УДК 539.3:517.958

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В РАЗНОМОДУЛЬНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НА ЭТАПЕ ПРИНУДИТЕЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ ЕГО ГРАНИЦЫ ПОСЛЕ ОДНООСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ

© 2023 О. В. Дудко[a], А. А. Лаптева[b], В. Е. Рагозина[c]

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, г. Владивосток 690041, Россия

E-mails: [a]dudko@iacp.dvo.ru, [b]lanastal@mail.ru, [c]ragozina@vlc.ru

Поступила в редакцию 01.06.2023 г.; после доработки 10.07.2023 г.;
принята к публикации 09.08.2023 г.

Исследуется эволюция волновой картины в разномодульном упругом полупространстве при нестационарном одноосном кусочно-линейном движении его границы в режиме «растяжение — сжатие — останов». В решение краевой задачи включаются все случаи взаимодействия плоских волн деформаций, в том числе отражённых фронтов малой интенсивности. Выявлен ряд новых особенностей динамики одномерного упругого деформирования разномодульной среды, некоторые из которых (например, появление отражённой ударной волны на удалении от нагружаемой границы, циклические переходы узкой движущейся зоны от сжатого состояния в жёсткое и обратно, ступенчатое снижение уровня деформаций растяжения в приграничной зоне после остановки границы) можно получить при заданном граничном воздействии только с учётом эффектов отражения.

Ключевые слова: разномодульная упругость, нестационарное деформирование, кусочно-линейное краевое условие, одноосное растяжение-сжатие, принудительная остановка, сильный разрыв, столкновение волн деформаций, отражённая ударная волна.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.403

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что многие природные и конструкционные материалы в той или иной степени анизотропны. Одна из форм проявления анизотропии — разномодульность упругих свойств. Такое поведение характерно, например, для горных пород [1], различных композитов [2–4], некоторых металлических сплавов [5], дерева [6], кости [7] и т.д. Как правило, разномодульность твёрдых сред связывают с особенностями их внутренней структуры (микронеоднородностью, микровключениями, микронарушениями сплошности и т.п.).

Механика сплошных сред описывает деформируемые материалы на макроскопическом уровне. Гипотеза сплошности совместно с другими упрощающими предположениями относительно механических свойств среды (изотропией, однородностью, линейной гиперупругостью и т.п.) позволяет решать достаточно широкий круг статических и динамических задач деформирования [8], но при этом упускает из рассмотрения часть важных особенностей, связанных с внутренним строением реальных материалов. В определённом смысле переходным звеном между микро – и макро – подходами являются физико-механические модели сплошной среды, в которых частичный учёт структуры происходит за счёт специальных математических приёмов. Известные модели разномодульных сред основаны, например, на зависимости упругих модулей от напряжённо-деформированного состояния [9–11], неаналитических формах упругого потенциала [12, 13], особых конфигурациях реологических схем [14, 15] и т.д. Ключевым моментом в данных моделях является сохранение гипотезы сплошности.

Динамическое деформирование сред с разномодульной неаналитической нелинейностью в окрестности свободного состояния и материалов с гладкой связью «напряжения-деформации» имеет качественные различия. Так, в [16, 17] на примере анализа в терминах малого параметра показано, что даже слабая разномодульность приводит к отличиям нелинейной динамики плоских упругих волн от известных результатов классической (линейной) теории упругости. Поэтому тем более интересным в нестационарных задачах упругого деформирования представляется учёт разномодульности без ограничения малости этого эффекта. В нашей работе для описания разномодульных свойств принят неаналитический трехконстантный упругий потенциал [12], обобщённый в [13] до пятиконстантного варианта. Согласно [13], параметры разномодульности этих моделей не всегда могут считаться малыми относительно двух упругих модулей линейной части модельных соотношений. Исходя из этого, как и ранее [18–20], будем рассматривать динамику деформирования разномодульной упругой среды без привлечения приближенных методов малого параметра [21].

В [18] показано, что при одноосном нагружении разномодульная упругая среда [12] ведёт себя как линейная в зонах с неизменным типом деформированного состояния и имеет разные характеристические скорости процессов растяжения и сжатия. Физическая нелинейность выбранной модели в этом случае проявляется в образовании разнотипных (в том числе ударных) плоских волн деформаций. Даже двигаясь в одном направлении, фронты растяжения и сжатия могут взаимодействовать из-за разницы в их скоростях. Эта особенность динамики одномерных деформаций, отмеченная в [17, 19, 22], является общим физическим свойством разномодульной упругой среды и не зависит от выбора модели. Единственное попутное столкновение волновых фронтов, произошедшее на начальном этапе деформирования, может инициировать цепочку отражений и взаимодействий плоских волн друг с другом и с границами среды, увеличивая тем самым сложность волновой картины с течением времени. Подобные ситуации рассматривались в [19, 20, 22] для разномодульно-упругих полуограниченных тел при кусочно-линейном одномерном движении их границ в различных режимах, не имеющих этапов останова. Такая идеализация позволила представить процесс построения решения одномерных краевых задач динамики деформирования разномодульной упругой среды в форме алгоритма [20], работающего на произвольных временах.

В настоящей работе рассмотрим более реалистичный сценарий нестационарного одноосного нагружения разномодульного упругого полупространства, а именно, принудительную фиксацию его границы после предварительного знакопеременного импульса растяжения-сжатия. При этом сосредоточим основное внимание на новых, не отмеченных ранее особенностях, связанных с эффектами взаимодействия и отражения волновых фронтов. Покажем, что даже на этапе останова продолжает существовать и эволюционировать сложная волновая система, которая динамически перераспределяет деформации и перемещения в окрестности жёстко закреплённой границы разномодульного упругого полупространства.

1. МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим динамику адиабатического деформирования изотропной разномодульной упругой среды [12], предполагая малость деформаций и тем самым уравнивая эйлерово и лагранжево представления. В этом случае система определяющих уравнений без учёта массовых сил имеет вид

$$\begin{gathered}\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\partial \mathbf{e}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} \approx 1 - \epsilon_1, \quad \mathbf{e} = 0.5\left(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right), \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}, \quad W(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0.5\lambda\epsilon_1^2 + \mu\epsilon_2 - \nu\epsilon_1\sqrt{\epsilon_2}, \quad \epsilon_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{e}), \quad \epsilon_2 = \mathrm{tr}(\mathbf{e}^2).\end{gathered} \tag{1}$$

В (1) все неизвестные функции зависят от декартовых координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ и времени t, $\boldsymbol{\Sigma}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{e}$ — тензор малых деформаций с инвариантами ϵ_1 и ϵ_2, ρ/ρ_0 —

отношение актуальной и начальной плотности среды, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — вектор перемещений и вектор скорости перемещений точек среды соответственно, ∇ — набла-оператор, точкой над символом обозначена частная производная по времени. В упругом потенциале $W(\epsilon_1, \epsilon_2)$ константы λ, μ соответствуют линейной части модели, константа ν является параметром неаналитической нелинейности (разномодульности) модели [12] (для определённости выбираем материалы, у которых $\nu > 0$).

В одномерном случае малых деформаций ($x = x_1$, $\mathbf{u} = \{u(x,t), 0, 0\}$, $e = \partial u/\partial x = u_x$, $\rho \approx \rho_0$) из (1) можно записать линеаризованную форму уравнения движения и его решение в форме Д'Аламбера для продольного перемещения $u(x,t)$:

$$(c(e))^2 u_{xx} = \ddot{u}, \quad u(x,t) = f(t - x/c(e)) + g(t + x/c(e)). \tag{2}$$

В (2) неизвестные функции $f(t-x/c(e))$, $g(t+x/c(e))$ вычисляются с учётом краевых условий задачи. Характеристическая скорость $c(e)$ является кусочно-постоянной функцией деформаций и принимает различные значения в зависимости от типа деформированного состояния:

$$c(e) = \sqrt{\left(\lambda + 2\mu - 2\nu\frac{e}{|e|}\right)\rho^{-1}} = \begin{cases} a = \sqrt{(\lambda + 2\mu + 2\nu)\,\rho^{-1}}, & e < 0, \\ b = \sqrt{(\lambda + 2\mu - 2\nu)\,\rho^{-1}}, & e > 0, \end{cases} \quad \nu{>}0 \Rightarrow a{>}b. \tag{3}$$

При определённых краевых условиях (например, приложении разнополярного граничного импульса) решение уравнения движения (2) принимает обобщённую форму. Согласно [23], под обобщённым решением уравнения (2) будем понимать кусочно-гладкую функцию перемещений $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую дифференциальным законам сохранения всюду, кроме конечного числа плоских поверхностей сильных разрывов первого рода, на которых выполняются следствия интегральных законов сохранения. Таким образом, обобщённое решение объединяет зоны локальных решений, где перемещения гладкие и деформации непрерывные. Фронты сильных разрывов являются подвижными границами этих зон. Следствия интегральных законов сохранения — условия Гюгонио [23], связывающие локальные решения на плоском фронте сильного разрыва $x = D(t)$, для разномодульной упругой среды [12] с учётом малости деформаций можно записать в форме

$$\left((c^+)^2 - \dot{D}^2\right) e^+ = \left((c^-)^2 - \dot{D}^2\right) e^-, \tag{4}$$

$$u^- = u^+, \tag{5}$$

где $\dot{D} = \dot{D}(t)$ — скорость движения фронта $x = D(t)$, индексами «+» и «−» обозначены предельные значения функций в малых окрестностях $x \to D(t) \pm 0$ перед и за фронтом разрыва соответственно. Из уравнения (4) получаем общую формулу для скорости движения фронта сильного разрыва $x = D(t)$ в случае одномерных деформаций:

$$\dot{D}(t) = \sqrt{\frac{(c^+)^2 e^+ - (c^-)^2 e^-}{e^+ - e^-}}, \quad e^\pm = e^\pm(D(t), t). \tag{6}$$

Накладывая в (6) различные ограничения на значения e^+ и e^- ($e^+ \neq e^-$) аналогично [23], определяем свойства и скорости всех типов сильных разрывов, которые возможны в рамках линеаризованного варианта модели разномодульной упругой среды [12]:

1) если $e^+ e^- > 0$, то сильный разрыв движется с характеристической скоростью $\dot{D} = c^+ = c^-$, не изменяя тип деформированного состояния среды (т.е. $\dot{D} = b$ при $e^+ > 0$, $e^- > 0$; $\dot{D} = a$ при $e^+ < 0$, $e^- < 0$);

2) при $e^+ e^- = 0$ сильный разрыв движется с характеристической скоростью, но при этом он или является передним фронтом граничных возмущений ($e^+ = 0$, $e^- \neq 0$ и $\dot{D} = c^-$),

или переводит предварительно деформированную область в недеформированное состояние ($e^+ \neq 0$, $e^- = 0$ и $\dot{D} = c^+$);

3) если $e^+ > 0$ и $e^- < 0$, то сильный разрыв скачком изменяет тип деформаций с растяжения на сжатие и движется со скоростью $\dot{D} \in (b; a)$, отличной от характеристических скоростей (случай $e^+ < 0$ и $e^- > 0$ невозможен в силу требования неубывания энтропии на фронте сильного разрыва [24]).

Скорости перечисленных сильных разрывов, полученные из (6), согласуются с общей теорией решений уравнения движения разномодульной упругой среды [23]. Для обозначения сильных разрывов разных типов используем принятую в [23] терминологию и различные символы вместо $D(t)$: сильный разрыв первого типа — *простой разрыв* $x = \xi(t)$, второго типа — *полусигнотон* $x = \gamma(t)$, третьего типа — *ударная волна* $x = S(t)$. Аргумент t у функций-координат фронтов сильных разрывов для сокращения записи в дальнейшем будем опускать. Простые разрывы и полусигнотоны, которые движутся с характеристическими скоростями, пометим соответствующим нижним индексом: ξ_a, γ_a — быстрые фронты сжатия со скоростью a; ξ_b, γ_b — медленные фронты растяжения со скоростью b.

В [19, 20, 22] для разномодульной упругой среды показано, что взаимодействие двух попутных разнотипных фронтов сильных разрывов (когда более быстрый фронт настигает бегущий впереди более медленный) приводит к появлению пары расходящихся волн и новой зоны локального решения между ними. Таким образом, обобщённое решение уравнения (2) с переменной характеристической скоростью (3) может эволюционировать не только вследствие приложения динамической нагрузки на границе деформируемой среды, но и за счёт учёта всех эффектов столкновения и отражения волновых фронтов. Продемонстрируем это на примере решения нестационарной краевой задачи о движении границы разномодульного полупространства в режиме «растяжение — сжатие — останов». Описанную классификацию сильных разрывов используем в качестве исходных данных задачи.

2. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Полагаем, что до начала воздействия разномодульное упругое полупространство $x \geqslant 0$ было недеформированным. Пусть в момент времени $t = 0$ к границе $x = 0$ прикладывается нормальная нагрузка, которая при $t \in [0, t_2)$ действует в режиме одномерного растяжения, при $t \in [t_2, t_3)$ — в режиме одномерного сжатия, а с момента времени $t = t_3$ удерживает границу полупространства в одном положении.

Постановку задачи проведём в перемещениях. На рис. 1 представлены некоторые варианты кусочно-линейной функции граничного перемещения $u(0, t) = u_0(t)$, соответствующего указанному режиму нагружения «растяжение — сжатие — останов». Константой $K = u_0(t_3)$ обозначен уровень граничного перемещения, достигнутый к моменту остановки границы.

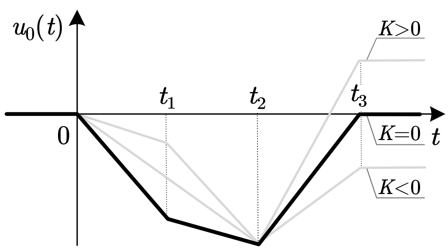

Рис. 1. Заданное граничное перемещение

Количество дополнительных узловых точек функции $u_0(t)$ на этапах растяжения и сжатия можно выбрать любым. Остановимся на четырехточечном варианте с одной дополнительной узловой точкой $t_1 \in (0; t_2)$ на этапе растяжения (рис. 1). Уравнение функции $u_0(t)$ запишем через угловые коэффициенты линейных участков:

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0), \quad k_0 = 0, \\ k_1 t, & t \in [0, t_1), \quad k_1 < 0, \\ k_2(t - t_1) + u_0(t_1), & t \in [t_1, t_2), \quad k_2 < 0, \\ k_3(t - t_2) + u_0(t_2), & t \in [t_2, t_3), \quad k_3 > 0, \\ K = u_0(t_3), & t \in [t_3, +\infty), \quad k_4 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Задавая граничное перемещение (7), саму координату границы $x = 0$ при решении задачи будем считать неизменной ввиду принятого предположения о малости деформаций и линеаризованной формы уравнения движения (5).

При кусочно-линейном движении границы перемещение в некоторой i-ой локальной зоне можно записать в виде линейной функции, учитывающей обе части решения Д'Аламбера (2):

$$u_i(x,t) = A_i + B_i(t - T_i) + C_i x, \quad x \in [L_i(t); R_i(t)], \quad t \geqslant T_i, \quad i = 1, 2, 3\ldots, \tag{8}$$

откуда

$$e_i(x,t) = \partial u_i(x,t)/\partial x = C_i.$$

В (8) $T_i \geqslant 0$ — момент времени возникновения i-ой локальной зоны, $L_i(t)$ и $R_i(t)$ — координаты её левой и правой границ: $L_i(t) = X_i + \dot{L}_i(t - T_i)$, $R_i(t) = X_i + \dot{R}_i(t - T_i)$, причём $L_i(t) \geqslant 0$ — фронт сильного разрыва или граница полупространства, $R_i(t) \geqslant L_i(t)$ — всегда фронт сильного разрыва, $X_i = L_i(T_i) = R_i(T_i)$ — начальная координата движущихся границ i-ой локальной зоны ($X_i \neq 0$, если это координата столкновения волновых фронтов, или $X_i = 0$, если новая зона растёт от границы полупространства). Три уравнения для вычисления неизвестных констант A_i, B_i, C_i в i-ой локальной зоне получаем, записывая условие непревывности перемещений (5) на границах $L_i(t)$, $R_i(t)$ и отдельно приравнивая коэффициенты при нулевой и первой степенях множителя $(t - T_i)$:

$$\begin{gathered} A_L + B_L(T_i - T_L) + C_L X_i = A_i + C_i X_i, \\ B_L + C_L \dot{L}_i = B_i + C_i \dot{L}_i, \quad B_R + C_R \dot{R}_i = B_i + C_i \dot{R}_i. \end{gathered} \tag{9}$$

Константы A_L, B_L, C_L, A_R, B_R, C_R в (9) известны из локальных решений $u_L(x,t)$ и $u_R(x,t)$ слева и справа от i-ой зоны, которые возникли в моменты времени $T_L < T_i$ и $T_R < T_i$ соответственно. Если у i-ой зоны какая-либо из границ — ударная волна, то для вычисления её неизвестной скорости к системе (9) необходимо добавить уравнение (6), записанное на соответствующей границе ($\dot{S} = \dot{L}_i$ или $\dot{S} = \dot{R}_i$).

Краевое условие (7) можно представить как линейную комбинацию кусочно-линейных функций с меньшим числом узловых точек. Для линейно-упругой среды это означает, что решение задачи с условием (7) при любом $t \in [0; +\infty)$ также будет линейной комбинацией решений с частями функции (7) на соответствующих интервалах времени. Покажем, что из-за существования разнотипных волновых фронтов и возможности их столкновения разномодульная упругая среда [12] не подчиняется такому правилу, несмотря на линеаризованую форму уравнения движения (2).

3. ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО РЕШЕНИЯ

Проследим за изменением функций $u(x,t)$, $e(x,t)$ во всей деформируемой области, которую фронты сильных разрывов делят на локальные зоны гладких перемещений и непрерывных деформаций. Обобщённое решение будем строить в виде объединения локальных решений (8) на последовательных этапах времени. В множество точек, разбивающих полуоткрытый интервал $t \in [0; +\infty)$ на этапы, включим T_i — моменты времени возникновения новых зон локальных решений (8), а именно: $\{0, t_1, t_2, t_3\}$ — узловые точки краевого условия (7) и $\{t_1^*, t_2^*, \ldots\}$ — моменты времени столкновения волновых фронтов между собой и с границей полупространства (если такие инциденты произойдут).

Рассмотрим волновую картину, которая формируется в разномодульном упругом полупространстве на «активном» этапе граничного перемещения (7) при $t \in [0; t_3]$. Сильные разрывы, последовательно возникающие на границе полупространства в моменты скачкообразного изменения углового коэффициента функции $u_0(t)$, назовём *первичными* и обозначим верхним индексом 0. Считаем, что константы разномодульной упругой среды [12] и параметры краевого условия (7) заданы так, чтобы в решении сначала возникли все первичные сильные разрывы, а затем произошло их первое попутное столкновение.

Тип каждого первичного сильного разрыва определяем согласно принятой классификации по известной предварительной деформации e^+ и неизвестному состоянию e^-, которое прогнозируем по актуальной части функции (7). Так, при $t = 0$ возникает медленный полусигнотон $\gamma_b^0 = bt$, несущий деформацию растяжения от границы в недеформированное полупространство: $e^+|_{\gamma_b^0} = 0$, $e^-|_{\gamma_b^0} > 0$. При $t = t_1$ появляется медленный простой разрыв $\xi_b^0 = b(t - t_1)$, который движется за γ_b^0, не меняя тип деформированного состояния среды: $e^+|_{\xi_b^0} > 0$, $e^-|_{\xi_b^0} > 0$, $e^+|_{\xi_b^0} \neq e^-|_{\xi_b^0}$ при $k_1 \neq k_2$. В момент времени $t = t_2$ возникает первичная ударная волна $S^0 = \dot{S}^0(t - t_2)$, скачком изменяющая состояние растяжения на сжатие: $e^+|_{S^0} > 0$, $e^-|_{S^0} < 0$. Её скорость $\dot{S}^0$ вычисляется из (6) при $c^+ = b$, $c^- = a$. Зона сжатия $x \in [0; S^0]$ развивается на этапе $t \in [t_2; t_3)$, затем при $t = t_3$ граница полупространства фиксируется: $v(0,t)|_{t \geqslant t_3} = 0$. В этот момент возникает ситуация, когда граничное перемещение постоянно $(u(0,t)|_{t \geqslant t_3} = u_0(t_3) = \text{const})$, а задняя граница зоны сжатия движется с характеристической скоростью $a > \dot{S}_0$ по динамическому полю $u(x,t)$ за ударной волной S_0. Непротиворечивым вариантом кусочно-линейного решения между этим «быстрым» последним фронтом сжатия и фиксированным перемещением на границе $x = 0$ является образование приграничной зоны растяжения, которую от зоны сжатия отделяет переходный растущий жёсткий слой $x \in [\gamma_{b0}^0; \gamma_{0a}^0]$ с нулевой деформацией (здесь и далее полусигнотонам-границам жёстких слоёв в нижнем индексе будем с нужной стороны приписывать ноль). Отметим, что появление движущегося жёсткого слоя как переходной области происходит и при фиксации границы разномодульной упругой среды, и в результате граничного импульса сжатия-растяжения [17,18,22].

Описанный пакет первичных сильных разрывов к некоторому моменту времени $\theta_1 = t_3 + \delta$ $(\delta \ll 1\text{c})$ уже полностью сформирован. Обобщённое решение $u^0(x,t)$, построенное в форме (8) для первичной волновой картины, объединяет пять локальных зон с различными деформированными состояниями $e_i^0(x,t)$ и существует в таком виде до первого столкновения волн:

$$u^0(x,t) = \begin{cases} A_1 + B_1 t + C_1 x, & x \in [\xi_b^0; \gamma_b^0], \quad t \geqslant 0, \\ A_2 + B_2(t - t_1) + C_2 x, & x \in [S^0; \xi_b^0], \quad t \geqslant t_1, \\ A_3 + B_3(t - t_2) + C_3 x, & x \in [\gamma_{0a}^0; S^0], \quad t \geqslant t_2, \\ A_4 + B_4(t - t_3) + C_4 x, & x \in [\gamma_{b0}^0; \gamma_{0a}^0], \quad t \geqslant t_3, \\ A_5 + B_5(t - t_3) + C_5 x, & x \in [0; \gamma_{b0}^0], \quad t \geqslant t_3, \end{cases} \qquad \begin{gathered} e_i^0(x,t) = C_i, \\ i = 1, 2, ..., 5, \end{gathered} \tag{10}$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = u_0(t_1), \quad A_3 = u_0(t_2), \quad A_4 = A_5 = K,$$

$$B_1 = k_1, \quad B_2 = k_2, \quad B_3 = k_3, \quad B_4 = B_3 + C_3 a, \quad B_5 = 0,$$

$$C_1 = -\frac{k_1}{b}, \quad C_2 = -\frac{k_2}{b}, \quad C_3 = -\frac{k_3 b + k_2(\dot{S}^0 - b)}{b\dot{S}^0}, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = \frac{B_4}{b},$$

$$\dot{S}^0 = \sqrt{a^2 - \frac{(a^2 - b^2)k_2/b}{k_2/b - N/a}}, \quad N = \frac{(a^2 + b^2)k_2}{ab} - \sqrt{\left(\frac{(a^2 + b^2)k_2}{ab}\right)^2 - 4k_3(2k_2 - k_3)}.$$

Коэффициенты A_i, B_i, C_i в (10) последовательно вычислены из систем уравнений (9), (6), записанных на границах первичных локальных зон с учётом актуальных частей условия (7).

После полного формирования первичной волновой картины в процесс изменения полей перемещений и деформаций включаются механизмы взаимодействия волн. В результате столкновений волновых фронтов возникают новые зоны локальных решений, ограниченные расходящимися *вторичными* сильными разрывами. Пользуясь стандартной терминологией, вторичную волну, бегущую к границе $x = 0$, назовём *отражённой* и отметим минусом в нижнем индексе. *Прямой* будем называть любую волну, движущуюся в сторону увеличения координаты x.

В [19, 20, 22] для нестационарных одномерных задач с кусочно-гладкой формой нестационарного краевого условия и линеаризованными соотношениями разномодульной упругости показано, что если актуальная волновая картина содержит более одной пары подходящих для столкновения фронтов сильных разрывов, то в процедуре решения задачи появляется *точка ветвления*. Так, в нашей задаче изменение первичной волновой картины $\{\gamma_{b0}^0\gamma_{0a}^0 S^0\xi_b^0\gamma_b^0\}$ может произойти при некотором $t_1^* > \theta_1$ в результате одного из двух инцидентов: «ударная волна S^0 догонит медленный простой разрыв ξ_b^0» или «быстрый полусигнотон γ_{0a}^0 догонит ударную волну S^0».

Момент времени столкновения двух фронтов $x_j(t) = X_j + \dot{x}_j(t - T_j)$, $x_k(t) = X_k + \dot{x}_k(t - T_k)$ вычисляется из условия совпадения их координат $x_j(t^*) = x_k(t^*)$:

$$t^* = \frac{X_j - X_k + \dot{x}_j T_j - \dot{x}_k T_k}{\dot{x}_j - \dot{x}_k}. \tag{11}$$

В (11) $\dot{x}_j \neq 0$, $X_j \neq 0$ и $\dot{x}_k \neq 0$, $X_k \neq 0$, если $x_j(t)$ и $x_k(t)$ — координаты сильных разрывов; $\dot{x}_j \neq 0$, $X_j \neq 0$ и $\dot{x}_k = 0$, $X_k = 0$, когда $x_k(t) = 0$ — граница полупространства, на которую падает волновой фронт $x_j(t)$.

Вычисляя по формуле (11) время столкновения для всех возможных в актуальной волновой картине инцидентов, выбираем среди них тот, для которого t^* имеет меньшее значение. Такой выбор необходимо делать всякий раз, когда при решении краевой задачи возникает очередная точка ветвления. Определившись с инцидентом, прогнозируем его результат — типы расходящихся вторичных сильных разрывов и тип деформированного состояния ($e > 0$, $e < 0$ или $e = 0$) в новой растущей локальной зоне между ними. «Старая» зона между волнами-участниками столкновения при этом исчезает. При построении прогноза учитываем свойства взаимодействующих сильных разрывов и уже известные деформированные состояния слева и справа от координаты столкновения. Используя (9) и (6) (при необходимости), строим решение (8) в новой i-ой локальной зоне и проверяем его корректность. Полученный результат считаем корректным (единственным), если выбранные фронты-границы новой зоны эволюционны [24], что в нашем случае выражается в выполнении неравенства $c^+ \leqslant |\dot{D}| \leqslant c^-$ для их скоростей. Согласно (3), в этом неравенстве значения $c^+ = c(e^+)$ слева и справа от i-ой зоны известны, а значение $c^- = c(e_i)$ зависит от искомого решения в i-ой зоне. Если новое локальное решение удовлетворяет указанному критерию, то переходим к выбору следующего инцидента в изменённой волновой картине. При нарушении эволюционности на какой-либо из границ i-ой зоны корректируем прогноз, заменяя неэволюционный вторичный сильный разрыв на пару попутных фронтов — быстрый и медленный полусигнотоны. По аналогии с [22] можно показать, что такая замена обеспечивает бездиссипативный переход от состояния e^+ к состоянию e_i через промежуточный жёсткий слой и удовлетворяет требованию неубывания энтропии [24]. В [20] подобная схема действий сведена к алгоритму поиска пути на графе для решения нестационарной краевой задачи о продольном деформировании полубесконечного разномодульного упругого стержня.

Применим описанный подход к решению нашей краевой задачи для разномодульной упругой среды с параметрами $\lambda = 19.8$ ГПа, $\mu = 26.9$ ГПа, $\nu = 15.3$ ГПа [13] и $\rho =$

7600 кг/м^3 [25]. Согласно (3), в этом случае характеристическая скорость $c(e)$ принимает значения $a = 3702.77$ м/с при сжатии и $b = 2378.63$ м/с при растяжении. Для краевого условия (7) зададим два набора параметров (см. таблицу), которые при указанных a, b удовлетворяют требованию отсутствия столкновений фронтов сильных разрывов до полного формирования первичной волновой картины.

Параметры краевого условия (7)

№	t_1 [$\cdot 10^{-3}$ с]	t_2 [$\cdot 10^{-3}$ с]	t_3 [$\cdot 10^{-3}$ с]	k_1 [м/с]	k_2 [м/с]	k_3 [м/с]	K [$\cdot 10^{-3}$ м]
I	0.3	0.5	0.8	−15.0	−2.50	16.67	0.0
II	0.1	0.5	0.7	−25.0	−6.25	2.50	−4.5

Обобщённые решения краевой задачи, полученные с выбранными параметрами граничного перемещения (см. таблицу), представим в графическом виде на характеристической плоскости $\{x - t\}$ (рис. 2). Аналитическую запись рекуррентной последовательности локальных решений здесь не приводим, так как при $t > \theta_1$ формулы для вычисления A_i, B_i, C_i и $\dot{S}$ становятся довольно громоздкими. Разнотипные сильные разрывы на рис. 2 обозначены сплошными линиями разного стиля: ударная волна — чёрная толстая линия, быстрые фронты сжатия — чёрные тонкие линии, медленные фронты растяжения — серые линии. Типы деформированного состояния отмечены фоном разной интенсивности: незакрашенные зоны соответствуют недеформированной части полупространства и жёстким слоям A, B, C, D и E, тёмный фон — зонам сжатия, светлый — областям растяжения 1 и 2. Мгновенные конфигурации волновой картины в выбранные моменты времени $t = \theta_1, \theta_2, \ldots$ выделены вертикальными линиями и соответствующими метками.

На рис. 3 показаны графики деформаций $e(\tilde{x}, \theta_i)$, соответствующие моментам времени $t = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6\}$ в первом решении (рис. 2(a)), а на рис. 4 — моментам времени $t = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ второго решения (рис. 2(b)). Для наглядности, на каждом графике ось абсцисс нормирована на координату переднего фронта возмущений ($\tilde{x} = x/\gamma_b(\theta_i)$, $\tilde{x}|_{\gamma_b(\theta_i)} = 1$ или $\tilde{x} = x/\gamma_a(\theta_i)$, $\tilde{x}|_{\gamma_a(\theta_i)} = 1$), ось ординат имеет степенной масштаб. Нормированные координаты фронтов сильных разрывов обозначены вертикальными пунктирными линиями и соответствующими надписями. Верхним индексом «$*$» отмечена ударная волна с изменённой скоростью $\dot{S}^* \neq \dot{S}^0$ ($b < \dot{S}^* < a$) после попутного столкновения с убегающим медленным или догоняющим быстрым фронтом.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализируя результаты вычислений, выделим ряд характерных особенностей этапа $t \in (t_3; +\infty)$ эволюции волновой картины в разномодульном упругом полупространстве при движении его границы в режиме «растяжение — сжатие — останов».

1) Первая особенность касается множества возможных взаимодействий волновых фронтов в решении задачи с кусочно-линейным краевым условием (7). Оказалось, что это множество ограничено и содержит всего восемь различных инцидентов (рис. 2), которые схематически опишем в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
E_1(S + \xi_b) = \xi_{-a} S^*, \qquad E_2(\gamma_{0a} + S) = \gamma_{-0a} S^*, \qquad E_3(S + \gamma_b) = \xi_{-a} \gamma_a, \\
E_4(\gamma_{0a} + \xi_{-a}) = \left[\begin{matrix} \gamma_{-0a}\xi_a & \text{(a)}, \\ \gamma_{-0b}\gamma_{b0}\gamma_{0a} & \text{(b)}, \end{matrix}\right. \qquad E_5(\gamma_{b0} + \gamma_{-0a}) = \left[\begin{matrix} S_{-}\xi_a & \text{(a)}, \\ \xi_{-b}\gamma_{b0}\gamma_{0a} & \text{(b)}, \end{matrix}\right. \\
E_6(\gamma_{b0} + S_{-}) = \xi_{-b}\gamma_{b0}\gamma_{0a}, \qquad E_7(\gamma_{b0} + \gamma_{-0b}) = \xi_{-b}\xi_b, \qquad E_8(0 + \xi_{-b}) = 0\xi_b.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Сильные разрывы в левой и правой частях каждого равенства (12) упорядочены по возрастанию координат. Слагаемые-аргументы в левой части — взаимодействующие фронты (или

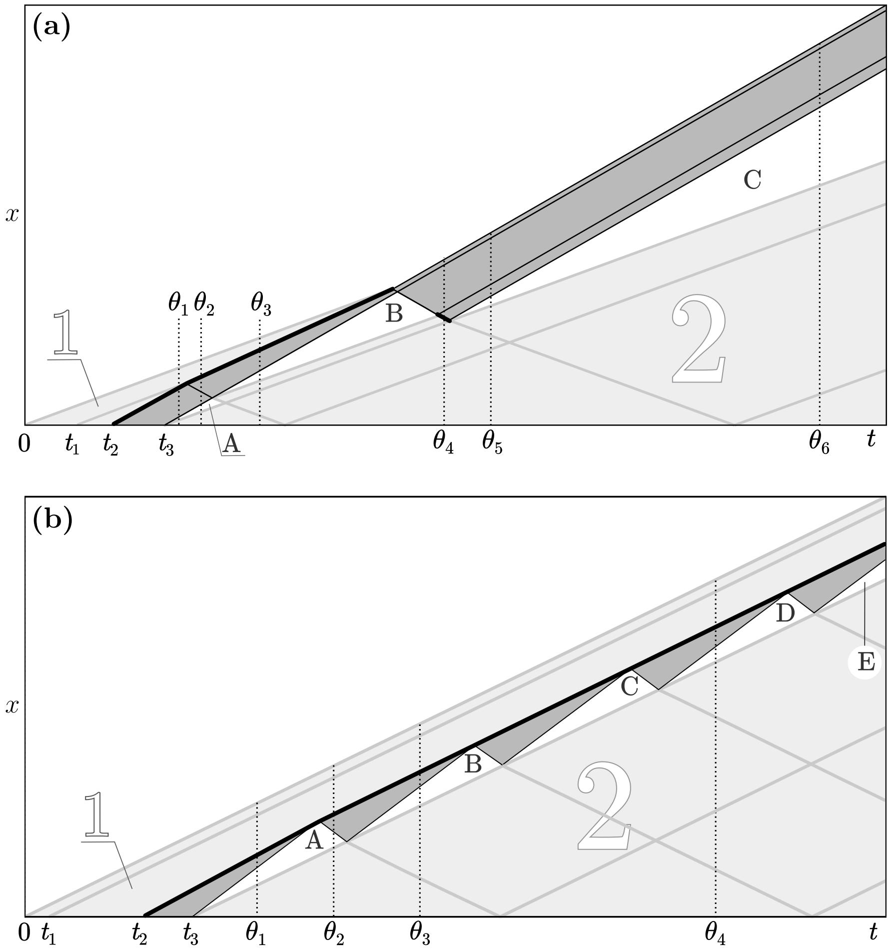

Рис. 2. Характеристические плоскости решений с параметрами I (a), II (b) (см. таблицу)

граница $x = 0$ и падающая на неё волна в случае E_8), пакет вторичных сильных разрывов в правой части — результат столкновения. Деформированное состояние каждой новой локальной зоны, возникшей в результате инцидента, определяется свойствами её подвижных границ: зона сжатия между расходящимися быстрыми фронтами (или быстрым фронтом и ударной волной), зона растяжения между расходящимися медленными фронтами, жёсткая зона между попутными полусигнотонами (быстрым и медленным). Инциденты E_1, E_2, E_3 описывают попутные столкновения разнотипных сильных разрывов. В частности, первому столкновению фронтов после формирования первичной волновой картины отвечает один из случаев E_1, E_2. Инциденты E_4, E_5, …, E_8 соответствуют встречным столкновениям.

Особо выделим неоднозначные случаи E_4 и E_5, в каждом из которых для продолжения решения задачи необходима проверка и, возможно, корректировка ожидаемой волновой картины. Так, вычислительный эксперимент с различными параметрами граничного перемещения (см. таблицу) показал, что в результате инцидента $E_4(\gamma_{0a} + \xi_{-a})$ может возникнуть или одна новая зона сжатия между расходящимися быстрыми фронтами γ_{-0a} и ξ_a (E_4(a)), или сразу две новых области — зона растяжения $[\gamma_{-0b}\gamma_{b0}]$ между расходящимися медленными полусигнотонами и жёсткий слой $[\gamma_{b0}\gamma_{0a}]$ (E_4(b)). Подобная ситуация складывается и для инцидента $E_5(\gamma_{b0} + \gamma_{-0a})$, но в отличие от E_4 здесь отражённым фронтом оказывается или вторичная ударная волна S_- (E_5(a)), или медленный простой разрыв ξ_{-b} (E_5(b)). Решая в общем виде уравнения (9), (6) с учётом прогноза знаков деформаций в новых локальных зонах инцидентов

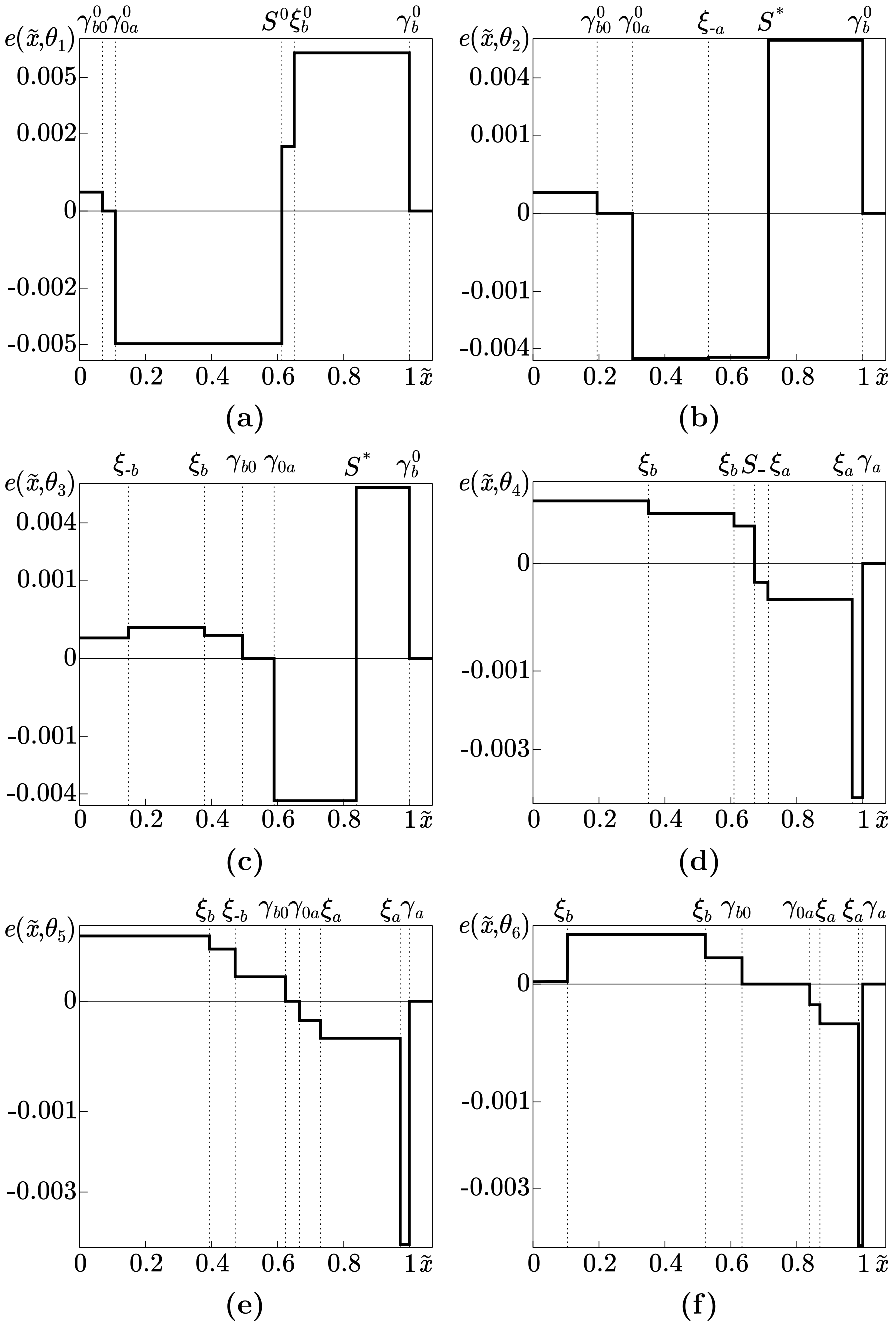

Рис. 3. Мгновенные диаграммы деформаций в решении с параметрами I (см. таблицу)

E_4, E_5, получаем условия реализации каждого варианта:

$$\begin{gathered} M < 0 \;\Rightarrow\; E_4(\mathrm{a}), \quad M > 0 \;\Rightarrow\; E_4(\mathrm{b}), \\ \frac{M}{C_L} \in (-b; b) \cup (a; +\infty) \;\Rightarrow\; E_5(\mathrm{a}), \quad \frac{M}{C_L} \in (-\infty; -b) \cup (b; a) \;\Rightarrow\; E_5(\mathrm{b}), \\ M = B_R - B_L + aC_R. \end{gathered} \tag{13}$$

Значения коэффициентов B_L, B_R, C_L, C_R в (13) известны из локальных решений $u_L(x,t)$, $u_R(x,t)$ слева и справа от координаты столкновения.

Рис. 2 показывает, что инциденты E_4(a), E_4(b), E_5(a), E_5(b) могут возникать в решении задачи в разных количествах и сочетаниях. Так, решение на рис. 2(a) содержит случаи E_4(a),

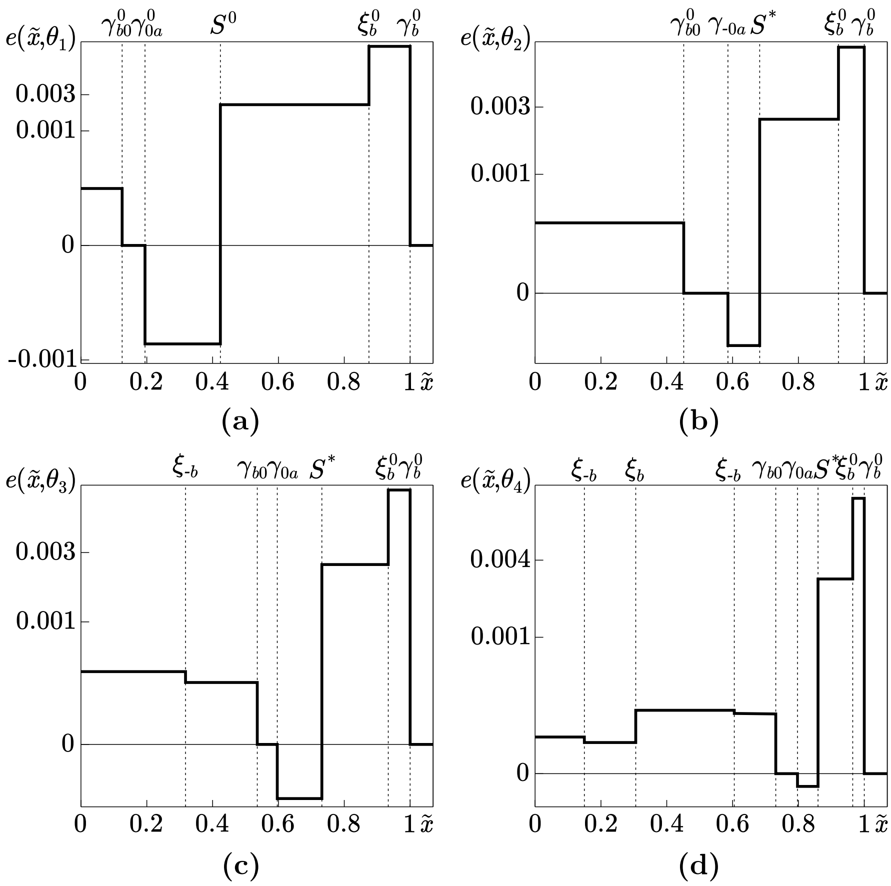

Рис. 4. Мгновенные диаграммы деформаций в решении с параметрами II (см. таблицу)

E_4(b) и E_5(a), а решение на рис. 2(b) — только случай E_5(b), создающий совместно с инцидентом E_2 цикл переходов среды из недеформированного состояния в сжатое и обратно в узкой зоне между двумя областями растяжения 1, 2.

2) Следующая особенность связана с зависимостью решения задачи на открытом интервале $t > t_3$ от части краевого условия (7), задающей импульс растяжения-сжатия на ограниченном этапе $t \in [0; t_3]$.

Согласно описанной в разделе 3 процедуре вычисления $u_i(x,t)$, $e_i(x,t)$ в новых локальных зонах, обобщённое решение нашей задачи строится рекуррентно и, следовательно, в любой момент времени $t > t_3$ «помнит» все предшествующие локальные решения (в том числе, решение (10) первичной волновой картины). За счёт этого формулы (6), (8), (9), (11) и (13) при любом $t > t_3$ скрытым образом содержат параметры функции (7). Таким образом, часть граничного перемещения $u_0(t)$, активная на ограниченном интервале времени $t \in [0; t_3]$, даже после остановки границы продолжает влиять на динамические процессы распространения деформаций в разномодульном упругом полупространстве.

Пользуясь этим фактом, можно, например, ещё на этапе постановки задачи предсказать, по какому из сценариев (a) или (b) на рис. 2 будет развиваться её решение после полного формирования первичной волновой картины (т.е. при $t \geqslant \theta_1 > t_3$). Для этого, задавая диапазон изменения одного из параметров краевого условия (6) и учитывая (10), строим зависимости (11) для времени наступления инцидентов E_1, E_2 с участием первичных волновых фронтов γ_{0a}^0, S^0, ξ_b^0. Ниже представлены графики функций $t_1^*(k_2)$ и $t_1^*(k_3)$, полученные при $k_2 \in [-8.0; -1.0]$, $k_3 = 2.5$ (рис. 5(a)), $k_3 \in [2.0; 20.0]$, $k_2 = -6.25$ (рис. 5(b)) и фиксированных значениях t_1, t_2, t_3, k_1, K из набора II (см. таблицу). Пересечение графиков на рис. 5 показывает, что существуют значения k_2^*, k_3^*, при отклонении от которых сценарий развития волновой картины на рис. 2 меняется с варианта (a) на вариант (b) или наоборот. Одновременное наступление событий $E_1(S^0+\xi_b^0)$, $E_2(\gamma_{0a}^0+S^0)$ (столкновение сразу трёх первичных волновых фронтов) возможно, но его достаточно трудно обеспечить, т.к. значения k_2^*, k_3^* вычисляются приближенно.

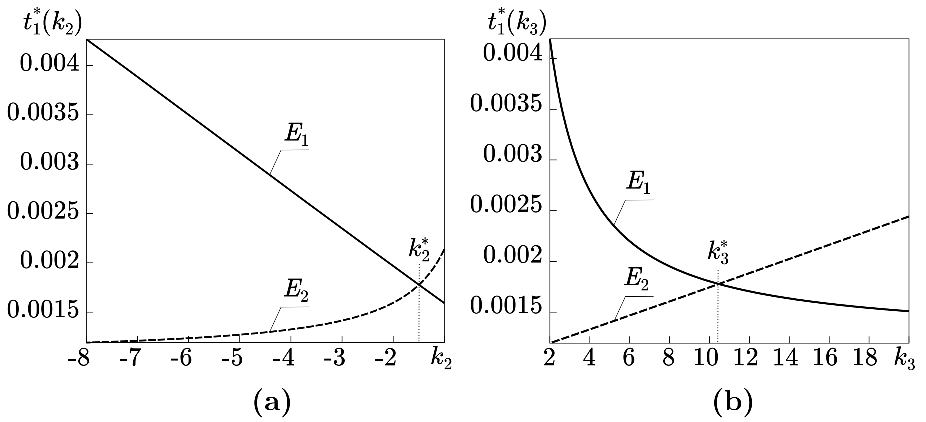

Рис. 5. Момент времени первого столкновения волн в решении с параметрами II (см. таблицу)

Очевидно, что подобные зависимости времени столкновения волновых фронтов от параметров краевого условия (6) можно получить для любых инцидентов (12), конкурирующих в произвольной точке ветвления при решении задачи. Ограничением здесь выступает только нарастающая сложность формулы (11) при отдалённом от t_3 моменте времени.

3) Ряд нелинейных эффектов в решении описанной задачи проявляется исключительно за счёт учёта отражённых волновых фронтов, возникающих внутри разномодульного полупространства после остановки его границы.

Согласно принятому предположению об отсутствии столкновений первичных волновых фронтов на этапе $t \in [0; t_3]$, первый отражённый сильный разрыв появляется при $t > t_3$ после одного из попутных инцидентов E_1, E_2. Результатом любого из встречных инцидентов E_2, E_3, ..., E_7 также являются как минимум два расходящихся сильных разрыва — прямой и отражённый, каждый их которых вносит свой вклад в решение задачи. Так, многократные встречные столкновения отражённых фронтов с разнотипными прямыми волнами приводят к изменениям функций $u(x,t)$ и $e(x,t)$, в том числе динамически перераспределяют поле растяжения в объединённой области 2 (рис. 2), сводя деформации в приграничных локальных зонах $[0; \xi_{\pm b}]$ к близким к нулю значениям: $e(x,\theta_6)|_{x\in[0;\xi_b]} \sim 10^{-18}$ на рис. 3(f), $e(x,\theta_4)|_{x\in[0;\xi_{-b}]} \sim 10^{-7}$ на рис. 4(d). Встречное столкновение вторичных полусигнотонов γ_{b0} и γ_{-0a} при выполнении соответствующего условия (13) вызывает появление отражённой ударной волны S_- (рис. 2(a)). Инциденты E_4(b), E_5(b), E_6 с участием отражённых фронтов сжатия S_-, ξ_{-a}, γ_{-0a} порождают в глубине полупространства вторичные жёсткие слои B, C, D, E (рис. 2) с ненулевыми начальными координатами $X_{\mathrm{B}} \neq 0$, ..., $X_{\mathrm{E}} \neq 0$ (в отличие от первичного жёсткого слоя A, возникающего на границе $x = 0$).

Безусловно, включение отражённых сильных разрывов в обобщённое решение уравнения (2) усложняет вычислительный процесс из-за быстро нарастающего количества зон локальных решений и их движущихся границ, на которых необходимо соблюдать условия (4), (5). Для упрощения процедуры решения подобных краевых задач можно, например, отказаться от учёта отражённых фронтов как от волн второго порядка малости [17] или ограничить сверху временной интервал решения, тем самым исключая саму возможность взаимодействия волн [18, 26]. Однако в этих случаях описанные выше нелинейные эффекты в разномодульной упругой среде получить невозможно.

Таким образом, несмотря на относительно невысокую интенсивность отражённых фронтов (например, $(e^+ - e^-)|_{S_-} = 1.43 \cdot 10^{-4}$ против $(e^+ - e^-)|_{S^0} = 5.45 \cdot 10^{-3}$ на рис. 3), включение их в решение оправдано, если целью является подробное (насколько это возможно) описание динамики одномерного деформирования разномодульной упругой среды.

4) Наконец, рассмотрим, как в нашей задаче изменяется скорость ударной волны в результате её попутных столкновений с быстрыми и медленными фронтами сильных разрывов.

Согласно (6), скорость ударной волны есть кусочно-постоянная функция

$$\dot{S}(t) = \sqrt{\frac{b^2 e^+ - a^2 e^-}{e^+ - e^-}}, \tag{14}$$

зависящая от деформаций $e^+ > 0$, $e^- < 0$ по обе стороны от фронта $S(t)$. Всякий раз, когда прямая ударная волна попутно взаимодействует с убегающими медленными или догоняющими быстрыми фронтами сильных разрывов, её скорость согласно (14) изменяется скачком. Графики таких изменений показаны на рис. 6, где $\dot{S}^0_{\mathrm{I}}$ и $\dot{S}^0_{\mathrm{II}}$ — скорости первичной ударной волны в решениях с параметрами I (рис. 2(a)) и II (рис. 2(b)) соответственно, a и b — скорости быстрой и медленной характеристик, $\tau = t \cdot 10^3$с.

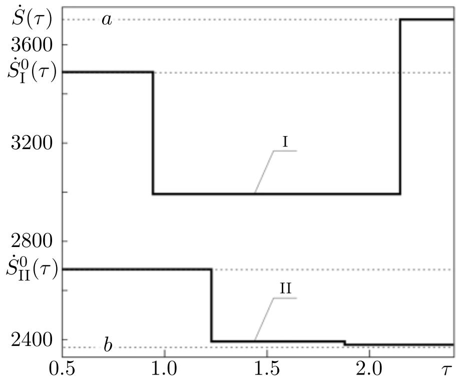

Рис. 6. Изменение скорости ударной волны

Рис. 6 позволяет заключить, что в разномодульной упругой среде ударная волна в результате серии столкновений может как разогнаться от своей первоначальной скорости $\dot{S}^0$ до скорости быстрой характеристики (кривая I), так и замедлиться, приближаясь по скорости к медленной характеристике (кривая II). В первом случае ударная волна уничтожает область предварительного растяжения 1 перед собой (рис. 2(a)) и при выходе в недеформированное полупространство превращается в быстрый полусигнотон γ_a (рис. 3(f)). Во втором случае можно говорить о затухании ударной волны (рис. 2(b)), поскольку уровень деформаций сжатия e^- позади неё после каждого столкновения падает (рис. 4(c,d)).

Подобное поведение ударной волны отражает её нелинейные свойства и одновременно является характерной особенностью распространения деформаций в разномодульной упругой среде.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При решении задачи о нормальном нестационарном нагружении упругого полупространства в режиме «растяжение — сжатие — останов» выявлен ряд особенностей одномерной динамики деформирования разномодульной упругой среды [12], возникающих за счёт столкновений фронтов разнотипных сильных разрывов. Показано, что часть из этих особенностей (неоднозначность результатов некоторых инцидентов, появление отражённой ударной волны и движущихся жёстких слоёв на отдалении от нагружаемой границы, циклические переходы между сжатым и недеформированным состоянием в узком слое, затухание ударной волны при попутных столкновениях с другими волнами и т.д.) проявляется только в случае включения отражённых фронтов в обобщённое решении задачи.

Перечисленные эффекты являются следствием неаналитичной разномодульной нелинейности модели [12] и не отражаются линейной теорией упругости. Полученные результаты развивают общие представления о динамике упругого деформирования разномодульных материалов под действием нестационарных нагрузок. Как теоретическая база, они могут быть интересны для разработчиков технологий ударной обработки конструкционных материалов, а также исследователей процессов распространения деформаций в земной коре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баклашов И. В., Картозия Б. А.* Механика горных пород. М.: Недра, 1975.
2. *Бессонов Д. Е., Зезин Ю. П., Ломакин Е. В.* Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Изв. СГУ. Нов. сер. Сер. мат. мех. информ. 2009. Т. 9. №. 4 (2). С. 9–13; DOI: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-9-13
3. *Lomakin E. V., Fedulov B. N.* Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. V. 50. N 6. P. 1527–1535; DOI: 10.1007/s11012-015-0104-5
4. *Makeev A., He Y., Carpentier P., Shonkwiler B.* A method for measurement of multiple constitutive properties for composite materials // Composites Part A. 2012. V. 43. N 12. P. 2199–2210; DOI: 10.1016/j.compositesa.2012.07.021
5. *Жуков А. М.* Модули упругости материалов при растяжении и сжатии // Прикл. мех. техн. физ. 1985. № 4. С. 128–131.
6. *Katz J. L., Spencer P., Wang Y., Misra A., Marangos O., Friis L.* On the anisotropic elastic properties of woods // J. Mater. Sci. 2008. V. 43. P. 139–145; DOI: 10.1007/s10853-007-2121-9
7. *Li S., Demirci E., Silberschmidt V. V.* Variability and anisotropy of mechanical behavior of cortical bone in tension and compression // J. Mech. Behav. Biomed. Mater. 2013. V. 21. P. 109–120; DOI: 10.1016/j.jmbbm.2013.02.021
8. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
9. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
10. *Амбарцумян С. А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
11. *Цвелодуб И. Ю.* О разномодульной теории упругости // Прикл. мех. техн. физ. 2008. Т. 49, № 1. С. 157–164.
12. *Ляховский В. А., Мясников В. П.* О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.
13. *Мясников В. П., Олейников А. И.* Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007.
14. *Sadovskaya O. V., Sadovskii V. M.* The theory of finite strains of a granular material // J. Appl. Math. Mech. 2007. V. 71. P. 93–110; DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.03.005.
15. *Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Petrakov I. E.* On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension // Compos. Struct. 2021. V. 268. Article 113921; DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.113921
16. *Назаров В. Е.* Упругие волны в средах с разномодульной нелинейностью с учётом эффектов отражения от ударных фронтов // Журн. техн. физ. 2021. Т. 91. №. 11. С. 1747–1755; DOI: 10.21883/JTF.2021.11.51539.118-21.
17. *Gavrilov S. N., Herman G. C.* Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // J. Sound Vibr. 2012. V. 331. N 40. P. 4464–4480; DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.022

18. *Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т.* О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Дальневост. матем. журн. 2005. Т. 6, № 1–2. С. 94–105.

19. *Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е.* Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий // Вест. ПНИПУ. Механика. 2019. № 4. С. 37–47; DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.04

20. *Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е.* Эволюция волновой картины кусочно-линейного одноосного растяжения и сжатия разномодульного упругого стержня // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25. № 4. С. 54–70; DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.405.

21. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

22. *Kuznetsova M., Khludyakov M., Sadovskii V.* Wave propagation in continuous bimodular media // Mech. Adv. Mater. Struct. 2021. P. 1–16; DOI: 10.1080/15376494.2021.1889725

23. *Maslov V. P., Mosolov P. P.* General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // J. Appl. Math. Mech. 1985. V. 49. N 3. P. 322–336; DOI: 10.1016/0021-8928(85)90031-0

24. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998.

25. *Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. и др.* Физические величины: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991.

26. *Дудко О. В., Рагозина В. Е.* О движении ударных волн с постоянной скоростью в разномодульных упругих средах // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 134–144.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3:517.958

INTERACTION OF PLANE STRAIN WAVES IN A HETEROMODULAR ELASTIC HALF-SPACE AT THE STAGE OF FORCED STOPPING OF ITS BOUNDARY AFTER UNIAXIAL TENSION-COMPRESSION

© 2023 **O. V. Dudko[a], A. A. Lapteva[b], V. E. Ragozina[c]**

Institute of Automation and Control Processes, Far East Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, 690041 Russia

E-mails: [a]dudko@iacp.dvo.ru, [b]lanastal@mail.ru, [c]ragozina@vlc.ru

Received 01.06.2023, revised 10.07.2023, accepted 09.08.2023

Abstract. The evolution of the wave pattern in a multimodulus elastic half-space with a boundary moving in nonstationary uniaxial piecewise linear "tension — compression — stop" mode is studied. The solution of the boundary value problem includes all cases of interaction between plane one-dimensional strain waves, including reflected weak-intensity fronts. A number of new features of one-dimensional elastic deformation dynamics in a multimodulus medium are revealed, some of which (e. g., the appearance of a reflected shock wave at a distance from the loaded boundary, cyclic transitions of a narrow moving zone from a compressed to rigid state and back, and a stepwise decrease in the tensile strain level in the near-boundary zone after the boundary is stopped) can be obtained with a given boundary loading only taking into account reflection effects.

Keywords: multimodulus elasticity, unsteady deformation, piecewise linear boundary condition, uniaxial tension-compression, forced stopping, strong rupture, collision of strain waves, reflected shock wave.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.403

REFERENCES

1. I. V. Baklashov and B. A.Kartozija, *Mechanics of Rocks* (Nedra, Moscow, 1975) [in Russian].
2. D. E. Bessonov, Yu. P. Zezin, and E. V. Lomakin, "Multimodulus behavior of the grained composites on the base of unsaturated polyethers," Izv. Saratov.Gos. Univ. Nov. Ser. Ser. Mat. Mekh. Inf. **9** (4), 9–13 (2009) [in Russian]. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-9-13
3. E. V. Lomakin and B. N. Fedulov, "Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites," Meccanica **50** (6), 1527–1535 (2015). https://doi.org/10.1007/s11012-015-0104-5
4. A. Makeev, Yihong He, P. Carpentier, and B. Shonkwiler, "A method for measurement of multiple constitutive properties for composite materials," Composites. Part A: Appl. Sci. Manuf. **43** (12), 2199–2210 (2012). https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.07.021
5. A. M. Zhukov, "Moduli of elasticity of materials in extension and compression," J. Appl. Mech. Tech. Phys. (26), 568–571 (1985). https://doi.org/10.1007/BF01101643
6. J. L. Katz, P. Spencer, Yong Wang, A. Misra, O. Marangos, and L. Friis, "On the anisotropic elastic properties of woods," J. Mater. Sci. (43), 139–145 (2008). https://doi.org/10.1007/s10853-007-2121-9
7. Simin Li, Emrah Demirci, and V. V. Silberschmidt, "Variability and anisotropy of mechanical behavior of cortical bone in tension and compression," J. Mech. Behav. Biomed. Mater. (21), 109–120 (2013). https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.02.021

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 710–723.

8. V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Bashelejshvili, and T. V. Burchuladze, *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity* (North-Holland Publishing Co., New York, 1979).
9. E. V. Lomakin and Yu. N. Rabotnov, “A theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression,” Mech. Solids **13** (6), 25–30 (1978).
10. S. A. Ambartsumyan, *Theory of Elasticity for Materials with Variable Moduli* (Nauka, Moscow, 1982) [in Russian].
11. I. Yu. Tsvelodub, “Multimodulus elasticity theory,” J. Appl. Mech. Tech. Phys. (49), 129–135 (2008). https://doi.org/10.1007/s10808-008-0019-1
12. V. A. Lyakhovskii and V. P. Myasnikov, “On the behavior of elastic cracked solid,” Izv. Akad. Nauk SSSR. Fiz. Zemli (10), 71–75 (1984) [in Russian].
13. V. P. Myasnikov and A. I. Oleinikov, *Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous-Resisting Media* (Dal’nauka, Vladivostok, 2007) [in Russian].
14. O. V. Sadovskaya and V. M. Sadovskii, “The theory of finite strains of a granular material,” J. Appl. Math. Mech. (71), 93–110 (2007). https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.03.005
15. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and I. E. Petrakov, “On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension,” Compos. Struct. (268), 113921 (2021). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113921
16. V. E. Nazarov, “Elastic waves in media with bimodular nonlinearity taking into account the effects of reflection from shock fronts,” Tech. Phys. **67** (14), 2261–2269 (2022). https://doi.org/10.21883/TP.2022.14.55229.118-21
17. S. N. Gavrilov and G. C. Herman, “Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading,” J. Sound Vib. **331** (40), 4464–4480 (2012). https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.022
18. O. V. Dudko, A. A. Lapteva, and K. T. Semyonov, “About the distribution of plane one-dimensional waves and their interaction with a barrier in a media differently reacting to tension and compression,” Dal’nevost. Mat. Zh. **6** (1–2), 94–105 (2005) [in Russian].
19. O. V. Dudko, A. A. Lapteva, and V. E. Ragozina, “Nonstationary 1D dynamics problems for heteromodular elasticity with piecewise-linear approximation of boundary conditions,” Vestn. PNIPU. Mekh. (4), 37–47 (2019) [in Russian]. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.04
20. O. V. Dudko, A. A. Lapteva, and V. E. Ragozina, “Evolution of the wave pattern for piecewise linear uniaxial tension and compression of a heteromodular elastic bar,” J. Appl. Ind. Math. **16** (4), 645–658 (2022). https://doi.org/10.1134/S1990478922040068
21. Ali H. Nayfeh, *Perturbation Methods* (John Wiley & Sons, New York, 1973).
22. M. Kuznetsova, M. Khludyakov, and V. Sadovskii, “Wave propagation in continuous bimodular media,” Mech. Adv. Mater. Struct. (2021). https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1889725
23. V. P. Maslov and P. P. Mosolov, “General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli,” J. Appl. Math. Mech. **49** (3), 322–336 (1985). https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90031-0
24. A. G. Kulikovskii and E. I. Sveshnikova, *Nonlinear Waves in Elastic Media* (CRC Press, New York, 1995).
25. *Handbook of Physical Quantities,* I. S. Grigoriev and E. Z. Meilikhov, Eds., (CRC Press, New York, 1997).
26. O. V. Dudko and V. E. Ragozina, “On the motion of shock waves at constant speed in multimodulus elastic media,” Mech. Solids **53** (1), 111–119 (2018). https://doi.org/10.3103/S0025654418010132