УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОГО ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ. I. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ. РАЗРЕШИМОСТЬ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

© 2023 **А. Е. Мамонтов**[1,2a], **Д. А. Прокудин**[3b]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, ул. Кирова, 86, г. Новосибирск 630102, Россия,*
[3] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]aem@hydro.nsc.ru, [b]prokudin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 30.08.2022 г.; после доработки 18.09.2023 г.;
принята к публикации 01.11.2023 г.

Сформулирована задача о стационарном баротропном движении многокомпонентной среды, состоящей из вязких сжимаемых жидкостей, в ограниченной области трёхмерного пространства. Матрицы вязкостей предполагаются произвольными (недиагональными). Доказана разрешимость вспомогательной задачи.

Ключевые слова: теорема существования, стационарное баротропное течение, вязкая сжимаемая многокомпонентная среда, матрица вязкостей.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.406

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена проблеме разрешимости уравнений для модели, описывающей движение многокомпонентной среды, состоящей из вязких сжимаемых жидкостей. По поводу происхождения этой модели можно обратиться к монографиям [1] и [2], а также за уточнениями для подмодели, рассматриваемой в данной работе, — к статье [3]. Смежные модели рассматривались в таких работах как [4] и [5]. Несмотря на имеющиеся результаты о разрешимости для моделей динамики многокомпонентных сред, такие как [3, 6–8], остаётся не изученным вариант стационарных трёхмерных движений в случае, если матрицы вязкостей являются не диагональными и не треугольными, а уравнения состояния для давления и обмена импульсом имеют достаточно общий вид. Именно этот случай будет рассматриваться в предлагаемой работе. Таким образом, новизна работы состоит в одновременном учёте таких факторов как заполненность матриц вязкостей и снижение ограничений на вид уравнений состояния для давления и обмена импульсом. Работа состоит из двух частей. Первая часть работы излагается в данной статье и состоит в постановке основной задачи и доказательстве разрешимости вспомогательной (приближенной) задачи. Во второй части работы, в подготовленном авторами продолжении данной статьи, будет совершён предельный переход по параметру приближения и доказана разрешимость основной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Математического Центра в Академгородке и Минобрнауки РФ (соглашение 075-15-2022-282).

При исследовании уравнений динамики многокомпонентных сред имеется опасность загромождения записи, ввиду появления дополнительных индексов отвечающих за нумерацию компонент среды. Здесь существенное облегчение приносит инвариантная запись, исключающая явное упоминание компонент векторов и тензоров, которой мы будем придерживаться в течение всей статьи, и правила которой мы здесь уточним во избежание разночтений. А именно, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы («столбцы») размерности n (с компонентами a_i, b_i), а $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — тензоры второго ранга («матрицы»), действующие в $\mathbb{R}^n$ (с компонентами A_{ij}, B_{ij}), то

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \quad \mathbb{A} : \mathbb{B} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

$\mathbb{A}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{div} \mathbb{A}$ — векторы («столбцы») с компонентами

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{a})_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_j, \quad (\operatorname{div} \mathbb{A})_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i};$$

и, наконец, $\mathbb{A}^T$ и $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ — тензоры с компонентами $(\mathbb{A}^T)_{ij} = A_{ji}$ и $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ij} = a_i b_j$ соответственно. При применении этих обозначений в статье как правило $n = 3$ (размерность течения), но иногда $n = N$ (число компонент среды), $N \geqslant 2$.

В статье будут использоваться общепринятые (см., например, [9,10]) обозначения функциональных пространств: $L_p(\Omega)$ ($W_p^l(\Omega)$) — пространство функций, интегрируемых со степенью $p \geqslant 1$ (вместе с обобщёнными производными до порядка $l \geqslant 0$ включительно); $C^l(\overline{\Omega})$ ($C_0^l(\Omega)$) — пространство функций, обладающих непрерывными частными производными до порядка $l \geqslant 0$ включительно в $\overline{\Omega}$ (с компактными носителями, лежащими в Ω). Мы не будем различать обозначения пространств векторных функций и скалярных функций.

1. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

В замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области течения Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ точек $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, граница $\partial\Omega$ которой принадлежит классу C^2, требуется найти скалярное поле плотности многокомпонентной среды $\rho \geqslant 0$ и векторные поля скоростей $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие следующим уравнениям и краевым условиям:

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho \, d\boldsymbol{x} = m, \quad m = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{u}_j$ — средневзвешенная скорость многокомпонентной среды, где $\alpha_j = \text{const}$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, \ldots, N$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$; $\rho_i = \alpha_i \rho$, $i = 1, \ldots, N$ — плотности компонент; p — давление в среде, которое определяется плотностью ρ, т. е. функция $p(\cdot)$ предполагается заданной, причём

$$p \in C^1[0, +\infty), \quad p(0) = 0, \quad \forall\, s \geqslant 0 \quad \frac{1}{c_1} s^{\gamma - 1} - c_2 \leqslant p'(s) \leqslant c_1 s^{\gamma - 1} + c_2 \quad \text{и} \quad p'(s) \geqslant 0 \tag{5}$$

с некоторыми постоянными $c_1 \geqslant 1$, $c_2 > 0$ и $\gamma > 3$ (простейшим примером ситуации, когда наложенные требования на давление выполнены, является политропный закон $p(\rho) = K\rho^\gamma$, $K = \text{const} > 0$), а ∇p — вектор («столбец») с компонентами $(\nabla p)_i = \dfrac{\partial p}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$. Далее $\mathbb{S}_i$, $i = 1, \ldots, N$ — тензоры вязких напряжений компонент, которые определяются равенствами

$$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N} \left(\lambda_{ij}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j)\right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{2}\left((\nabla \otimes \boldsymbol{w}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{w})^T\right)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{w}$, а числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij}, μ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$ образуют соответственно матрицы $\boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N$ такие, что

$$\mathbf{M} > 0, \quad \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0. \tag{7}$$

Векторные поля

$$\boldsymbol{J}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(1 + \rho)(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i), \quad i = 1, \ldots, N \tag{8}$$

отвечают за интенсивность обмена импульсом между компонентами, где постоянные $a_{ij} = a_{ji} > 0$, $i, j = 1, \ldots, N$; и наконец, известные векторные поля внешних сил

$$\boldsymbol{f}_i \in C\big(\overline{\Omega}\big), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Замечание 1. Из условий (5), в частности, вытекает, что при всех $s \geqslant 0$

$$\frac{1}{c_1\gamma}s^\gamma - c_2 s \leqslant p(s) \leqslant \frac{c_1}{\gamma}s^\gamma + c_2 s,$$

откуда, в свою очередь, следует

$$B_1 s^\gamma - B_2 \leqslant s\int\limits_1^s \frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta \leqslant B_3 s^\gamma + B_4,$$

где положительные постоянные B_1, B_2, B_3, B_4 зависят только от c_1, c_2 и γ (условимся через $B_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$ обозначать величины, принимающие конечные положительные значения и зависящие от объектов, указанных в скобках или перечисленных в комментариях).

Замечание 2. Ввиду равенства (см. (3))

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_\Omega \mu_{ij}(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i)\cdot(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j)\,d\boldsymbol{x} + \\ + \sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_\Omega (\lambda_{ij} + 2\mu_{ij})\,(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_i)(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\,d\boldsymbol{x},$$

в котором $(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i)_1 = \left(\dfrac{\partial u_{i3}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_{i2}}{\partial x_3}\right)$, $(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i)_2 = \left(\dfrac{\partial u_{i1}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_{i3}}{\partial x_1}\right)$, $(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i)_3 = \left(\dfrac{\partial u_{i2}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_{i1}}{\partial x_2}\right)$, $i = 1, \ldots, N$, условия (7) обеспечивают важное соотношение

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} \geqslant B_5(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M})\sum_{i=1}^{N}\int\limits_\Omega |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}. \tag{10}$$

Определение 1. Пусть в уравнениях (2) (с уточняющими соотношениями (6), (8)) функция $p(\cdot)$, входящая в определение давления p по плотности ρ, удовлетворяет ограничениям (5), коэффициенты вязкостей — условиям (7), а внешние силы в задаче (1)–(4) удовлетворяют условиям (9). Слабым решением задачи (1)–(4) называется набор функций

$$\rho \in L_{2\gamma}(\Omega), \quad \rho \geqslant 0, \quad \boldsymbol{u}_i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяющих (4) и следующим условиям:

1) Плотность ρ удовлетворяет уравнению неразрывности (1) в том смысле, что $\forall\, \psi \in C^\infty\bigl(\overline{\Omega}\bigr)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \psi \, d\boldsymbol{x} = 0;$$

2) Скорости $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$ удовлетворяют уравнениям импульсов (2) (с определяющими уравнениями (6)) в том смысле, что $\forall\, \boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^\infty\bigl(\Omega\bigr)$, $i = 1, \ldots, N$ выполнены интегральные тождества

$$\int\limits_\Omega \Bigl((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \alpha_i p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i - \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \boldsymbol{J}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \Bigr) \, d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

$\bigl($краевые условия (3) выполнены автоматически — в смысле функционального класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\bigr)$.

2. ПОСТАНОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Будем искать слабое решение задачи (1)–(4) как предел приближенных решений, а именно, решений следующей краевой задачи (индекс ε у величин, зависящих от ε, мы пока опускаем):

$$-\varepsilon \Delta \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) + \varepsilon \rho = \varepsilon \frac{m}{|\Omega|}, \tag{11}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \rho_i \boldsymbol{u}_i + \frac{\varepsilon}{2} \frac{m}{|\Omega|} \alpha_i \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2} \rho_i (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \\ = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \nabla \rho \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Здесь $\varepsilon \in (0, 1]$ — параметр, который впоследствии будет устремлён к нулю; $|\Omega| = \operatorname{meas}(\Omega)$; $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$.

Задача (11)–(13) представляет собой равномерно эллиптическую регуляризацию задачи (1)–(4) с дополнительными слагаемыми и граничными условиями, призванными сохранить полезные свойства исходной задачи, например интегральную ортогональность конвективных членов скоростям.

Определение 2. Сильным решением задачи (11)–(13) называются неотрицательная функция $\rho \in W_\sigma^2(\Omega)$ с некоторым $\sigma > 3$ и векторные поля $\boldsymbol{u}_i \in W_\sigma^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ такие, что уравнения (11), (12) выполнены п. в. в Ω, и п. в. на $\partial\Omega$ верны краевые условия (13).

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Существование сильного решения краевой задачи (11)–(13) будем доказывать используя теорему о неподвижных точках Лерэ—Шаудера (см., например, [11], теорема 3, стр. 406), которую применим к оператору $\mathbf{A}$, сформированному далее.

3.1. Построение оператора A

Сначала определим несколько промежуточных операторов, суперпозицией которых и будет оператор $\mathbf{A}$.

Для этого рассмотрим краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{a}) + \varepsilon\rho = \varepsilon b, \quad \nabla\rho\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{14}$$

с неизвестной функцией ρ и заданными векторным полем $\boldsymbol{a}$ и функцией b.

Как известно (см., например, [12], предложение 4.29, стр. 213 и [13], лемма 3.1, стр. 795), что если $\boldsymbol{a}\in W^1_\infty(\Omega)$, $\boldsymbol{a}|_{\partial\Omega}=0$, $b\in L_\infty(\Omega)$, то:
1) существует единственное сильное решение ρ задачи (14) класса $W^2_\sigma(\Omega)$;
2) имеет место оценка

$$\|\rho\|_{W^2_\sigma(\Omega)} \leqslant B_6(\varepsilon,\sigma,\Omega)\left(1+\|\boldsymbol{a}\|_{W^1_\infty(\Omega)}\right)\|b\|_{L_\sigma(\Omega)}; \tag{15}$$

3) имеет место равенство $\int\limits_\Omega \rho\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega b\,d\boldsymbol{x}$;
4) если $b\geqslant 0$ п. в. в Ω, то $\rho\geqslant 0$ п. в. в Ω.

Итак, первым промежуточным оператором определим оператор $\mathcal{R}:\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)\to W^2_\sigma(\Omega)$, где $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)=\{\,\boldsymbol{a}\in W^2_\sigma(\Omega):\ \boldsymbol{a}|_{\partial\Omega}=0\,\}$, действующий по закону $\mathcal{R}:\ \boldsymbol{a}\mapsto\rho$, согласно которому $\forall\,\boldsymbol{a}\in\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ функция $\rho\in W^2_\sigma(\Omega)$ однозначно определяется как решение краевой задачи

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{a}) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}, \quad \nabla\rho\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0.$$

Очевидно, что $\int\limits_\Omega \rho\,d\boldsymbol{x} = m$ и $\rho=\mathcal{R}(\boldsymbol{a})\geqslant 0$ п. в. Ω (отметим, что пространство $W^2_\sigma(\Omega)$ вложено в пространство $C^1\big(\overline{\Omega}\big)\big)$. Кроме того, при всех $\boldsymbol{a}_k\in\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, $k=1,2$ выполняются неравенства

$$\|\rho_1-\rho_2\|_{W^2_\sigma(\Omega)} \leqslant B_7(B_6,\varepsilon,\sigma,m,\Omega)\left(1+\|\boldsymbol{a}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right)\left(1+\|\boldsymbol{a}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right)\|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leqslant$$
$$\leqslant B_8(B_7,\sigma,\Omega)\left(1+\|\boldsymbol{a}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right)\left(1+\|\boldsymbol{a}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right)\|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2\|_{W^2_\sigma(\Omega)}, \tag{16}$$

где $\rho_k=\mathcal{R}(\boldsymbol{a}_k)$, $k=1,2$. Действительно, для $\rho_k=\mathcal{R}(\boldsymbol{a}_k)$, $k=1,2$ справедливы следующие равенства:

$$-\varepsilon\Delta(\rho_1-\rho_2)+\operatorname{div}((\rho_1-\rho_2)\boldsymbol{a}_1)+\varepsilon(\rho_1-\rho_2)=\varepsilon\left(-\frac{\operatorname{div}(\rho_2(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2))}{\varepsilon}\right),\ \nabla(\rho_1-\rho_2)\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0.$$

Из данных равенств, вложения $W^2_\sigma(\Omega)$ в $C^1\big(\overline{\Omega}\big)$ и оценки (15) с $b=-\dfrac{\operatorname{div}(\rho_2(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2))}{\varepsilon}$ непосредственно следует (16).

Вторым промежуточным оператором определим оператор $\mathcal{U}:\ L_\sigma(\Omega)\to\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, действующий по правилу $\mathcal{U}:\ \mathbf{g}\mapsto\mathbf{u}$, где по заданному вектору $\mathbf{g}=(\boldsymbol{g}_1,\ldots,\boldsymbol{g}_N)$ с векторными

компонентами $\boldsymbol{g}_i \in L_\sigma(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ однозначно строится вектор $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_N)$ с векторными компонентами $\boldsymbol{u}_i \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ как решение краевой задачи для сильно эллиптической системы уравнений второго порядка

$$-\sum_{j=1}^{N} (\mu_{ij}\Delta \boldsymbol{u}_j + (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{g}_i, \quad \boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, N$$

(отметим, что $\operatorname{div} \mathbb{S}_i = \sum\limits_{j=1}^{N} (\mu_{ij}\Delta \boldsymbol{u}_j + (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)$, $i = 1, \ldots, N$). Из классических результатов для эллиптических систем уравнений (см., например, [14–16]) следует, что при любых $\mathbf{g}_k \in L_\sigma(\Omega)$, $k = 1, 2$ верно неравенство

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{W^2_\sigma(\Omega)} \leqslant B_9(\sigma, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \Omega) \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{L_\sigma(\Omega)}, \tag{17}$$

где $\mathbf{u}_k = \mathcal{U}(\mathbf{g}_k)$, $k = 1, 2$.

Наконец, в соответствии со структурой уравнений (12), третий набор промежуточных операторов $\mathcal{G}_i : \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega) \to C\big(\overline{\Omega}\big)$, $i = 1, \ldots, N$ определим следующим образом:

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{w}) = -\frac{\varepsilon}{2}\alpha_i\rho\boldsymbol{w}_i - \frac{\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{w}_i - \frac{1}{2}\alpha_i\rho\left(\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_j\right)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{w}_i - \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\alpha_i\rho\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_j\right)\otimes\boldsymbol{w}_i\right) -$$
$$- \alpha_i\nabla p(\rho) + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(1+\rho)(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{w}_i) + \alpha_i\rho\boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где по заданному вектору $\mathbf{w} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_N)$ с векторными компонентами $\boldsymbol{w}_i \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ строится $\rho = \mathcal{R}\left(\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_j\right) \in W^2_\sigma(\Omega)$. В силу вложения $W^2_\sigma(\Omega)$ в $C^1\big(\overline{\Omega}\big)$ из условий $\mathbf{w} \in W^2_\sigma(\Omega)$, $\rho \in W^2_\sigma(\Omega)$ следует, что $\mathcal{G}_i \in C\big(\overline{\Omega}\big)$, $i = 1, \ldots, N$. Кроме того, для всех $\mathbf{w}_k = (\boldsymbol{w}_{k1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{kN}) \in W^2_\sigma(\Omega)$, $k = 1, 2$ и соответствующих $\rho_k = \mathcal{R}\left(\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_{kj}\right) \in W^2_\sigma(\Omega)$, $k = 1, 2$ имеют место оценки

$$\|\mathcal{G}_i(\mathbf{w}_1) - \mathcal{G}_i(\mathbf{w}_2)\|_{L_\sigma(\Omega)} \leqslant B_{10}(\sigma, \Omega)\|\mathcal{G}_i(\mathbf{w}_1) - \mathcal{G}_i(\mathbf{w}_2)\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{11}\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^1(\overline{\Omega})} +$$
$$+ B_{12}\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{w}_{1i} - \boldsymbol{w}_{2i}\|_{C^1(\overline{\Omega})} + B_{10}\|\rho_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|p'(\rho_1) - p'(\rho_2)\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{18}$$

где $B_{11} = B_{11}\left(B_{10}, \|\mathbf{w}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|\rho_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \left\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\right\}, c_1, c_2, N, \{a_{ij}\}, \gamma\right)$, $B_{12} = B_{12}\Big(B_{10}, \|\mathbf{w}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|\mathbf{w}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|\rho_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \left\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\right\}, m, N, \{a_{ij}\}, \Omega\Big)$, причём зависимость в B_{11} и B_{12} от $\|\rho_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $\|\mathbf{w}_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $k = 1, 2$ является локально ограниченной, т. е. конечны $\sup B_{11}$ и $\sup B_{12}$ по любому множеству вида $\|\rho_1\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|\rho_2\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|\mathbf{w}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|\mathbf{w}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leqslant \text{const}$.

В итоге определим оператор $\mathbf{A} : \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega) \to \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, действующий по правилу $\mathbf{A} = \mathcal{U} \circ (\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N)$, т. е. для любых $\mathbf{w} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_N) \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ полагаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \mathcal{U}(\mathcal{G}_1(\mathbf{w}), \ldots, \mathcal{G}_N(\mathbf{w})).$$

Заметим, что неподвижная точка $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_N)$ оператора $\mathbf{A}$ (если она существует), вместе с соответствующей функцией $\rho = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{u}_j\right)$ являются решением вспомогательной задачи (11)–(13), поскольку построение образа $\mathbf{A}(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ заключается в последовательном решении задачи

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}, \quad \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_j, \quad \nabla\rho \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

откуда определяется $\rho = \mathcal{R}(\boldsymbol{v})$, и краевой задачи

$$-\sum_{j=1}^{N} (\mu_{ij}\Delta\boldsymbol{u}_j + (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j) = -\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{w}_i - \frac{\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{w}_i - -\frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{w}_i - \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_i) -$$

$$-\alpha_i\nabla p(\rho) + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(1+\rho)(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{w}_i) + \rho_i\boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\rho_i = \alpha_i\rho$, $i = 1, \dots, N$.

Покажем, что оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям теоремы Лерэ—Шаудера.

Установим сначала непрерывность оператора $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{w}_m = (\boldsymbol{w}_{1m}, ..., \boldsymbol{w}_{Nm}) \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{w}_m \longrightarrow \mathbf{w} = (\boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_N)$ при $m \to \infty$ сильно в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$. Тогда в силу непрерывности оператора $\mathcal{R}$ из $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ в $W^2_\sigma(\Omega)$ (см. (16)) имеем, что при $m \to \infty$

$$\rho_m = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_{jm}\right) \longrightarrow \rho = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_j\right)$$

в норме пространства $W^2_\sigma(\Omega)$. Из непрерывности вложения $W^2_\sigma(\Omega)$ в $C^1\big(\overline{\Omega}\big)$ и свойств (18) операторов $\mathcal{G}_i$, $i = 1, \dots, N$ получаем, что при $m \to \infty$

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{w}_m) \longrightarrow \mathcal{G}_i(\mathbf{w}), \quad i = 1, \dots, N$$

в нормах пространств $L_\sigma(\Omega)$ и $C\big(\overline{\Omega}\big)$. Наконец, из непрерывности оператора $\mathcal{U}$ из $L_\sigma(\Omega)$ в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ (см. (17)) следует, что при $m \to \infty$

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}_m) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})$$

сильно в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, что означает непрерывность оператора $\mathbf{A}$.

Для доказательства компактности (вполне непрерывности) оператора $\mathbf{A}$ возьмём в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ ограниченную последовательность $\mathbf{w}_m$, $m \in \mathbb{N}$. В силу компактности вложения $W^2_\sigma(\Omega)$ в $C^1\big(\overline{\Omega}\big)$ из последовательности $\mathbf{w}_m$, $m \in \mathbb{N}$ выделим подпоследовательность, сохранив за ней прежнее обозначение, такую что при $m \to \infty$

$$\mathbf{w}_m \longrightarrow \mathbf{w} \text{ сильно в } C^1\big(\overline{\Omega}\big).$$

Тогда из оценки (16) следует, что при $m \to \infty$

$$\rho_m = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_{jm}\right) \longrightarrow \rho = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_j\right)$$

в норме пространства $W^2_\sigma(\Omega)$. Повторяя предыдущие рассуждения получим, что при $m \to \infty$

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}_m) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})$$

сильно в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, что завершает доказательство компактности оператора $\mathbf{A}$.

Чтобы завершить проверку условий теоремы Лерэ—Шаудера и, тем самым, доказательство существования сильного решения краевой задачи (11)–(13) осталось показать, что множество всех решений класса $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ операторного уравнения

$$\lambda \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad \lambda \in (0, 1] \tag{19}$$

ограничено в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, т. е. требуется получить равномерную по параметру λ априорную оценку решений уравнения (19) в пространстве $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$.

3.2. Задача с параметром λ и первая оценка

Для получения равномерной по λ априорной оценки решений уравнения (19) в пространстве $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ необходимо оценить равномерно по λ в пространстве $W^2_\sigma(\Omega)$ предполагаемое решение $(\rho, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N)$ краевой задачи (индекс λ у величин, зависящих от λ, опускаем)

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}, \tag{20}$$

$$\frac{\lambda\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i + \frac{\lambda}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i + \frac{\lambda}{2}\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) + \\ + \lambda\alpha_i\nabla p(\rho) = \operatorname{div}\mathbb{S}_i + \lambda\boldsymbol{J}_i + \lambda\rho_i\boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \nabla\rho\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^N \alpha_j\boldsymbol{u}_j$, $\rho_i = \alpha_i\rho$, $\mathbb{S}_i = \sum\limits_{j=1}^N (\lambda_{ij}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j))$, $\boldsymbol{J}_i = \sum\limits_{j=1}^N a_{ij}(1+\rho)(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Для этого умножим сначала (21) скалярно на $\dfrac{\boldsymbol{u}_i}{\lambda}$, проинтегрируем по Ω и просуммируем по $i = 1, \ldots, N$, в результате получим

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon m}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^N \alpha_i \int\limits_\Omega |\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\int\limits_\Omega (1+\rho)|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|^2\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega p(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}. \tag{23}$$

Проинтегрируем теперь уравнение (20) по области Ω, получим равенство

$$\int\limits_\Omega \rho\,d\boldsymbol{x} = m. \tag{24}$$

Умножая далее уравнение (20) на функцию $G'(\rho)$ (где $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция), приходим к равенству

$$\varepsilon G''(\rho)|\nabla\rho|^2 - \varepsilon\operatorname{div}(G'(\rho)\nabla\rho) + (\rho G'(\rho) - G(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \\ + \operatorname{div}(G(\rho)\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho G'(\rho) = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}G'(\rho). \tag{25}$$

Полагая в (25) $G(\rho) = (\rho + l)\int\limits_1^{\rho+l} \dfrac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta$ с произвольным $l \in (0,1]$, выведем равенство

$$\int\limits_\Omega p(\rho+l)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = l\int\limits_\Omega \frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + l\int\limits_\Omega \left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} +$$
$$+\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)d\boldsymbol{x} + \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x} - \varepsilon\int\limits_\Omega\rho\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)d\boldsymbol{x} -$$
$$-\varepsilon\int\limits_\Omega\frac{\rho p(\rho+l)}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x} - \varepsilon\int\limits_\Omega\frac{p'(\rho+l)}{\rho+l}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}. \quad (26)$$

Рассмотрим подробнее слагаемые в правой части (26). Для первого слагаемого верна оценка (см. условия (5) и замечание 1)

$$l\int\limits_\Omega\frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} \leqslant B_{13}\,(B_3,B_4,\gamma)\,l\int\limits_\Omega(\rho^{\gamma-1}+1)\left(\sum_{i=1}^N|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|\right)d\boldsymbol{x}. \quad (27)$$

Второе слагаемое в правой части (26), ввиду условий (5) и замечания 1, оценим следующим образом:

$$l\int\limits_\Omega\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = l\int\limits_{\{\Omega\colon\,\rho\geqslant 1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}\geqslant 0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} +$$
$$+l\int\limits_{\{\Omega\colon\,\rho\geqslant 1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}<0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + l\int\limits_{\{\Omega\colon\,0\leqslant\rho<1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}\geqslant 0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} +$$
$$+l\int\limits_{\{\Omega\colon\,0<\rho<1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}<0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + l\int\limits_{\{\Omega\colon\,\rho=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}<0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant B_{14}(B_3,B_4,c_1,\gamma)\,l\int\limits_\Omega(\rho^{\gamma-1}+1)\left(\sum_{i=1}^N|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|\right)d\boldsymbol{x} + B_{15}(c_2)\,l\ln l\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|\,d\boldsymbol{x} -$$
$$-B_2 l\int\limits_{\{\Omega\colon\,0<\rho<1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}<0\}}\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{v}}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x}. \quad (28)$$

Для третьего слагаемого в правой части (26) получим, используя (5), замечание 1 и неравенство Юнга, что

$$\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\left(B_1+\frac{1}{c_1\gamma}\right)\int\limits_\Omega\rho^\gamma\,d\boldsymbol{x} + B_{16}(B_1,B_3,B_4,c_1,m,\gamma,\Omega). \quad (29)$$

Снова используя замечание 1 и неравенство Юнга, четвёртое слагаемое в правой части (26) оценим так:

$$\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\left(B_1+\frac{1}{c_1\gamma}\right)\int\limits_\Omega\rho^\gamma\,d\boldsymbol{x} + B_{17}(B_1,c_1,c_2,m,\gamma,\Omega). \quad (30)$$

Ввиду замечания 1, для пятого слагаемого в правой части (26) справедлива оценка

$$-\varepsilon \int\limits_\Omega \rho \left(\int\limits_1^{\rho+l} \frac{p(\eta)}{\eta^2}\, d\eta \right) d\boldsymbol{x} \leqslant -\varepsilon B_1 \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + B_{18}(B_2, \Omega). \tag{31}$$

Используя замечание 1 и формулу (24), для предпоследнего слагаемого в правой части (26) получим, что

$$-\varepsilon \int\limits_\Omega \frac{\rho p(\rho+l)}{\rho+l}\, d\boldsymbol{x} \leqslant -\frac{\varepsilon}{c_1 \gamma} \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + B_{19}(c_2, m). \tag{32}$$

Последнее слагаемое в правой части (26) неположительно (см. (5)).

Таким образом, из (26), ввиду (27)–(32) и неположительности последнего слагаемого в правой части (26), следует неравенство

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega p(\rho+l) \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} \leqslant -\frac{\varepsilon}{2} \left(B_1 + \frac{1}{c_1 \gamma} \right) \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + B_{13}\, l \int\limits_\Omega (\rho^{\gamma-1} + 1) \left(\sum_{i=1}^N |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i| \right) d\boldsymbol{x} + \\ + B_{14}\, l \int\limits_\Omega (\rho^{\gamma-1} + 1) \left(\sum_{i=1}^N |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i| \right) d\boldsymbol{x} + B_{15}\, l \ln l \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|\, d\boldsymbol{x} - \\ - B_2 l \int\limits_{\{\Omega\colon\, 0<\rho<1-l,\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}<0\}} \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\rho+l}\, d\boldsymbol{x} + B_{20}(B_{16}, B_{17}, B_{18}, B_{19}). \end{aligned} \tag{33}$$

Перейдём в (33) к пределу при $l \to +0$, используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, и в итоге получим оценку

$$\int\limits_\Omega p(\rho) \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} \leqslant -\frac{\varepsilon}{2} \left(B_1 + \frac{1}{c_1 \gamma} \right) \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + B_{20}. \tag{34}$$

Далее, из соотношения (23), в силу (10), (34) и того факта, что $\dfrac{1}{\lambda} \geqslant 1$, следует неравенство

$$\begin{aligned} B_5 \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon m}{2|\Omega|} \sum_{i=1}^N \alpha_i \int\limits_\Omega |\boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2} \left(B_1 + \frac{1}{c_1 \gamma} \right) \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int\limits_\Omega (1+\rho) |\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|^2\, d\boldsymbol{x} \leqslant \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i\, d\boldsymbol{x} + B_{20}, \end{aligned}$$

откуда ввиду оценок (здесь используются неравенство Фридрихса и неравенство Юнга)

$$B_5 \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} \geqslant B_{21}(B_5, \Omega) \sum_{i=1}^N \|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

$$\sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i\, d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{B_{21}}{2} \sum_{i=1}^N \|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4} \left(B_1 + \frac{1}{c_1 \gamma} \right) \|\rho\|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} + B_{22} \left(B_1, B_{21}, \left\{ \|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})} \right\}, c_1, N, \gamma, \varepsilon, \Omega \right),$$

получаем равномерную по λ оценку

$$\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{u}_i\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\rho\|_{L_\gamma(\Omega)} \leqslant B_{23}\left(B_1, B_{20}, B_{21}, B_{22}, c_1, N, \gamma, \varepsilon\right). \tag{35}$$

Отсюда, в частности, следует (здесь используется вложение $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$)

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_6(\Omega)} \leqslant B_{24}\left(B_{23}, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{36}$$

3.3. Дальнейшие оценки

Перепишем уравнение (20) в виде

$$-\varepsilon\Delta\rho = \operatorname{div}(\boldsymbol{h} - \rho\boldsymbol{v}), \tag{37}$$

где векторное поле $\boldsymbol{h}$, в свою очередь, является решением задачи

$$\operatorname{div}\boldsymbol{h} = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|} - \varepsilon\rho, \quad \boldsymbol{h}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}. \tag{38}$$

Из оценки (35), свойств решений задачи (38) (см., например, [12], стр. 169) и вложения $W_\gamma^1(\Omega)$ в $C\big(\overline{\Omega}\big)$ следует, что

$$\|\boldsymbol{h}\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} \leqslant B_{25}(\gamma, \Omega)\|\boldsymbol{h}\|_{W_\gamma^1(\Omega)} \leqslant B_{26}(B_{25}, \gamma, \Omega)\left\|\varepsilon\frac{m}{|\Omega|} - \varepsilon\rho\right\|_{L_\gamma(\Omega)} \leqslant B_{27}(B_{23}, B_{26}, m, \gamma, \Omega). \tag{39}$$

Ввиду (35), (36) и (39), из (20) (т. е. (37)) и (22), в силу оценок для решений эллиптических краевых задач (см., например, [12], стр. 211) вытекает, что

$$\|\nabla\rho\|_{L_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)} \leqslant B_{28}\left(\gamma, \varepsilon, \Omega\right)\left(\|\boldsymbol{h}\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} + \sum_{i=1}^{N}\|\rho\boldsymbol{u}_i\|_{L_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)}\right) \leqslant B_{29}(B_{23}, B_{24}, B_{27}, B_{28}, N),$$

а значит

$$\|\rho\|_{W^1_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)} \leqslant B_{30}(B_{23}, B_{29}, \gamma, \Omega).$$

Поскольку при $\gamma > 6$ пространство $W^1_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)$ вложено в пространство $C\big(\overline{\Omega}\big)$, то при $\gamma > 6$

$$\|\rho\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} \leqslant B_{31}\left(B_{30}, \gamma, \Omega\right). \tag{40}$$

Для получения оценки вида (40) при $\gamma \in (3, 6]$ необходимо повторить рассуждения выше. Т. к. пространство $W^1_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)$ вложено при $\gamma \in (3, 6)$ в пространство $L_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)$, а при $\gamma = 6$ — в пространство $L_{12}(\Omega)$, то при $\gamma \in (3, 6)$

$$\|\rho\|_{L_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)} \leqslant B_{32}\left(B_{30}, \gamma, \Omega\right), \tag{41}$$

а при $\gamma = 6$

$$\|\rho\|_{L_{12}(\Omega)} \leqslant B_{33}\left(B_{30}, \Omega\right). \tag{42}$$

Используя оценки (41), (42), свойства решений задачи (38) и вложения пространств $W^1_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)$, $W_{12}^1(\Omega)$ в $C\big(\overline{\Omega}\big)$, приходим к неравенствам

$$\|\boldsymbol{h}\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} \leqslant B_{34}(\gamma, \Omega)\|\boldsymbol{h}\|_{W^1_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)} \leqslant B_{35}(B_{34}, \gamma, \Omega)\left\|\varepsilon\frac{m}{|\Omega|} - \varepsilon\rho\right\|_{L_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant B_{36}(B_{32}, B_{35}, m, \gamma, \Omega), \quad 3 < \gamma < 6, \tag{43}$$

$$\|\boldsymbol{h}\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{37}(\Omega)\|\boldsymbol{h}\|_{W^1_{12}(\Omega)} \leqslant B_{38}(B_{37},\Omega)\left\|\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}-\varepsilon\rho\right\|_{L_{12}(\Omega)} \leqslant B_{39}(B_{33},B_{38},m,\Omega),\ \gamma=6. \quad (44)$$

Учитывая (36), (41), (42), (43) и (44), из (20) (т. е. (37)) и (22), в силу оценок для решений эллиптических краевых задач получаем теперь, что

$$\|\nabla\rho\|_{L_\gamma(\Omega)} \leqslant B_{40}(\gamma,\varepsilon,\Omega)\left(\|\boldsymbol{h}\|_{C(\overline{\Omega})}+\sum_{i=1}^N\|\rho\boldsymbol{u}_i\|_{L_\gamma(\Omega)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant B_{41}(B_{24},B_{32},B_{35},B_{40},N),\quad 3<\gamma<6,$$

$$\|\nabla\rho\|_{L_4(\Omega)} \leqslant B_{42}(\varepsilon,\Omega)\left(\|\boldsymbol{h}\|_{C(\overline{\Omega})}+\sum_{i=1}^N\|\rho\boldsymbol{u}_i\|_{L_4(\Omega)}\right)\leqslant B_{43}(B_{24},B_{33},B_{39},B_{42},N),\ \gamma=6.$$

Тогда

$$\|\rho\|_{W^1_\gamma(\Omega)} \leqslant B_{44}(B_{23},B_{43},\gamma),\quad 3<\gamma<6 \quad \text{и} \quad \|\rho\|_{W^1_4(\Omega)} \leqslant B_{45}(B_{33},B_{43},\Omega),\quad \gamma=6.$$

Ввиду вложений пространств $W^1_\gamma(\Omega)$, $W^1_4(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$, получаем требуемое:

$$\|\rho\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{46}(B_{44},B_{45},\gamma,\Omega),\quad 3<\gamma\leqslant 6. \quad (45)$$

Из (36), (40) и (45), в частности, следует, что

$$\|\rho\boldsymbol{u}_i\|_{L_6(\Omega)} \leqslant B_{47}(B_{24},B_{46}),\quad i=1,\dots,N.$$

Введём обозначения

$$\boldsymbol{\zeta}_i=\frac{1}{2|\Omega|}\int\limits_\Omega \rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,\dots,N,$$

$$\boldsymbol{H}_i=\lambda\left(-\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i-\frac{\varepsilon m}{2|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{J}_i+\rho_i\boldsymbol{f}_i-\boldsymbol{\zeta}_i\right),\quad i=1,\dots,N.$$

Обозначим через $\mathbb{V}_i$, $i=1,\dots,N$ решения краевых задач

$$\operatorname{div}\mathbb{V}_i=\frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{\zeta}_i,\quad \mathbb{V}_i|_{\partial\Omega}=0,\quad i=1,\dots,N, \quad (46)$$

и положим $\mathbb{G}_i=\lambda\left(-\alpha_i p(\rho)\mathbb{I}-\frac{1}{2}\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i-\mathbb{V}_i\right)$, $i=1,\dots,N$. В этих обозначениях уравнения (21) принимают вид

$$-\operatorname{div}\mathbb{S}_i=\boldsymbol{H}_i+\operatorname{div}\mathbb{G}_i,\quad i=1,\dots,N. \quad (47)$$

Так как правые части уравнений (46) равномерно ограничены по λ в пространстве $L_{\frac{3}{2}}(\Omega)$, то, в силу свойств решений задач (46) (см., например, [12], стр. 169), для $\mathbb{V}_i$, $i=1,\dots,N$ справедливы неравенства

$$\|\mathbb{V}_i\|_{W^1_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leqslant B_{48}(B_{23},B_{24},B_{31},B_{46},N,\Omega),\quad i=1,\dots,N.$$

В результате заключаем, что имеют место оценки (здесь используется вложение $W^1_{\frac{3}{2}}(\Omega)$ в $L_3(\Omega)$)

$$\|\boldsymbol{H}_i\|_{L_6(\Omega)}+\|\mathbb{G}_i\|_{L_3(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant B_{49}\left(B_{23}, B_{24}, B_{46}, B_{47}, B_{48}, c_1, c_2, \left\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\right\}, \{a_{ij}\}, N, m, \gamma, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Следовательно, из уравнений (21) (т. е. (47)) и граничных условий (22), в силу оценок для решений эллиптических задач (см., например, [14–16]) вытекает, что

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W_3^1(\Omega)} \leqslant B_{50}\left(B_{49}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, N, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

и, ввиду вложения $W_3^1(\Omega)$ в $L_{2\sigma}(\Omega)$, приходим к соотношениям

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_{2\sigma}(\Omega)} \leqslant B_{51}\left(B_{50}, \sigma, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Из (20) (т. е. (37)) и (22), в силу оценок для решений эллиптических краевых задач получаем теперь, что

$$\|\nabla\rho\|_{L_{2\sigma}(\Omega)} \leqslant B_{52}\left(B_{27}, B_{31}, B_{46}, B_{51}, N, \varepsilon, \sigma, \Omega\right),$$

а значит

$$\|\rho\|_{W_{2\sigma}^1(\Omega)} \leqslant B_{53}\left(B_{31}, B_{46}, \sigma, \Omega\right).$$

Тогда, благодаря оценкам для решений эллиптических задач, из (20) (т. е. (37)) и (22) получаем, что

$$\|\nabla\rho\|_{W_3^1(\Omega)} \leqslant B_{54}\left(B_{24}, B_{27}, B_{31}, B_{46}, B_{50}, B_{51}, B_{52}, N, m, \varepsilon, \sigma, \Omega\right).$$

Поэтому

$$\|\rho\|_{W_3^2(\Omega)} \leqslant B_{55}\left(B_{31}, B_{46}, B_{54}, \Omega\right).$$

Отсюда, ввиду вложения $W_3^2(\Omega)$ в $W_{2\sigma}^1(\Omega)$, следует неравенство

$$\|\rho\|_{W_{2\sigma}^1(\Omega)} \leqslant B_{56}\left(B_{55}, \sigma, \Omega\right).$$

Таким образом, для функций $\boldsymbol{H}_i$, $\mathbb{G}_i$, $i = 1, \ldots, N$ получаем оценки

$$\|\boldsymbol{H}_i\|_{L_{2\sigma}(\Omega)} + \|\mathbb{G}_i\|_{L_\sigma(\Omega)} \leqslant B_{57}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где $B_{57} = B_{57}\left(B_{31}, B_{46}, B_{50}, B_{51}, c_1, c_2, \{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\}, \{a_{ij}\}, N, m, \gamma, \sigma, \Omega\right)$, благодаря которым приходим к соотношениям

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W_\sigma^1(\Omega)} \leqslant B_{58}\left(B_{57}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, \sigma, N, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

и

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{59}\left(B_{58}, \sigma, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

С помощью этих неравенств и оценок для решений эллиптических задач из (20) (т. е. (37)) и (22) выводим, что

$$\|\rho\|_{W_\sigma^2(\Omega)} \leqslant B_{60}\left(B_{27}, B_{31}, B_{46}, B_{56}, B_{58}, B_{59}, N, m, \varepsilon, \sigma, \Omega\right),$$

откуда

$$\|\nabla\rho\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{61}\left(B_{60}, \sigma, \Omega\right).$$

Для функций $\mathbb{G}_i$, $i = 1, \ldots, N$ теперь справедливы следующие неравенства:

$$\|\operatorname{div}\mathbb{G}_i\|_{L_\sigma(\Omega)} \leqslant B_{62}\left(B_{31}, B_{46}, B_{58}, B_{59}, B_{61}, c_1, c_2, N, \gamma, \sigma, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Тогда из (21) (т. е. (47)), (22) и оценок для решений эллиптических задач следует, наконец, что

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W_\sigma^2(\Omega)} \leqslant B_{63}\left(B_{57}, B_{62}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, \sigma, N, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

3.4. Результат о разрешимости

Итак, выполнены все условия теоремы Лерэ—Шаудера, поэтому можно утверждать, что краевая задача (11)–(13) имеет по крайней мере одно сильное решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для доказательства разрешимости исходной краевой задачи (1)–(4) (см. определение 1) остаётся совершить предельный переход по параметру ε, отличающему задачу (11)–(13) от исходной задачи (1)–(4), на основании оценок, равномерных по этому параметру. Это предполагается сделать в следующей работе.

Авторы выражают благодарность уважаемому рецензенту за конструктивные замечания, позволившие улучшить качество работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rajagopal K. L., Tao L.* Mechanics of mixtures. N. J.: World Scientific, 1995.
2. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред, ч. 1. М.: Наука, 1987.
3. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory // Siberian Electron. Math. Rep. 2017. V. 14. P. 388–397.
4. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.* Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // Прикл. механика и техн. физика. 1992. № 3. С. 97–104.
5. *Блохин А. М., Доровский В. Н.* Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск: ОИГГМ, 1994.
6. *Frehse J., Goj S., Malek J.* On a Stokes-like system for mixtures of fluids // SIAM J. Math. Anal. 2005. V. 36, N 4. P. 1259–1281.
7. *Frehse J., Weigant W.* On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids // Appl. Math. 2008. V. 53, N 4. P. 319–345.
8. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений политропного движения вязких сжимаемых многожидкостных сред // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 664–693.
9. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
10. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.
12. *Novotný A., Straškraba I.* Introduction to the mathematical theory of compressible flow. Oxford: Oxford University Press, 2004.
13. *Mucha P., Pokorny M.* Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids // Math. Models Methods Appl. Sci. 2010. V. 20, N 5. P. 785–813.
14. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
15. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем эллиптических уравнений в смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 42. С. 233–297.
16. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35–92.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF BAROTROPIC FLOWS OF A MULTICOMPONENT MEDIUM. I. STATEMENT OF THE MAIN PROBLEM. SOLVABILITY OF AN AUXILIARY PROBLEM

© 2023 **A. E. Mamontov**[1,2a], **D. A. Prokudin**[3b]

[1] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2] *Siberian State University of Telecommunications and Information Science, Novosibirsk, 630102 Russia,*
[3] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]aem@hydro.nsc.ru, [b]prokudin@hydro.nsc.ru

Received 30.08.2022, revised 18.09.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. The problem of steady barotropic motion of a multicomponent medium consisting of viscous compressible fluids in a bounded domain of three-dimensional space is formulated. The viscosity matrices are assumed to be arbitrary (nondiagonal). The solvability of a regularized (approximate) problem is proved.

Keywords: existence theorem, steady barotropic flow, viscous compressible multifluid, viscosity matrix.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.406

REFERENCES

1. K. L. Rajagopal and L. Tao, *Mechanics of Mixtures* (World Scientific, N. J., 1995).
2. R. I. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media. Part 1* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].
3. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: Barotropic existence theory," Sib. Electron. Math. Rep. **14**, 388–397 (2017).
4. V. N. Dorovskii and Yu. V. Perepechko, "Phenomenological description of two-velocity media with relaxing tangential stresses," Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. (3), 97–104 (1992) [in Russian].
5. A. M. Blokhin and V. N. Dorovskii, *Problems of Mathematical Modeling in the Theory of Multivelocity Continuum* (OIGGM, Novosibirsk, 1994) [in Russian].
6. J. Frehse, S. Goj, and J. Malek, "On a Stokes-like system for mixtures of fluids," SIAM J. Math. Anal. **36** (4), 1259–1281 (2005).
7. J. Frehse and W. Weigant, "On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids," Appl. Math. **53** (4), 319–345 (2008).
8. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Solvability of a stationary boundary value problem for equations of polytropic motion of viscous compressible multifluid media," Sib. Elektron. Mat. Izv. **13**, 664–693 (2016) [in Russian].
9. V. G. Maz'ya, *Sobolev Spaces* (Izd. Leningrad. Univ., Leningrad, 1985) [in Russian].
10. S. M. Nikol'skii, *Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 802–814.

11. V. A. Trenogin, *Functional Analysis* (Fizmatlit, Moscow, 2002) [in Russian].
12. A. Novotny and I. Straskraba, *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2004).
13. P. Mucha and M. Pokorny, "Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids," Math. Models Methods Appl. Sci. **20** (5), 785–813 (2010).
14. O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
15. L. A. Solonnikov, "On general boundary value problems for systems of Douglis—Nirenberg elliptic equations. II," Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **42**, 233–297 (1966) [in Russian].
16. S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II," Commun. Pure Appl. Math. **17**, 35–92 (1964).