($i, j = \overline{1, 3}$, $k = 0, 1$) — компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, отождествляемой с областью Ω ; w_j ($j = 1, 2$) и w_3 — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0 ; ψ_i ($i = 1, 2$) — углы поворота нормальных сечений S_0 ; κ_j ($j = 1, 2$) — главные кривизны поверхности S_0 ; R^j , P^j ($j = \overline{1, 3}$), L^k , N^k ($k = 1, 2$) — компоненты внешних сил, действующих на оболочку; ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, κ^2 — коэффициент сдвига, $h_0 = const$ — толщина оболочки; α^1, α^2 — декартовы координаты точек области Ω . Предполагается, что гауссова кривизна $K = \kappa_1 \kappa_2 = 0$, поэтому далее будем считать $\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 \neq 0$ в области $\overline{\Omega}$.

В (1)–(3) и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам — от 1 до 2.

Задача (1), (2). Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2).

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщённой постановке. Пусть выполнены следующие условия:

(а) имеют место включения $B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in (W_p^{(1)}(\Omega) \cap C_\beta(\overline{\Omega})) \times L_1[-h_0/2, h_0/2]$, $i, j, k, n = \overline{1, 3}$;

(б) главная кривизна $\kappa_1(\alpha^1, \alpha^2)$ принадлежит пространству $C^1(\overline{\Omega})$;

(с) компоненты внешних сил R^j ($j = \overline{1, 3}$) и L^k ($k = 1, 2$) принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компоненты P^j ($j = \overline{1, 3}$), N^k ($k = 1, 2$) — пространству $C_\beta(\Gamma)$;

(д) Ω — произвольная односвязная область с границей $\Gamma \in C_\beta^1$.

Здесь и далее везде: $2 < p < 4/(2 - \beta)$, $0 < \beta < 1$.

Определение. Назовём вектор обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ обобщённым решением задачи (1), (2), если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Здесь $W_p^{(j)}(\Omega)$ ($j = 1, 2$) — пространства Соболева. В силу теорем вложения для Соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p > 2$ обобщённое решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\overline{\Omega})$. Здесь и везде далее $\alpha = (p - 2)/p$. Заметим, что при $2 < p < 4/(2 - \beta)$ справедливо неравенство $\alpha < \beta/2$.

Соотношения для компонент деформаций в (3) для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k = e_{sij}^k + e_{cij}^k + \chi_{ij}^k, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad k = 0, 1, \quad (4)$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} e_{sij}^0 &= w_{j\alpha^j}, & e_{sij}^1 &= w_{3\alpha^j} + \psi_j, & e_{sij}^2 &= \psi_{j\alpha^j}, & j &= 1, 2, & e_{s12}^0 &= w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}, \\ e_{s12}^1 &= \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}, & e_{c11}^0 &= -\kappa_1 w_3, & e_{c13}^0 &= \kappa_1 w_1, & \chi_{jj}^0 &= \omega_j^2/2, & j &= 1, 2, & \chi_{12}^0 &= \omega_1 \omega_2; \end{aligned} \quad (5)$$

остальные e_{sij}^k , e_{cij}^k , χ_{ij}^k равны нулю.

2. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Введём в рассмотрение две комплексные функции

$$\begin{aligned} v_j &= v_j(z) = D_{j-1}^{1111}(w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2}) + D_j^{1111}(\psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) + \\ &+ i[D_{j-1}^{1212}(w_{2\alpha^1} - w_{1\alpha^2}) + D_j^{1212}(\psi_{2\alpha^1} - \psi_{1\alpha^2})], \quad j = 1, 2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2. \end{aligned} \quad (6)$$

В системе (1) усилия T^{jk} , моменты M^{jk} и компоненты деформаций γ_{jk}^n заменим их выражениями из (3), (4). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на мнимую единицу i , а к четвёртому уравнению — пятое, умноженное также на i , систему (1) при помощи функций $v_j(z)$ из (6) представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\begin{aligned} v_{j\bar{z}} + h^j(a) &= f_c^j(a) + f_\chi^j(a) - F^j(z), \quad j = 1, 2, \\ D_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) &= f_c^3(a) + f_\chi^3(a) - F^3(z), \quad z \in \Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} v_{j\bar{z}} &= (v_{j\alpha^1} + i v_{j\alpha^2})/2, \quad j = 1, 2, \\ h^j(a) &= (-1)^{\mu-1} (D_{j+\lambda-2\alpha^3-\mu}^{1212} \nu_{\lambda 2\alpha^\mu} + i D_{j+\lambda-2\alpha^\mu}^{1212} \nu_{\lambda 1\alpha^{3-\mu}}) - (j-1) D_0^{1313} (e_{s13}^0 + i e_{s23}^0)/2, \\ \nu_{1j} &= w_j, \quad \nu_{2j} = \psi_j, \quad j = 1, 2; \quad h^3(a) = D_{0\alpha^\lambda}^{1313} w_{3\alpha^\lambda} + (D_0^{1313} \psi_\lambda)_{\alpha^\lambda}; \\ f_c^j(a) &= (f_{c3j-2} + i f_{c3j-1})/2, \quad f_\chi^j(a) = (f_{\chi 3j-2} + i f_{\chi 3j-1})/2, \quad j = 1, 2, \\ f_c^3(a) &= f_{c3}(a), \quad f_\chi^3(a) = f_{\chi 3}(a), \quad f_{cj}(a) = -T_{\alpha^j}^{jj}(e_c) + \kappa_j T^{j3}(\gamma), \\ f_{c3+j}(a) &= -M_{\alpha^j}^{jj}(e_c) + (2-j) T^{j3}(e_c), \quad j = 1, 2, \quad f_{c3}(a) = -T_{\alpha^\lambda}^{\lambda 3}(e_c) - \kappa_1 T^{11}(e), \\ f_{\chi j}(a) &= -T_{\alpha^\lambda}^{j\lambda}(\chi) + \kappa_j T^{j\mu}(\gamma) \omega_\mu, \quad f_{\chi 3+j}(a) = -M_{\alpha^\lambda}^{j\lambda}(\chi), \quad j = 1, 2, \\ f_{\chi 3}(a) &= -(T^{\lambda\mu} \omega_\mu)_{\alpha^\lambda} - \kappa_1 T^{11}(\chi), \quad F^1 = (R^1 + i R^2)/2, \quad F^2 = (L^1 + i L^2)/2, \\ F^3 &= R^3; \quad e = e_s + e_c, \quad e_s = (e_s^0, e_s^1), \quad e_c = (e_c^0, e_c^1), \\ e_s^k &= (e_{s11}^k, e_{s12}^k, e_{s13}^k, e_{s22}^k, e_{s23}^k, e_{s33}^k), \quad e_c^k = (e_{c11}^k, e_{c12}^k, e_{c13}^k, e_{c22}^k, e_{c23}^k, e_{c33}^k), \\ k &= 0, 1; \quad \chi = (\chi_{11}^0, \chi_{12}^0, \chi_{22}^0); \end{aligned} \quad (8)$$

$e_{sij}^k, e_{cij}^k, \chi_{ij}^k$ определены в (5).

Отметим, что через e и χ обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент деформации γ , поэтому справедливо представление $\gamma = e + \chi$.

Аналогично, граничные условия (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} Re[(-i)^j t' \omega_k(t)] + 2(-1)^j D_{k+\delta-2}^{1212} \nu_{\delta 3-j\alpha^\lambda} d\alpha^\lambda/ds &= \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - \\ &- F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2, \\ D_0^{1313}[(w_{3\alpha^2} + \psi_2) d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1} + \psi_1) d\alpha^2/ds] &= \varphi_{c3}(a)(t) + \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{cj}(a)(t) &= T^{j2}(e_c) d\alpha^1/ds - T^{j1}(e_c) d\alpha^2/ds, \\ \varphi_{c3+j}(a)(t) &= M^{j2}(e_c) d\alpha^1/ds - M^{j1}(e_c) d\alpha^2/ds, \quad \varphi_{c3}(a)(t) = T^{13}(e_c) d\alpha^2/ds; \\ \varphi_{\chi j}(a)(t) &= T^{j2}(\chi) d\alpha^1/ds - T^{j1}(\chi) d\alpha^2/ds, \\ \varphi_{\chi 3+j}(a)(t) &= M^{j2}(\chi) d\alpha^1/ds - M^{j1}(\chi) d\alpha^2/ds, \quad j = 1, 2, \\ \varphi_{\chi 3}(a)(t) &= [(T^{11}(\gamma) \omega_1 + T^{12}(\gamma) \omega_2) d\alpha^2/ds - [T^{22}(\gamma) \omega_2 + T^{12}(\gamma) \omega_1] d\alpha^1/ds]; \\ F^{3+j} &= -P^j, \quad j = 1, 2, \quad F^6(s) = P^3(s), \quad F^{6+k} = -N^k, \quad k = 1, 2; \end{aligned} \quad (10)$$

$t' = dt/ds$, ds — элемент длины дуги кривой Γ , усилия T^{jk} , моменты M^{jk} определены в (2).

В основе исследования системы уравнений (7) при граничных условиях (9) лежат интегральные представления для обобщённых перемещений w_j ($j = \overline{1, 3}$), ψ_k ($k = 1, 2$). Для их вывода введём в рассмотрение уравнения

$$v_{j\bar{z}} = \rho^j(j = 1, 2), \quad D_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \quad (11)$$

где $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2$, $\rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$, $\rho^3 = \rho_3$ — произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (11) представляют собой неоднородные уравнения Коши—Римана. Их общие решения даются формулами [34], стр. 29

$$\begin{aligned} v_j(z) &= \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv v_j(\Phi_j; \rho^j)(z), \\ T\rho^j(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Phi_j(z)$ — произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\bar{\Omega})$.

Известно [34], стр. 39–41, 46, что T — вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C_\alpha^k(\bar{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\bar{\Omega})$ и $C_\alpha^{k+1}(\bar{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial T f}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial T f}{\partial z} \equiv S f = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \quad (13)$$

где S — линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $p > 1$ и $C_\alpha^k(\bar{\Omega})$.

Представления (12) в свою очередь при помощи функций $v_1^0 = w_2 + iw_1$, $v_2^0 = \psi_2 + i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши—Римана

$$v_{j\bar{z}}^0 = i(d_{2j-1}[v_1] + d_{2j}[v_2]) \equiv iT_j v, \quad j = 1, 2, \quad v = (v_1, v_2), \quad (14)$$

общие решения которых имеют вид

$$v_j^0(z) = \Psi_j(z) + iT_j v(z), \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

В (14), (15) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} d_{2j+\lambda-2}[v_\lambda] &= d_{2j+\lambda-2}^1 v_\lambda + (-1)^{j+\lambda} d_{2j+\lambda-2}^2 \bar{v}_\lambda, \quad j, \lambda = 1, 2, \\ d_{3k-2}^j &= \frac{1}{4} \left(\frac{D_{4-2k}^{1111}}{\delta_0} + (-1)^j \frac{D_{4-2k}^{1212}}{\delta_1} \right), \\ d_2^j &= d_3^j = \frac{1}{4} \left(\frac{D_1^{1212}}{\delta_1} + (-1)^j \frac{D_1^{1111}}{\delta_0} \right), \quad k, j = 1, 2, \\ \delta_0 &= D_0^{1111} D_2^{1111} - (D_1^{1111})^2, \quad \delta_1 = D_0^{1212} D_2^{1212} - (D_1^{1212})^2; \end{aligned} \quad (16)$$

$\Psi_j(z) \in C_\alpha^1(\bar{\Omega})$ — произвольные голоморфные функции.

Третье уравнение в (11) представим в виде

$$w_{3z\bar{z}} = \tilde{\rho}_3/4, \quad \tilde{\rho}_3 = \rho_3/D_0^{1313}, \quad w_{3z} = (w_{3\alpha^1} - iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда получим

$$w_3(z) = Re\Psi_3(z) - \tilde{T}\tilde{\rho}_3, \quad \tilde{T}\tilde{\rho}_3 = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \tilde{\rho}_3(\zeta) \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\xi d\eta, \quad (17)$$

где $\Psi_3(z) \in C_\alpha^1(\bar{\Omega})$ — произвольная голоморфная функция.

Соотношения (15), (17) представляют собой искомые интегральные представления для обобщённых перемещений. Для их частных производных первого и второго порядков при помощи формул (12)–(17) и (8.20) из [34], стр. 58 получаем представления

$$\begin{aligned}
 \nu_{jk\alpha^k} &= Im[v_{j\bar{z}}^0 - (-1)^k v_{jz}^0], \quad \nu_{jk\alpha^n} = Re[v_{jz}^0 + (-1)^k v_{j\bar{z}}^0], \quad k \neq n, \quad j, k, n = 1, 2; \\
 v_{jz}^0 &= \Psi'_j(z) + iST_j v(z), \quad v_{j\bar{z}}^0 = iT_j v, \quad w_{3\alpha^j} = 2Re(i^{j-1} w_{3z}), \quad j = 1, 2, \\
 w_{3z} &= \Psi'_3(z)/2 + T\tilde{\rho}_3(z)/4; \quad \nu_{kn\alpha^j\alpha^j} = -Re\{i^n[v_{kz\bar{z}}^0 + (-1)^j(v_{kzz}^0 + v_{k\bar{z}\bar{z}}^0)]\}, \\
 \nu_{kn\alpha^1\alpha^2} &= Re\{i^{n-1}(v_{kzz}^0 - v_{k\bar{z}\bar{z}}^0)\}, \quad w_{3\alpha^j\alpha^j} = 2[w_{3z\bar{z}} + (-1)^{j-1} Rew_{3zz}], \quad k, n, j = 1, 2, \\
 w_{3\alpha^1\alpha^2} &= -2Imw_{3zz}; \quad v_{kz\bar{z}}^0 = T_{k1}v + S_{k1}(\Phi'_0; \rho_0), \quad v_{k\bar{z}\bar{z}}^0 = T_{k2}v + S_{k2}(\Phi'_0; \rho_0), \\
 v_{kzz}^0 &= \Psi''_k(z) + Sv_{k\zeta\bar{\zeta}}^0(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{T_k v(\tau)}{(\tau - z)^2} d\bar{\tau}, \quad k = 1, 2, \quad \Phi'_0 = (\Phi'_1, \Phi'_2), \quad \rho_0 = (\rho^1, \rho^2), \\
 w_{3zz} &= \Psi''_3(z)/2 + S\tilde{\rho}_3/4, \quad w_{3z\bar{z}} = \tilde{\rho}_3/4, \quad T_{jk}v = i[d_{2j+\mu-2,k}^1 v_{\mu} + (-1)^{j+\mu} d_{2j+\mu-2,k}^2 \bar{v}_{\mu}], \\
 S_{jk}(\Phi'_0; \rho_0) &= i[d_{2j+\mu-2}^1 v_{\mu,k} + (-1)^{j+\mu} d_{2j+\mu-2}^2 \bar{v}_{\mu,3-k}], \quad v_{j,1} \equiv v_{jz} = \Phi'_j(z) + S\rho^j(z), \\
 v_{j,2} \equiv v_{j\bar{z}} &= \rho^j, \quad d_{m,1}^j \equiv d_{mz}^j, \quad d_{m,2}^j \equiv d_{m\bar{z}}^j, \quad j, k = 1, 2, \quad m = \overline{1, 4}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2) К ОПЕРАТОРНОМУ УРАВНЕНИЮ

Интегральные представления (15), (17) для обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$ ($j = 1, 2$), $\Psi_k(z)$ ($k = \overline{1, 3}$) и произвольные функции $\rho^j(z)$ ($j = \overline{1, 3}$). Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (7) и граничным условиям (9), при этом правые части уравнений (7) и граничных условий (9) временно считаем известными. С этой целью соотношения (15), (17), (18) подставим в левые части системы (7) и граничных условий (9). В результате система уравнений (7) запишется в виде

$$\rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\Phi)(z) = f_c^j(a)(z) + f_{\chi}^j(a)(z) - F^j(z), \quad j = \overline{1, 3}, \quad z \in \Omega, \tag{19}$$

где через $h_1^j(\rho)(z)$ и $h_2^j(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$ в (8), которые содержат функции $\rho = (\rho^1, \rho^2, \rho^3)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ соответственно.

Граничные условия (9) с учётом представлений

$$\begin{aligned}
 S(T_j \Phi_0)^+(t) &= -(\bar{t}')^2 [d_{2j-1}^1(t) \Phi_1(t) + d_{2j}^1(t) \Phi_2(t)] + K_{0j}(\Phi_0)(t), \quad \Phi_0 = (\Phi_1, \Phi_2), \\
 K_{0j}(\Phi_0)(t) &= -\frac{d_{2j+\mu-2}^1(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau, t) - \psi(t, t)}{\tau - t} \Phi_{\mu}(\tau) d\tau - (-1)^{j+\mu} \frac{d_{2j+\mu-2}^2(t)}{2\pi i} \times \\
 &\times \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau, t) - \psi(t, t)}{\bar{\tau} - \bar{t}} \overline{\Phi_{\mu}(\tau)} d\bar{\tau} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{d_{2j+\mu-2}^1(\zeta) - d_{2j+\mu-2}^2(t)}{(\zeta - t)^2} \Phi_{\mu}(\zeta) d\xi d\eta - \\
 &- \frac{(-1)^{j+\mu}}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{d_{2j+\mu-2}^2(\zeta) - d_{2j+\mu-2}^1(t)}{(\zeta - t)^2} \overline{\Phi_{\mu}(\zeta)} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, \\
 \psi(\tau, t) &= (\bar{\tau} - \bar{t})/(\tau - t), \quad \psi(t, t) = (\bar{t}')^2,
 \end{aligned} \tag{20}$$

получаемых при помощи соотношений (12)–(14), формул (4.7), (4.9) из [34], стр. 28 и формул Сохоцкого [35], стр. 66, преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 (-1)^j d_{k\lambda}(t) Re[i^j t' \Phi_{\lambda}(t)] &- 2D_{\lambda+k-2}^{1212}(t) Re[i^{j-1} t' \Psi'_{\lambda}(t)] - 2D_{\lambda+k-2}^{1212}(t) Re[i^j t' K_{0\lambda}(\Phi_0)(t)] + \\
 + H_{3(k-1)+j} \rho(t) &= \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2, \\
 D_0^{1313}(t) Re[it' \Psi'_3(t)] &+ K_{03}(\Phi)(t) + H_3 \rho(t) = \varphi_{c3}(a)(t) + \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s),
 \end{aligned} \tag{21}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} H_{3(k-1)+j}\rho(t) &= \operatorname{Re}[(-i)^j t' T \rho^k(t)] - 2D_{k+\lambda-2}^{1212}(t) \operatorname{Re}\{i^j t'(I+S)(T_\lambda T \rho_0)^+(t)\}, \quad k, j = 1, 2, \\ H_3\rho(t) &= D_0^{1313}(t) \operatorname{Re}[it'(T\tilde{\rho}_3(t)/2 + TT_2T\rho_0(t))], \\ K_{03}(\Phi)(t) &= D_0^{1313}(t) \operatorname{Re}\{t'[\Psi_2(t) + iTT_2\Phi_0(t)]\}; \\ d_{kj}(t) &= (-1)^{j-1}[2(-1)^\lambda D_{\lambda+k-2}^{1212}(t)d_{2\lambda+j-2}^2(t) + 3 - k - j], \quad k, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (22)$$

I — тождественный оператор, операторы T , S , T_λ и функции $d_j^k(t)$ определены в (12), (13), (14), (16) соответственно; $\Phi_\lambda(t) \equiv \Phi_\lambda^+(t)$, $t \in \Gamma$; символ $\Phi_\lambda^+(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Phi_\lambda(z)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$ изнутри области Ω .

Таким образом, для определения функций $\rho^j \in L_p(\Omega)$ ($j = \overline{1, 3}$), $\Phi_k(z) \in C_\alpha(\overline{\Omega})$ ($k = 1, 2$), $\Psi_j(z) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$ ($j = \overline{1, 3}$) получили систему уравнений (19), (21). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями:

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \Theta(\mu_{2k})(z) \equiv \Phi_k(\mu_{2k})(z), \quad k = 1, 2, \quad \Psi_j'(z) = i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta(\mu_{2j-1})(z) \equiv \\ &\equiv \Psi_j'(\mu_{2j-1})(z), \quad j = \overline{1, 3}, \quad \Theta(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\tau) d\tau}{\tau'(\tau - z)}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mu_j(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ ($j = \overline{1, 5}$) — произвольные действительные функции, $\tau' = d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ — элемент длины дуги кривой Γ .

Для функций $\Psi_j(z)$ ($j = \overline{1, 3}$) имеем представления:

$$\begin{aligned} \Psi_j(z) &= i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta^0(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j} \equiv \Psi_j(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j}, \quad j = \overline{1, 3}, \\ \Theta^0(f)(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau'} \ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau, \end{aligned} \quad (24)$$

где c_j ($j = \overline{1, 6}$) — произвольные действительные постоянные, под $\ln(1 - z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0 \in \overline{\Omega}$.

Постоянную c_2 определим так, чтобы $w_1(0, 0) = 0$. Тогда с учётом соотношений (24) представления (15), (17) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v_j^0(z) &= v_j^0(\mu^j; \rho_0)(z) + c_{2j-1} + i(j-1)c_{2j}, \quad j = 1, 2, \\ w_3(z) &= w_3(\mu_5; \rho_3)(z) + c_5, \quad \mu^j = (\mu_{2j-1}, \mu_2, \mu_4), \\ v_j^0(\mu^j; \rho_0)(z) &= \Psi_j(\mu_{2j-1})(z) + iTT_j v(\mu_0; \rho_0)(z) - i(2-j) \operatorname{Re}[TT_1 v(\mu_0; \rho_0)(0)], \quad j = 1, 2, \\ \mu_0 &= (\mu_2, \mu_4), \quad \rho_0 = (\rho^1, \rho^2), \quad w_3(\mu_5; \rho_3)(z) = \operatorname{Re}[\Psi_3(\mu_5)(z)] - \tilde{T}\tilde{\rho}_3, \\ v(\mu_0; \rho_0) &= (v_1(\mu_2; \rho^1), v_2(\mu_4; \rho^2)), \quad v_j(\mu_{2j}; \rho^j) \equiv v_j(\Phi_j(\mu_{2j}); \rho^j), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (25)$$

где оператор $v_j(\Phi_j; \rho^j)$ определён в (12).

Используя формулы Сохоцкого [35], стр. 66, находим $\Phi_k(t)$ ($k = 1, 2$), $\Psi_j'(t)$ ($j = \overline{1, 3}$), $t \in \Gamma$. Подставляя их выражения, а также представления (24), (25) в систему (19), (21), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho \in L_p(\Omega)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) \in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\mu)(z) &= f_c^j(a)(z) + f_\chi^j(a)(z) + g_c^j(z) - F^j(z), \quad z \in \Omega, \quad j = \overline{1, 3}, \\ \sum_{n=1}^5 \left[a_{jn}(t) \mu_n(t) + b_{jn}(t) \int_\Gamma \frac{\mu_n(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] &+ K_j \mu(t) + H_j \rho(t) = \\ &= \varphi_{cj}(a)(t) + \varphi_{\chi j}(a)(t) + g_c^{3+j}(t) - F^{3+j}(t), \quad t \in \Gamma, \quad j = \overline{1, 5}, \end{aligned} \quad (26)$$

в которой приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
K_{3(n-1)+j}\mu(t) &= (-1)^j d_{n\lambda}(t) \{ \operatorname{Re}[i^j t' \Theta(\mu_{2\lambda})(t)] - i \operatorname{Re}(i^{j-1}) \Theta(\tau' \mu_{2\lambda})(t) \} + \\
&+ 2D_{\lambda+n-2}^{1212}(t) \{ \operatorname{Re}[i^{j+1} t' \Theta(\mu_{2\lambda-1})(t)] - i \operatorname{Re}(i^j) \Theta(\tau' \mu_{2\lambda-1})(t) - \operatorname{Re}[i^j t' K_{0\lambda}(\mu_0)(t)] \}, \\
n, j &= 1, 2, \quad K_3\mu(t) = K_{03}(\mu)(t) - D_0^{1313}(t) \operatorname{Re}[t' \Theta(\mu_5)(t)]; \\
g_c^2(z) &= D_0^{1313}(c_4 + ic_3)/2, \quad g_c^3(z) = -c_4 D_{0\alpha^1}^{1313} - c_3 D_{0\alpha^2}^{1313}, \\
g_c^6(t) &= D_0^{1313}(t)(c_4 d\alpha^2/ds - c_3 d\alpha^1/ds), \quad g_c^1(z) = g_c^{3+j}(t) \equiv 0, \quad j = 1, 2, 4, 5; \\
a_{3(k-1)+j}{}_{2\lambda}(t) &= (-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re}(i^j)/2, \quad b_{3(k-1)+j}{}_{2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re}(i^{j-1})/(2\pi), \\
a_{3(k-1)+j}{}_{2\lambda-1}(t) &= -D_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re}(i^{j-1}), \quad b_{3(k-1)+j}{}_{2\lambda-1}(t) = D_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re}(i^j)/\pi, \\
k, j, \lambda &= 1, 2, \quad a_{35}(t) = -D_0^{1313}(t)/2;
\end{aligned} \tag{27}$$

остальные a_{jk} , b_{jk} равны нулю; здесь $h_2^j(\mu)(z) \equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_0)(t) \equiv K_{0j}(\Phi_0(\mu_0))(t)$, $j = 1, 2$; $K_{03}(\mu)(t) \equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu) = (\Phi_1(\mu_2), \Phi_2(\mu_4), \Psi_1(\mu_1), \Psi_2(\mu_3), \Psi_3(\mu_5))$; операторы K_{0j} ($j = \overline{1, 3}$) определены в (20), (22).

Справедлива следующая лемма [33].

Лемма 1. Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:

- 1) $h_1^j(\rho)$ ($j = \overline{1, 3}$) — линейные вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$;
- 2) $h_2^j(\mu)$ ($j = \overline{1, 3}$) — линейные вполне непрерывные операторы из $C_{\nu'}(\Gamma) \forall \nu' \in (0, 1)$ в $L_p(\Omega)$;
- 3) $K_j \mu$ ($j = \overline{1, 5}$) — линейные вполне непрерывные операторы из $C_{\nu'}(\Gamma) \forall \nu' \in (0, 1)$ в $C_\gamma(\Gamma) \forall \gamma < \beta/2$;
- 4) $H_j \rho$ ($j = \overline{1, 5}$) — линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_{\alpha'}(\Gamma) \forall \alpha' < \alpha$ и ограниченные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\Gamma)$;
- 5) имеют место включения $f_c^j(a)(z)$, $f_\chi^j(a)(z)$, $F^j(z)$, $g_c^j(z)$ ($j = \overline{1, 3}$) $\in L_p(\Omega)$; $\varphi_{cj}(a)(t)$, $\varphi_{\chi j}(a)(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $F^{3+j}(t)$, $g_c^6(t)$, $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $j, k = \overline{1, 5}$.

Исследуем разрешимость системы уравнений (26) в пространстве $L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$, $\alpha' < \alpha$. Заметим, что любое решение $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (26) в силу леммы 1 принадлежит пространству $L_p(\Omega) \times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ из (27), вычисляем определитель

$$\det[A(t) - \pi i B(t)] = D_0^{1313} \delta_1 (a_1^2 - a_0 a_2) / (32 \delta_0), \quad a_n = D_n^{1111} + D_n^{1122}, \quad n = 0, 1, 2,$$

где δ_0, δ_1 определены в (16), а $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ — квадратные матрицы пятого порядка. Итак, $\det[A(t) - \pi i B(t)] \neq 0$ на Γ и для индекса системы (26) получаем

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{\det(A - \pi i B)}{\det(A + \pi i B)} \right]_\Gamma = 0$$

(здесь символ $[\arg \varphi]_\Gamma$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (26) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ — решение системы (26) при нулевой правой части. Этому решению по формулам (23), (24), (25) с постоянными $c_j = 0$ соответствуют функции w_j ($j = \overline{1, 3}$), ψ_k ($k = 1, 2$). Эти функции, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (7) ($f_c^j + f_\chi^j - F^j \equiv 0$, $j = \overline{1, 3}$) и однородным линейным граничным условиям (9) ($\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} - F^{3+j} \equiv 0$, $j = \overline{1, 5}$). Действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (7) умножим соответственно на w_1 и w_2 , второго уравнения — соответственно на ψ_1 и ψ_2 , а третье уравнение — на w_3 . После этого проинтегрируем по области

Ω и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий (9) получаем, что $w_j (j = \overline{1, 3})$, $\psi_k (k = 1, 2)$ удовлетворяют системе

$$\nu_{j1\alpha^1} = 0, \quad \nu_{j2\alpha^2} = 0, \quad \nu_{j1\alpha^2} + \nu_{j2\alpha^1} = 0, \quad w_{3\alpha^j} + \psi_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

решение которой имеет вид

$$w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad w_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad w_3 = -c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6, \quad \psi_1 = c_4, \quad \psi_2 = c_5, \quad (28)$$

где c_j — произвольные действительные постоянные, функции ν_{jk} определены в (8).

Так как $\Psi_j(0) = 0$ ($j = \overline{1, 3}$), $w_3(0) = 0$, то из (28) будем иметь: $w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1$, $w_2 = c_0\alpha^1 + c_2$, $w_3 = \psi_1 = \psi_2 \equiv 0$. Тогда $v_j(z) = 2ic_0D_{j-1}^{1212}$, $j = 1, 2$ и из уравнений (11) следуют равенства

$$\rho^j(z) = 2ic_0D_{j-1}^{1212}, \quad j = 1, 2, \quad \rho^3(z) \equiv 0, \quad z \in \Omega. \quad (29)$$

Используя формулы (12), (15), (17) и представление для v_{jz}^0 в (18), находим $\Phi_k(z)$ ($k = 1, 2$), $\Psi'_j(z)$ ($j = \overline{1, 3}$) и подставляя их в (23), получаем

$$\begin{aligned} \mu_1(t)/t' - c_0(\bar{t}')^2 &= F_1^-(t), \quad \mu_{2j}(t)/t' - 2ic_0D_{j-1}^{1212}(t) = F_{2j}^-(t), \quad j = 1, 2, \\ \mu_{2j-1}(t)/t' &= F_{2j-1}^-(t), \quad j = 2, 3, \end{aligned}$$

где $F_j^-(t)$ — граничные значения функции $F_j^-(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F_j^-(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана—Гильберта с краевым условием $Re[it' F_j^-(t)] = f_j^-(t)$, $j = \overline{1, 5}$, где $f_1^-(t) = c_0Re(it')$, $f_{2j}^-(t) = 2c_0D_{j-1}^{1212}(t)Ret'$, $j = 1, 2$, $f_{2j-1}^-(t) = 0$, $j = 2, 3$. Используя решение этой задачи [36], стр. 253, для функций $\mu_j(t)$ получаем представления

$$\mu_j(t) = c_0\mu_j^0(t) + \beta_{0j}\mu_j^1(t), \quad j = 1, 2, 4, \quad \mu_j(t) = \beta_{0j}\mu_j^1(t), \quad j = 3, 5, \quad (30)$$

где $\mu_j^k(t)$ — известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$; c_0, β_{0j} — произвольные действительные постоянные.

Решения (29), (30) показывают, что однородная система уравнений (26) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (19) умножим соответственно на действительные функции, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$ и проинтегрируем по области Ω , а левые части уравнений в (21) умножим на действительные функции $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5 \in C_\alpha(\Gamma)$, проинтегрируем по кривой Γ . После этого их сложим и приравняем нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi'_k(z)$ их выражениями из (23), (24) с постоянными, равными нулю, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, при помощи традиционных рассуждений после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений

$$\begin{aligned} \overline{v^j(z)} - T_{3+j}v(z) + 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) &= 0, \quad j = 1, 2, \quad ReT_3v(z) = 0, \quad z \in \Omega, \\ Re\{i[T_{3+j}v(t) - 2\Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)]\} &= 0, \quad j = 1, 2, \quad Re[Tg(v)(t) + \Theta^-(\tau'D_0^{1313}\nu_3)(t)] = 0, \\ Re\{T[D_{\lambda+j-2\bar{z}}^{1212}v^\lambda](t) - 2\Theta^-(\tau'D_{\lambda+j-2}^{1212}\nu^\lambda)(t) + (j-1)[iT^0g(v)(t) - T_\Gamma^0(D_0^{1313}\tau'\nu_3)(t)]\} &= 0, \quad (31) \\ t \in \Gamma, \quad j = 1, 2; \quad v^j &= v_{3j-2} + iv_{3j-1}, \quad \nu^j = \nu_{3j-2} + i\nu_{3j-1}, \quad j = 1, 2, \\ v^3 &= v_3, \quad \nu^3 = \nu_3. \end{aligned}$$

В уравнениях (31) приняты обозначения:

$$T_3v(z) = -2Tg(v)(z) + 2D_0^{1313}(z)v_3(z) - 2\Theta(\tau'D_0^{1313}\nu_3)(z),$$

$$T_{3+j}v(z) = 2Td_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + Td_{2+j}[T_3v](z), \quad v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5),$$

$$S_j v(z) = S[D_{j+\lambda-2\zeta}^{1212}v^\lambda](z) - D_{j+\lambda-2z}^{1212}v^\lambda(z) - 2\Theta'(\tau'D_{j+\lambda-2}^{1212}\nu^\lambda)(z), \quad j = 1, 2,$$

$$g(v)(z) = D_{0\bar{z}}^{1313}(z)v_3(z) - D_0^{1313}(z)v^2(z)/4, \quad T^0 f(z) = -\frac{1}{\pi i} \iint_{\Omega} f(\zeta) \ln \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) d\xi d\eta,$$

$$T_{\Gamma}^0 f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\tau) \ln \left(1 - \frac{\tau}{z}\right) d\sigma, \quad \Theta'(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau'(\tau - z)^2};$$

$\Theta^-(f)(t)$ — граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$ извне Ω ; операторы Tf , Sf , $d_j[f]$, $\Theta(f)$ определены в (12), (13), (16), (23) соответственно.

Система (31), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим их явные выражения. Далее в (31) под $v \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, ν_j ($j = \overline{1, 5}$) $\in C_\alpha(\Gamma)$ будем подразумевать некоторое её решение.

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D_j^{1212}(j = 0, 1, 2), \quad D_0^{1313} \in W_p^{(2)}(\Omega). \quad (32)$$

Тогда получаем [33], что

$$v^j(t) = -2\nu^j(t), \quad j = 1, 2, \quad v_3(t) = \nu_3(t), \quad t \in \Gamma \quad (33)$$

и вектор $\tilde{v} = (v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ есть решение однородной системы линейных уравнений в (7), удовлетворяющее однородным линейным граничным условиям в (9). Следовательно, в соответствии с (28) для компонент вектора $\tilde{v}$ получим следующие представления:

$$v_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad v_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad v_3 = (-c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6)/2, \quad v_4 = c_4, \quad v_5 = c_5,$$

где c_j — произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и v_k связаны друг с другом формулами (33). Следовательно, решение $(v, \tilde{\nu})^T$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $\tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$ союзной системы (31) можно представить в виде $(v, \tilde{\nu})^T = c_0\gamma_1 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_3 + c_4\gamma_4 + c_5\gamma_5 + c_6\gamma_6$, где $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \dots, \gamma_{k10})$ ($k = \overline{1, 6}$) — линейно независимые решения системы (31). Тогда для разрешимости системы (26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \{ \text{Re}[(f_c^1 + f_\chi^1 + g_c^1 - F^1)(z)(\gamma_{k1} - i\gamma_{k2})(z) + (f_c^2 + f_\chi^2 + g_c^2 - F^2)(z)(\gamma_{k4} - i\gamma_{k5})(z)] + \\ & \quad + (f_c^3 + f_\chi^3 + g_c^3 - F^3)(z)\gamma_{k3}(z) \} d\alpha^1 d\alpha^2 + \\ & \quad + \sum_{j=1}^5 \int_{\Gamma} (\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} + g_c^{3+j} - F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t) ds = 0, \quad k = \overline{1, 6}, \end{aligned}$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} R^j d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} P^j ds - \iint_{\Omega} \kappa_j [T^{j3}(\gamma) + T^{j\mu}(\gamma)\omega_{\mu}] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1, 2, \\
& \iint_{\Omega} (R^1 \alpha^2 - R^2 \alpha^1) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (P^1 \alpha^2 - P^2 \alpha^1) ds - \\
& \quad - \iint_{\Omega} \alpha^2 \kappa_1 [T^{1\mu}(\gamma)\omega_{\mu} + T^{13}(\gamma)] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \\
& \iint_{\Omega} (\alpha^j R^3 - L^j) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (\alpha^j P^3 - N^j) ds + \\
& \quad + \iint_{\Omega} \alpha^j \kappa_1 T^{11}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 - \iint_{\Omega} T^{j\mu}(\gamma)\omega_{\mu} d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1, 2, \\
& \iint_{\Omega} R^3 d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} P^3 ds + \iint_{\Omega} \kappa_1 T^{11}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

где R^j , P^j ($j = \overline{1, 3}$), L^k , N^k ($k = 1, 2$) — компоненты внешних сил, γ — произвольно фиксированный вектор деформации, ω_{μ} — произвольно фиксированная функция.

При выполнении условий (34) общее решение системы (26) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
(\rho, \mu) &= (\rho_c, \mu_c)(a) + (\rho_{\chi}, \mu_{\chi})(a) + (\rho_*, \mu_*) + (\rho_F, \mu_F), \quad (\rho_c, \mu_c)(a) = \Re f_c(a), \\
(\rho_{\chi}, \mu_{\chi})(a) &= \Re f_{\chi}(a), \quad (\rho_*, \mu_*) = \Re g_c + (\tilde{\rho}, \tilde{\mu}), \quad (\rho_F, \mu_F) = -\Re F,
\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$f_c(a) = (f_c^1, f_c^2, f_c^3, \varphi_{c1}, \dots, \varphi_{c5}), \quad f_{\chi}(a) = (f_{\chi}^1, f_{\chi}^2, f_{\chi}^3, \varphi_{\chi 1}, \dots, \varphi_{\chi 5}), \quad g_c = (g_c^1, \dots, g_c^8),$$

$$F = (F^1, \dots, F^8); \quad \Re = (\Re_1, \dots, \Re_8);$$

$\Re_j$ ($j = \overline{1, 3}$) и $\Re_k$ ($k = \overline{4, 8}$) — линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega) \times C_{\alpha}(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_{\alpha}(\Gamma)$ соответственно; функции $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^3)$, $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_5)$ определены формулами (29), (30), а f_c^j , f_{χ}^j , φ_{ck4} , $\varphi_{\chi k}$, g_c^n , F^n — формулами в (8), (10), (27).

Выражения вектор-функций $\mu(t)$, $\rho(z)$ из (35) подставим в (25). Тогда задача (1), (2) сводётся к системе нелинейных уравнений относительно вектор-функции $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$, которую представим в виде операторного уравнения

$$a - L(a) - G(a) = a_* + \tilde{a}_F, \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned}
L &= (L_1, \dots, L_5), \quad G = (G_1, \dots, G_5), \quad a_* = (w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*}), \\
\tilde{a}_F &= (\tilde{w}_{1F}, \tilde{w}_{2F}, \tilde{w}_{3F}, \tilde{\psi}_{1F}, \tilde{\psi}_{2F}), \quad L_{3(n-1)+j}(a) = -Re[i^j v_n^0(\mu_c^n(a); \rho_{0c}(a))], \\
G_{3(n-1)+j}(a) &= -Re[i^j v_n^0(\mu_{\chi}^n(a); \rho_{0\chi}(a))], \quad n, j = 1, 2; \quad L_3(a) = w_3(\mu_{c5}(a); \rho_{c3}(a)), \\
G_3(a) &= w_3(\mu_{\chi 5}(a); \rho_{\chi 3}(a)), \quad w_{j*} = -Re[i^j v_1^0(\mu_*^1; \rho_{0*})] + (j-1)c_1, \\
\tilde{w}_{jF} &= -Re[i^j v_1^0(\mu_F^1; \rho_{0F})], \quad \psi_{j*} = -Re[i^j v_2^0(\mu_*^2; \rho_{0*})] + c_{5-j}, \quad \tilde{\psi}_{jF} = -Re[i^j v_2^0(\mu_F^2; \rho_{0F})], \\
j &= 1, 2, \quad w_{3*} = w_3(\mu_{*5}; \rho_{*3}), \quad \tilde{w}_{3F} = w_3(\mu_{F5}; \rho_{F3}); \quad \mu_c^j = (\mu_{c2j-1}, \mu_{c2}, \mu_{c4}), \\
\mu_{\chi}^j &= (\mu_{\chi 2j-1}, \mu_{\chi 2}, \mu_{\chi 4}), \quad \mu_*^j = (\mu_{*2j-1}, \mu_{*2}, \mu_{*4}), \quad \mu_F^j = (\mu_{F2j-1}, \mu_{F2}, \mu_{F4}), \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

$$\rho_{0c} = (\rho_c^1, \rho_c^2), \quad \rho_{0\chi} = (\rho_\chi^1, \rho_\chi^2), \quad \rho_{0*} = (\rho_*^1, \rho_*^2), \quad \rho_{0F} = (\rho_F^1, \rho_F^2);$$

операторы $v_j^0(\mu^j; \rho_0)$ и $w_3(\mu_5; \rho_3)$ определены в (12), (25).

Отметим, что функции $w_{j*}(z)$ ($j = \overline{1, 3}$), $\psi_{k*}(k = 1, 2)$ и $\tilde{w}_{jF}(z)$ ($j = \overline{1, 3}$), $\tilde{\psi}_{kF}$ ($k = 1, 2$) зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как нетрудно заметить, для функций $w_{j*}(z)$ ($j = \overline{1, 3}$), $\psi_{k*}(z)$ ($k = 1, 2$) имеют место представления (28).

4. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ (36)

Исследуем разрешимость уравнения (36) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда

- 1) $L(a)$ — линейный вполне непрерывный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$;
- 2) $G(a)$ — нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ($j = 1, 2$) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|G(a^1) - G(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} &\leq c(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \\ &\quad \|w_0^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_0^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2) \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \\ \|w_0^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 &= \|w_1^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_3^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2, \quad j = 1, 2; \end{aligned}$$

- 3) $a_*, \tilde{a}_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 2 из [32].

Уравнение $a - L(a) = 0$ имеет лишь нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Действительно, если $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$ — ненулевое его решение, то, как нетрудно заметить, a является решением системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Тогда, рассуждая как и в случае системы (26), приходим к тому, что вектор a удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} w_{1\alpha^1} - \kappa_1 w_3 &= 0, \quad w_{2\alpha^2} = 0, \quad w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} = 0, \quad \psi_{j\alpha^j} = 0, \quad j = 1, 2, \\ \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} &= 0, \quad w_{3\alpha^1} + \kappa_1 w_1 + \psi_1 = 0, \quad w_{3\alpha^2} + \psi_2 = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Решаем систему (37). При помощи четвёртого, пятого и шестого уравнений для ψ_1, ψ_2 получаем представления

$$\psi_1 = c_0 \alpha^2 + c_1, \quad \psi_2 = -c_0 \alpha^1 + c_2, \quad (38)$$

где c_0, c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные.

Интегрируя последнее уравнение в (37), имеем

$$w_3 = c_0 \alpha^1 \alpha^2 - c_2 \alpha^2 + c_3(\alpha^1), \quad (39)$$

где $c_3(\alpha^1)$ — произвольная действительная функция переменной α^1 .

Заметим, что из формул Петерсона—Кодацци [14], стр. 19 следует $\kappa_1 = \kappa_1(\alpha^1)$, т. е. $\kappa_1(\alpha^1)$ зависит только от α^1 . Принимая этот факт во внимание, предпоследнее уравнение в (37) дифференцируем по α^2 , последнее уравнение — по α^1 и полученные соотношения вычтем друг из друга. В результате получим $w_{1\alpha^2} = -2c_0/\kappa_1(\alpha^1)$. Интегрируя это соотношение и второе уравнение в (37) по переменной α^2 , будем иметь:

$$w_1 = -2c_0 \alpha^2 / \kappa_1(\alpha^1) + c_4(\alpha^1), \quad w_2 = c_5(\alpha^1), \quad (40)$$

где $c_4(\alpha^1), c_5(\alpha^1)$ — произвольные действительные функции переменной α^1 .

Выражения w_1, w_2 из (40) подставим в третье уравнение в (37). Получим $c'_5(\alpha^1) - 2c_0/\kappa_1(\alpha^1) = 0$, откуда находим $c_5(\alpha^1) = c_0\kappa_{10}(\alpha^1) + c_5$, следовательно, для w_2 имеем представление

$$w_2 = c_0\kappa_{10}(\alpha^1) + c_5, \quad \kappa_{10}(\alpha^1) = 2 \int_0^{\alpha^1} dt/\kappa_1(t), \quad (41)$$

где c_0, c_5 — произвольные действительные постоянные.

Теперь выражения функций w_1, w_2, w_3 из (39)–(41) подставим в первое и предпоследнее уравнения системы (37). В результате получим систему

$$c'_4(\alpha^1) - \kappa_1(\alpha^1)c_3(\alpha^1) + \alpha^2[c_0\kappa_0(\alpha^1) + c_2\kappa_1(\alpha^1)] = 0, \quad c'_3(\alpha^1) + \kappa_1(\alpha^1)c_4(\alpha^1) + c_1 = 0,$$

которая, как нетрудно видеть, эквивалентна системе

$$c'_4(\alpha^1) - \kappa_1(\alpha^1)c_3(\alpha^1) = 0, \quad c_0\kappa_0(\alpha^1) + c_2\kappa_1(\alpha^1) = 0, \quad c'_3(\alpha^1) + \kappa_1(\alpha^1)c_4(\alpha^1) + c_1 = 0, \quad (42)$$

где $\kappa_0(\alpha^1) = 2\kappa'_1(\alpha^1)/\kappa_1^2(\alpha^1) - \alpha^1\kappa_1(\alpha^1) \in C(\bar{\Omega})$.

Принимая во внимание условие (b), нетрудно показать, что функции $\kappa_0(\alpha^1)$ и $\kappa_1(\alpha^1)$ линейно независимы. Тогда из второго уравнения в (42) получим $c_0 = c_2 = 0$. Теперь уравнения в (42) интегрируем по переменной α^1 и из полученных соотношений исключим функцию $c_3(\alpha^1)$. В результате относительно функции $c_4(\alpha^1)$ получим интегральное уравнение Вольтерра вида

$$c_4(\alpha^1) + \int_0^{\alpha^1} \kappa(\alpha^1, t)c_4(t)dt = f(\alpha^1), \quad \kappa(\alpha^1, t) = \kappa_1(t) \int_t^{\alpha^1} \kappa_1(\tau)d\tau, \quad (43)$$

$$f(\alpha^1) = c_4(0) + c_3(0)\kappa_{11}(\alpha^1) - c_1\kappa_{12}(\alpha^1), \quad \kappa_{1j}(\alpha^1) = \int_0^{\alpha^1} t^{j-1}\kappa_1(\tau)d\tau, \quad j = 1, 2.$$

Уравнение в (43) решаем методом последовательных приближений. Его решение даётся формулой

$$c_4(\alpha^1) = f(\alpha^1) + \int_0^{\alpha^1} \Gamma(\alpha^1, t)f(t)dt \equiv Af(\alpha^1), \quad \Gamma(\alpha^1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^{(n)}(\alpha^1, t), \quad (44)$$

$$\kappa^{(n+1)}(\alpha^1, t) = - \int_t^{\alpha^1} \kappa(\alpha^1, \tau)\kappa^{(n)}(\tau, t)d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \kappa^{(1)}(\alpha^1, t) = -\kappa(\alpha^1, t);$$

здесь $\Gamma(\alpha^1, t)$ — резольвента ядра $\kappa(\alpha^1, t)$.

Функция $c_3(\alpha^1)$ через функцию $c_4(\alpha^1)$ выражается формулой

$$c_3(\alpha^1) = c_3(0) - c_1\alpha^1 - \int_0^{\alpha^1} \kappa_1(t)c_4(t)dt. \quad (45)$$

Подставляя выражение $c_4(\alpha^1)$ из (44) в (45), с учётом выражения $f(\alpha^1)$ в (43) для решения

системы (42) получаем представления

$$\begin{aligned} c_4(\alpha^1) &= c_1\beta_1(\alpha^1) + c_3\beta_2(\alpha^1) + c_4\beta_3(\alpha^1), \quad c_3(\alpha^1) = c_1\beta_4(\alpha^1) + c_3\beta_5(\alpha^1) + c_4\beta_6(\alpha^1), \\ \beta_1(\alpha^1) &= -A\kappa_{12}(\alpha^1), \quad \beta_2(\alpha^1) = A\kappa_{11}(\alpha^1), \quad \beta_3(\alpha^1) = A1(\alpha^1), \\ \beta_4(\alpha^1) &= -\alpha^1 - \int_0^{\alpha^1} \kappa_1(t)\beta_1(t)dt, \quad \beta_5(\alpha^1) = 1 - \int_0^{\alpha^1} \kappa_1(t)\beta_2(t)dt, \\ \beta_6(\alpha^1) &= - \int_0^{\alpha^1} \kappa_1(t)\beta_3(t)dt, \end{aligned} \quad (46)$$

оператор A определён в (44); $c_1, c_3 = c_3(0), c_4 = c_4(0)$ — произвольные действительные постоянные.

Если выражения функций $c_3(\alpha^1), c_4(\alpha^1)$ из (46) и значения постоянных $c_0 = c_2 = 0$ подставить в соотношения (38)–(41), то с учётом условия $w_1(0, 0) = 0$ для обобщённых перемещений будем иметь

$$w_1 = c_1\beta_1(\alpha^1) + c_3\beta_2(\alpha^1), \quad w_2 = c_5, \quad w_3 = c_1\beta_4(\alpha^1) + c_3\beta_5(\alpha^1), \quad \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = 0, \quad (47)$$

где c_1, c_3, c_5 — произвольные действительные постоянные.

Так как $\Psi_j(0) = 0, j = 1, 2, w_3(0, 0) = 0$, то используя формулы

$$\Psi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{v_j^0(t)}{t-z} dt, \quad j = 1, 2,$$

вытекающие из соотношений (15), получаем $c_1 = c_3 = c_5 = 0$, тогда $w_j = 0, j = \overline{1, 3}, \psi_k = 0, k = 1, 2$. Таким образом, уравнение $a - L(a) = 0$ имеет только нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Следовательно, существует обратный оператор $(I - L)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, с помощью которого уравнение (36) сведётся к эквивалентному уравнению

$$a - G_*(a) = a_c + a_F, \quad (48)$$

где $G_*(a) = (I - L)^{-1}G(a), a_c = (I - L)^{-1}a_*, a_F = (I - L)^{-1}\tilde{a}_F$.

Отметим, что вектор a_c является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям. Поэтому для компонент вектора a_c справедливы представления (47). Также отметим, что вектор a_F в (48) зависит только от внешних сил и $a_F = 0$, если внешние силы отсутствуют.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда

1) $G_*(a)$ — нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j)$ ($j = 1, 2$) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} &\leq c_*(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_0^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \\ &+ \|w_0^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2)\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad \|w_0^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 = \|w_1^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_3^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где c_* — известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

2) $a_c, a_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Справедливость леммы вытекает из леммы 2 с учётом указанных выше свойств операторов $(I - L)^{-1}, G$.

Исследуем разрешимость уравнения (48) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Используя лемму 3, для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ($j = 1, 2$), принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, получаем

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leq q_* \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_* = 2c_*r(1+r).$$

Предположим, что радиус r шара и внешние силы таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \quad \|a_c + a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1 - q_*)r. \quad (49)$$

Тогда к уравнению (48) можно применить принцип сжатых отображений [37], с. 146, согласно которому уравнение (48) в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное решение вида $a = \mathbb{R}(a_c + a_F) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, которое можно представить в виде

$$a = a_0 + a^*, \quad a_0 = \mathbb{R}(a_c + a_F) - \mathbb{R}(a_c), \quad a^* = \mathbb{R}(a_c), \quad (50)$$

где $\mathbb{R}$ — резольвента оператора G_* .

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, то $a_0 = 0$, поэтому $a = a^*$. Если вектор a^* обращает в нуль компоненты деформации γ_{jk}^n ($j, k = \overline{1, 3}, n = 0, 1$), то $a = a^*$ представляет собой вектор "жёстких смещений" оболочки. Необходимо отметить, что эти "жёсткие смещения" отличаются от реальных жёстких перемещений оболочки как абсолютно твёрдого тела.

Вернёмся к условиям разрешимости (34), в которых под $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем подразумевать решение задачи (1), (2), а функции ω_μ ($\mu = 1, 2$) определены в (3). Используя равенства (1) и (2), убеждаемся в том, что условия разрешимости (34), содержащие обобщённые перемещения, выполняются. Поэтому условия (34) сводятся к одному условию

$$\iint_{\Omega} R^2 d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} P^2 ds = 0. \quad (51)$$

Кроме того, если первое равенство в (2) умножить на функцию $\beta_2(\alpha^1)$, третье равенство — на функцию $\beta_5(\alpha^1)$, определённые в (46), после этого интегрировать по области Ω и сложить, то с учётом соотношений $\beta'_2 - \kappa_1 \beta_5 = 0$, $\beta'_5 + \kappa_1 \beta_2 = 0$ получим

$$\iint_{\Omega} (\beta_2 R^1 + \beta_5 R^3) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (\beta_2 P^1 + \beta_5 P^3) ds = 0. \quad (52)$$

Теперь первое равенство в (2) умножим на $\beta_1(\alpha^1)$, третье равенство — на $\beta_4(\alpha^1)$, предпоследнее — на единицу, интегрируем по области Ω и сложим. Используя соотношения $\beta'_1 - \kappa_1 \beta_4 = 0$, $\beta'_4 + \kappa_1 \beta_1 + 1 = 0$, будем иметь верное равенство

$$\iint_{\Omega} (\beta_1 R^1 + \beta_4 R^3 + L^1) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (\beta_1 P^1 + \beta_4 P^3 + N^1) ds + \iint_{\Omega} T^{1\mu} \omega_\mu d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,$$

которое в случае линейной задачи принимает вид

$$\iint_{\Omega} (\beta_1 R^1 + \beta_4 R^3 + L^1) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (\beta_1 P^1 + \beta_4 P^3 + N^1) ds = 0.$$

Отметим, что условие (52) является необходимым условием, а условие (51) — необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1), (2).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (32), (49), (52). Тогда для разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (51). В случае его выполнения задача (1), (2) имеет обобщённое решение $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 4/(2 - \beta)$ вида (50).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. М.: Наука, 1966.
2. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. М.: Наука, 1999.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
4. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелешвили М. О., Бургуладзе Т. В. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
5. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
6. Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В. Интегральные уравнения в теории упругости. СПб.: СПбГУ, 1994.
7. Александров А. Я., Соловьёв Ю. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978.
8. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
9. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
10. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
11. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
12. Съярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992.
13. Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1976. V. 63. P. 337–403.
14. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989.
15. Ворович И. И., Лебедев Л. П. К задаче равновесия пластины, подкреплённой рёбрами жёсткости // Прикл. матем. и механика. 1999. Т. 63, № 1. С. 87–92.
16. Ворович И. И., Лебедев Л. П. Некоторые вопросы механики сплошной среды и математические проблемы теории тонкостенных конструкций // Прикл. механика. 2002. Т. 38, № 4. С. 3–20.
17. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: ЛГУ, 1978.
18. Карчевский М. М. Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакреплённой оболочки // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2013. Т. 155, № 3. С. 105–110.
19. Карчевский М. М. Смешанный метод конечных элементов для неклассических граничных задач теории пологих оболочек // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, № 3. С. 322–335.
20. Кириченко В. Ф., Крысько В. А. О существовании решения одной нелинейной связанной задачи термоупругости // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 6. С. 1583–1588.
21. Кириченко В. Ф. О существовании решений в связанной задаче термоупругости для трёхслойных оболочек // Изв. вузов. Матем. 2012. № 9. С. 66–71.
22. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: КГУ, 1975.
23. Галимов К. З., Паймушин В. Н., Терегулов И. Г. Основания нелинейной теории оболочек. Казань: Фэн, 1996.
24. Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Чёрных К. Ф., Шамина В. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: СПбГУ, 2003.
25. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008.
26. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М.: Физматлит, 2008.

27. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Обобщённая модель Тимошенко—Рейсснера для многослойной пластины // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 22–35.
28. Еремеев В. А., Лебедев Л. П. О разрешимости краевых задач теории упругих микрополярных оболочек с жёсткими включениями // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 111–115.
29. Тимергалиев С. Н. К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 3. С. 373–386; DOI:10.1134/S0374064115030085
30. Тимергалиев С. Н. К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко // Прикл. матем. и механика. 2018. Т. 82, № 1. С. 98–113.
31. Тимергалиев С. Н. Метод интегральных уравнений исследования разрешимости краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих неоднородных оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 2. С. 239–255; DOI:10.1134/S037406411902
32. Тимергалиев С. Н. К проблеме разрешимости нелинейных краевых задач для произвольных изотропных пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Матем. 2021. № 4. С. 90–107; DOI:10.26907/0021-3446-2021-4-90-107
33. Тимергалиев С. Н. О существовании решений краевых задач для нелинейных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко в соболевском пространстве // Изв. вузов. Матем. 2022. № 4. С. 67–83; DOI:10.26907/0021-3446-2022-4-67-83
34. Векуа И. Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988.
35. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962.
36. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, 2-е изд. М.: Физматгиз, 1963.
37. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.

UDC 517.958:539.3

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONSHALLOW TIMOSHENKO-TYPE SHELLS WITH FREE EDGES

© 2023 S. N. Timergaliev

Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, 420043 Russia

E-mail: samat_tim@mail.ru

Received 13.03.2023, revised 12.11.2023, accepted 15.11.2023

Abstract. We study the existence of solutions of a boundary value problem for a system of nonlinear second-order partial differential equations for the generalized displacements under given nonlinear boundary conditions that describes the equilibrium state of elastic nonshallow isotropic inhomogeneous shells of zero Gaussian curvature with free edges in the framework of the Timoshenko shear model. The research method is based on integral representations for generalized displacements containing arbitrary functions that allow the original boundary value problem to be reduced to a nonlinear operator equation for generalized displacements in the Sobolev space. The solvability of the operator equation is established using the contraction mapping principle.

Keywords: nonshallow Timoshenko-type shell of zero Gaussian curvature, nonlinear boundary value problem, partial differential equations, generalized solution, holomorphic function, operator equation, existence theorem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.411

REFERENCES

1. N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1966) [in Russian].
2. A. M. Lin'kov, *Complex Method of Boundary Integral Equations of Elasticity Theory* (Nauka, Moscow, 1999) [in Russian].
3. A. I. Lurie, *Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
4. V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Basheleishvili, and T. V. Burguladze, *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
5. V. Z. Parton and P. I. Perlin, *Methods of Mathematical Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1981) [in Russian].
6. S. G. Mikhlin, N. F. Morozov, and M. V. Paukshto, *Integral Equations in the Theory of Elasticity* (SPbGU, St. Petersburg, 1994) [in Russian].
7. A. Ya. Aleksandrov and Yu. I. Solov'ev, *Spatial Problems of the Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
8. G. Fichera, *Existence Theorems in Elasticity* (Berlin—Heidelberg—New York, Springer, 1972; Mir, Moscow, 1974).
9. G. Duvaut and J.-L. Lions, *Les in equations en mecanique et en physique* (Dunod, Paris, 1972; Nauka, Moscow, 1980).
10. N. F. Morozov, *Mathematical Issues in the Theory of Cracks* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].

11. A. M. Khludnev, *Problems of the Theory of Elasticity in Nonsmooth Domains* (Fizmatlit, Moscow, 2010) [in Russian].
12. P. G. Ciarlet, *Mathematical Theory of Elasticity* (Elsevier, Amsterdam, 1988; Mir, Moscow, 1992).
13. J. M. Ball, "Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity," *Arch. Ration. Mech. Anal.* **63**, 337–403 (1976).
14. I. I. Vorovich, *Mathematical Problems of the Nonlinear Theory of Shallow Shells* (Nauka, Moscow, 1989) [in Russian].
15. I. I. Vorovich and L. P. Lebedev, "The problem of the equilibrium of a plate reinforced with stiffeners," *J. Appl. Math. Mech.* **63** (1), 79–83 (1999).
16. I. I. Vorovich and L. P. Lebedev, "Some issues of continuum mechanics and mathematical problems in the theory of thin-walled structures," *Int. Appl. Mech.* **38** (4), 387–398 (2002).
17. N. F. Morozov, *Selected Two-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity* (Leningrad. Gos. Univ., Leningrad, 1978) [in Russian].
18. M. M. Karchevsky, "Study of the solvability of the nonlinear problem of the equilibrium of a shallow free shell," *Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* **155** (3), 105–110 (2013) [in Russian].
19. M. M. Karchevsky, "Mixed finite-element method for the nonclassical boundary problems of the theory of shallow shells," *Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* **158** (3), 322–335 (2016) [in Russian].
20. V. F. Kirichenko and V. A. Krys'ko, "On the existence of a solution of a nonlinear coupled problem of thermoelasticity," *Differ. Uravn.* **20** (6), 1583–1588 (1984) [in Russian].
21. V. F. Kirichenko, "Solvability of a connected thermoelasticity problem for three-layer shells," *Russ. Math.* **56** (9), 57–61 (2012).
22. K. Z. Galimov, *Fundamentals of the Nonlinear Theory of Thin Shells* (Kazan. Gos. Univ, Kazan, 1975) [in Russian].
23. K. Z. Galimov, V. N. Paimushin, and I. G. Teregulov, *Foundations of the Nonlinear Theory of Shells* (Fen, Kazan, 1996) [in Russian].
24. S. A. Kabrits, E. I. Mikhailovskii, P. E. Tovstik, K. F. Chernykh, and V. A. Shamina, *General Nonlinear Theory of Elastic Shells* (SPbGU, St. Petersburg, 2003) [in Russian].
25. V. A. Eremeev and L. M. Zubov, *Mechanics of Elastic Shells* (Nauka, Moscow, 2008) [in Russian].
26. S. K. Golushko and Yu. V. Nemirovskii, *Direct and Inverse Problems of Mechanics of Elastic Composite Plates and Shells of Revolution* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
27. N. F. Morozov, P. E. Tovstik, and T. P. Tovstik, "Generalized Timoshenko–Reissner model for a multilayer plate," *Mech. Solids* **51**, 527–537 (2016).
28. V. A. Eremeev and L. P. Lebedev, "On solvability of boundary value problems for elastic micropolar shells with rigid inclusions," *Mech. Solids* **55**, 852–856 (2020).
29. S. N. Timergaliev, "On the existence of solutions of a nonlinear boundary value problem for the system of partial differential equations of the theory of Timoshenko type shallow shells with free edges," *Differ. Equations* **51** (3), 73–386 (2015). <https://doi.org/10.1134/S0012266115030088>
30. S. N. Timergaliev, "On the problem of solvability of nonlinear equilibrium problems for shallow shells of Timoshenko type," *Prikl. Mat. Mekh.* **82** (1), 98–113 (2018) [in Russian].
31. S. N. Timergaliev, "Method of integral equations for studying the solvability of boundary value problems for the system of nonlinear differential equations of the theory of Timoshenko type shallow inhomogeneous shells," *Differ. Equations* **55** (2), 243–259 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0012266119020095>
32. S. N. Timergaliev, "On the problem of solvability of nonlinear boundary value problems for arbitrary isotropic shallow shells of the Timoshenko type with free edges," *Russ. Math.* **65** (4), 81–97 (2021). <https://doi.org/10.3103/S1066369X21040071>
33. S. N. Timergaliev, "On the existence of solutions to boundary value problems for nonlinear equilibrium equations of shallow anisotropic shells of Timoshenko type in Sobolev space," *Russ. Math.* **66** (4), 59–73 (2022). <https://doi.org/10.3103/S1066369X22040065>
34. I. N. Vekua, *Generalized Analytical Functions* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].

-
35. N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations* (Nauka, Moscow, 1962) [in Russian].
 36. F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems* (Fizmatgiz, Moscow, 1963) [in Russian].
 37. M. A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations* (Gostekhizdat, Moscow, 1956) [in Russian].