

УДК 533.17:532.517.4:53.082.56:532.574.7

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА  
В ОТСАСЫВАЮЩЕЙ ТРУБЕ МОДЕЛИ ГИДРОТУРБИНЫ**© 2023 Е. В. Палкин<sup>1a</sup>, М. Ю. Хребтов<sup>1,2b</sup>, Р. И. Мулляджанов<sup>1,2c</sup>,  
И. В. Литвинов<sup>1,2d</sup>, С. В. Алексеенко<sup>1,2e</sup><sup>1</sup>*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*E-mails: <sup>a</sup>palkinev89@gmail.com, <sup>b</sup>weexov@yandex.by, <sup>c</sup>rustammul@gmail.com,  
<sup>d</sup>litv88@yandex.ru, <sup>e</sup>aleks@itp.nsc.ruПоступила в редакцию 18.08.2022 г.; после доработки 18.08.2022 г.;  
принята к публикации 29.09.2022 г.

При помощи метода крупных вихрей численно изучается гидродинамика в отсасывающей трубе модельной гидротурбины в условиях частичной нагрузки. Закрутка создаётся рабочим колесом, вращающимся с постоянной угловой скоростью. Сравниваются результаты численного моделирования с имеющимися экспериментальными данными, полученными методом цифровой трассерной визуализации и измерениями пульсаций давления для трёх режимов течения с различными объёмными расходами. Средние по времени поля скорости хорошо согласуются между экспериментальными и численными результатами. Для изучения динамических особенностей анализируются спектральные характеристики течения, которые имеют сильную когерентную составляющую. Эта вихревая структура соответствует прецессирующему вихревому ядру, меняющему форму и амплитуду с увеличением числа Рейнольдса.

**Ключевые слова:** гидротурбина, отсасывающая труба, закрученные течения, гидродинамическая неустойчивость, автоколебания, прецессирующее вихревое ядро, турбулентность, моделирование, метод крупных вихрей.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.112

**ВВЕДЕНИЕ**

Гидроэнергетика продолжает изменяться от постоянного до очень гибкого источника энергии. На режимах работы с частичными нагрузками угловой момент потока за рабочим колесом имеет значительную закрутку, что влияет на работу турбины, в том числе устойчивость течения. Когда интенсивность закрутки превышает критическое значение, развивается срыв спирального вихря [1]. Это явление также известно как прецессирующее вихревое ядро (ПВЯ) или вихревой жгут. ПВЯ возникает как в закрученных струях воздуха в камерах сгорания [2], так и в закрученных потоках воды в отсасывающих трубах [3].

При первых попытках физического описания ПВЯ в турбинах Фрэнсиса [4] наблюдалась генерация сильного вихря в условиях частичной нагрузки. Более поздние исследования подробно описывают ПВЯ на основе численных [5] и экспериментальных [6] данных. ПВЯ в целом можно описать как когерентную спиральную структуру, которая меандрирует вниз по

---

Численное моделирование выполнено в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-58-12012). Экспериментальные исследования выполнены в рамках гранта Российского научного фонда (проект 21-79-10080). Разработка вычислительного кода выполнена в рамках стипендии Президента РФ (проект СП-829.2021.1) и государственного задания ИТ СО РАН.

потоку, вращаясь в направлении закрутки среднего потока из-за гидродинамической неустойчивости. ПВЯ генерирует синхронные колебания давления (скачки давления) в отсасывающей трубе гидротурбины, что приводит к ограничению диапазона устойчивых режимов работы [3]. Во избежание повреждений и для повышения производительности гидротурбин для будущего энергетического рынка гидродинамические явления, происходящие в гидротурбинах, необходимо описать, понимать и уметь контролировать в различных режимах нагрузки.

Современные методы вычислительной гидродинамики представляют собой мощный инструмент для изучения сложных трёхмерных нестационарных течений в гидротурбинах (см. [7]). Эти методы, однако, требуют трудоёмкого шага валидации на подробных экспериментальных данных. Как правило, нестационарные усреднённые по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса (unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes, URANS [8, 9]) используются в практических приложениях для моделирования потоков в сложных геометриях. Однако вихререшающие методы, в том числе прямое численное моделирование (direct numerical simulation, DNS) и метод крупных вихрей (large-eddy simulation, LES [9]) обеспечивают более надёжные данные по сравнению с URANS.

В этой работе нестационарный закрученный поток в отсасывающей трубе модельной гидротурбины моделировался методом LES с использованием неконформных блоков вычислительной сетки. Полученные данные верифицируются на экспериментальных, полученных методом анемометрии по изображениям частиц (particle image velocimetry, PIV) и измеренным сигналам пульсаций давления на стенках конуса отсасывающей трубы модели гидротурбины. Геометрия отсасывающей трубы представляет собой уменьшенную геометрическую модель отсасывающей трубы Фрэнсиса-99 с входным диаметром  $D = 100$  мм. Детальное описание аэродинамической установки и параметров методов измерения представлено в [10, 11]. Для моделирования распределения скорости входного потока за рабочим колесом реальной турбины на входе в гидротурбину используется пара завихрителей. Первый набор лопастей завихрителя стационарен, как и направляющий аппарат в реальной гидротурбине, а второй вращается по аналогии с рабочим колесом турбины [12]. Этот подход снижает общую сложность установки как в численном моделировании, так и в экспериментальных исследованиях. Далее будут описаны детали численного моделирования, проанализированы три режима течения с особым акцентом на этапе валидации и сделаны выводы.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ДЕТАЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Для моделирования методом крупных вихрей используется открытый пакет OpenFOAM [13], основанный на методе конечных объёмов, с открытым исходным кодом для решения нестационарных трёхмерных отфильтрованных несжимаемых уравнений Навье — Стокса на неструктурированных объёмных сетках. В безразмерном виде эти уравнения записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau},$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0,$$

где  $p$  и  $u_i$  соответствуют полю давления и компонентам вектора скорости  $\mathbf{u}$  жидкости, которые зависят от координат  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  и времени  $t$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор «подсеточных напряжений», а символ «тильда» обозначает пространственную фильтрацию,  $Re = U_b D / \nu$  — число Рейнольдса,  $\nu$  и  $\rho$  — кинематическая вязкость и плотность среды соответственно. Подсеточные напряжения моделируются с помощью динамической модели Смагоринского без использования эмпирических констант, предложенной Германо [14], модифицированной Лилли [15], на основе стандартной модели Смагоринского [16]. Для дискретизации по времени используется неявная схема Кранка — Николсона второго порядка точности [17]. Для дискретизации конвективных

слагаемых используется MUSCL TVD схема (total variation diminishing), дающая необходимый компромисс между численной устойчивостью и точностью [18]. Вязкие слагаемые дискретизируются методом центральных разностей. Для связи полей давления и скорости использовался алгоритм PIMPLE, являющийся комбинацией методов PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) [19] и SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) [20], позволяющий использовать бóльший шаг по времени  $\Delta t$  в течениях с движущейся сеткой [21].

На входе в трубу диаметра  $D = 100$  мм [22] модельной гидротурбины (рис. 1) задаётся граничное условие Дирихле для скорости:  $\tilde{\mathbf{u}}|_{\text{inf}} = (U_b, 0, 0)$  и условие Неймана для давления:  $\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} \right|_{\text{inf}} = 0$ .

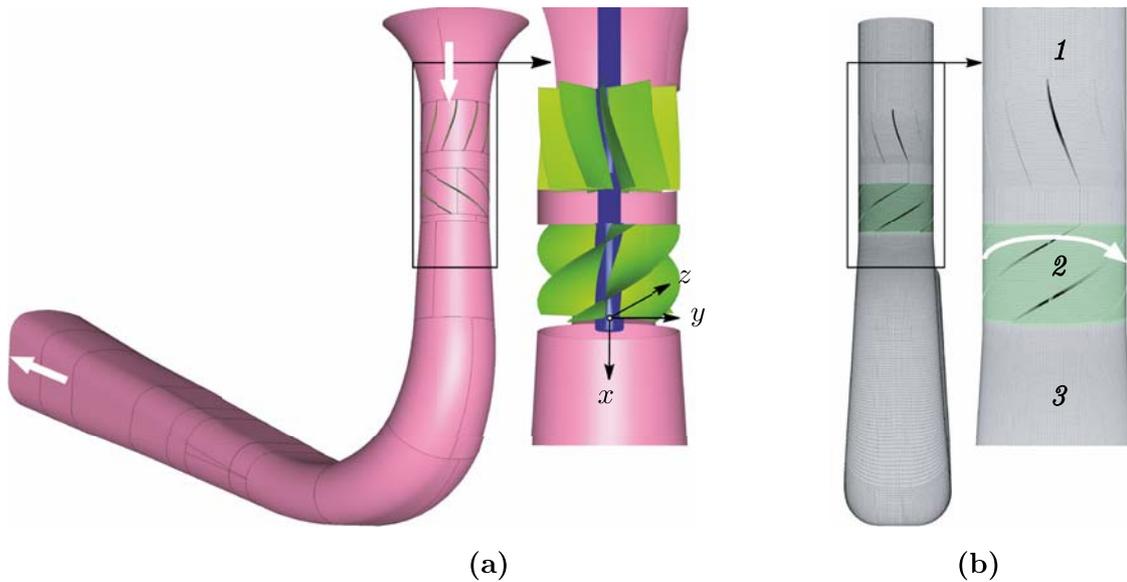


Рис. 1. Исследуемая геометрия модельной гидротурбины (а) и вычислительная сетка (б).

На рис. (а) все поверхности соответствуют непроницаемым стенкам; также отмечены декартова система координат, вход (стационарный) и выход (вращающийся с постоянной угловой частотой 40.53 Гц; завихритель состоит из десяти и пяти лопаток соответственно).

Стенки блоков 1 и 3 (б) стационарны,  
стенки блока 2 вращаются в указанном стрелкой направлении

Параметры однородного профиля скорости для рассматриваемых режимов описаны в таблице.

Рассматриваемые режимы течения и соответствующие им среднерасходная входная скорость  $U_b$ , объёмный расход  $Q$ , число Рейнольдса  $Re$  и нормированная угловая частота вращения рабочего колеса  $f_r D/U_b$

	$U_b$ , [м/с]	$Q/Q_c$ , [-]	$Re$ , [-]	$f_r D/U_b$ , [-]
режим 1	1.85	0.30	11600	2.19
режим 2	3.08	0.50	19300	1.31
режим 3	4.01	0.65	25100	1.01

На выходной поверхности отсасывающей трубы ставится граничное условие Неймана для каждой компоненты скорости и условие Дирихле для давления ( $\tilde{p}|_{\text{out}} = 0$ ). На остальных поверхностях, показанных на рис. 1, задаётся граничное условие прилипания, причём в блоке 2,

соответствующем второму завихрителю, все стенки имеют ненулевую угловую скорость. В качестве начального распределения полей задавались нулевые значения скорости и давления во всём объёме.

Для проведения нестационарных расчётов методом крупным вихрей для модельной геометрии гидротурбины построена гексагональная вычислительная сетка, состоящая из трёх неконформных блоков (см. рис. 1). Данная геометрия лопаток завихрителя выбрана исходя из критерия наибольшей эффективности гидротурбины при расходе  $Q_c = 0.049 \text{ м}^3/\text{с}$  и угловой частотой вращения рабочего колеса  $40.53 \text{ Гц}$  [12]. Неподвижный входной блок 1 включает входную трубу и первый блок лопастей. Он имеет общую границу с вращающимся блоком 2, соответствующим рабочему колесу. Зачастую учёт вращения рабочего колеса осуществляется путём задания дополнительной азимутальной силы внутри рабочего колеса [23]. В этой работе используется динамическая сетка для точного воспроизведения эффекта вращающихся лопастей [24]. Между неконформными блоками поля скорости и давления консервативно интерполируются со вторым порядком точности [25]. Сетка в блоке 3 имеет многоблочную ОН-топологию в поперечном сечении с равномерным распределением ячеек в направлении потока. Блоки 1–3 содержат  $1.5 \times 10^6$ ,  $0.45 \times 10^6$ ,  $5.6 \times 10^6$  гексагональных ячеек соответственно. Недавние исследования гидротурбины Каплана показывают, что такое разрешение является достаточным [23]. Все расчёты были выполнены при частичной загрузке  $Q < Q_c$ , а именно при входном расходе  $Q/Q_c = 0.30, 0.5, 0.65$  и отвечают числам Рейнольдса 11600, 19300, 25100 соответственно.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 2 показаны изоповерхности давления вместе с осевой скоростью в плоскости  $xOy$  для всех рассмотренных режимов, показывающих изменения в форме и амплитуде крупномасштабной когерентной вихревой структуры. Спиральный вихрь вращается вокруг оси симметрии и распространяется далеко вниз по потоку в отсасывающей трубе.

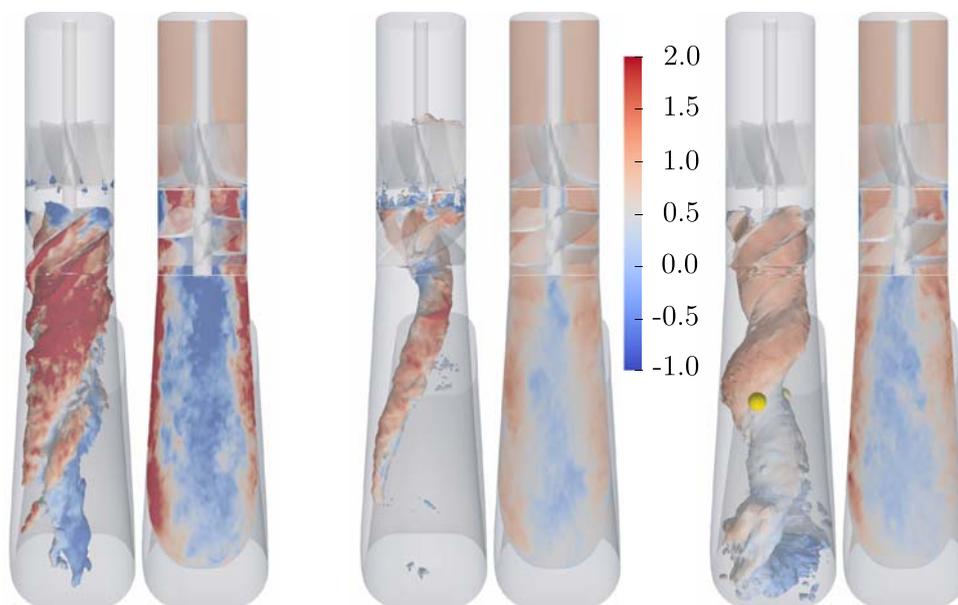


Рис. 2. Изоповерхность давления (цветом показана величина продольной скорости) и продольная компонента скорости в плоскости  $xOy$ . Справа жёлтыми точками показаны датчики, в которых рассматривалась величина давления

На рис. 3 показано сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными измерениями методом PIV, которое демонстрирует хорошее соответствие.

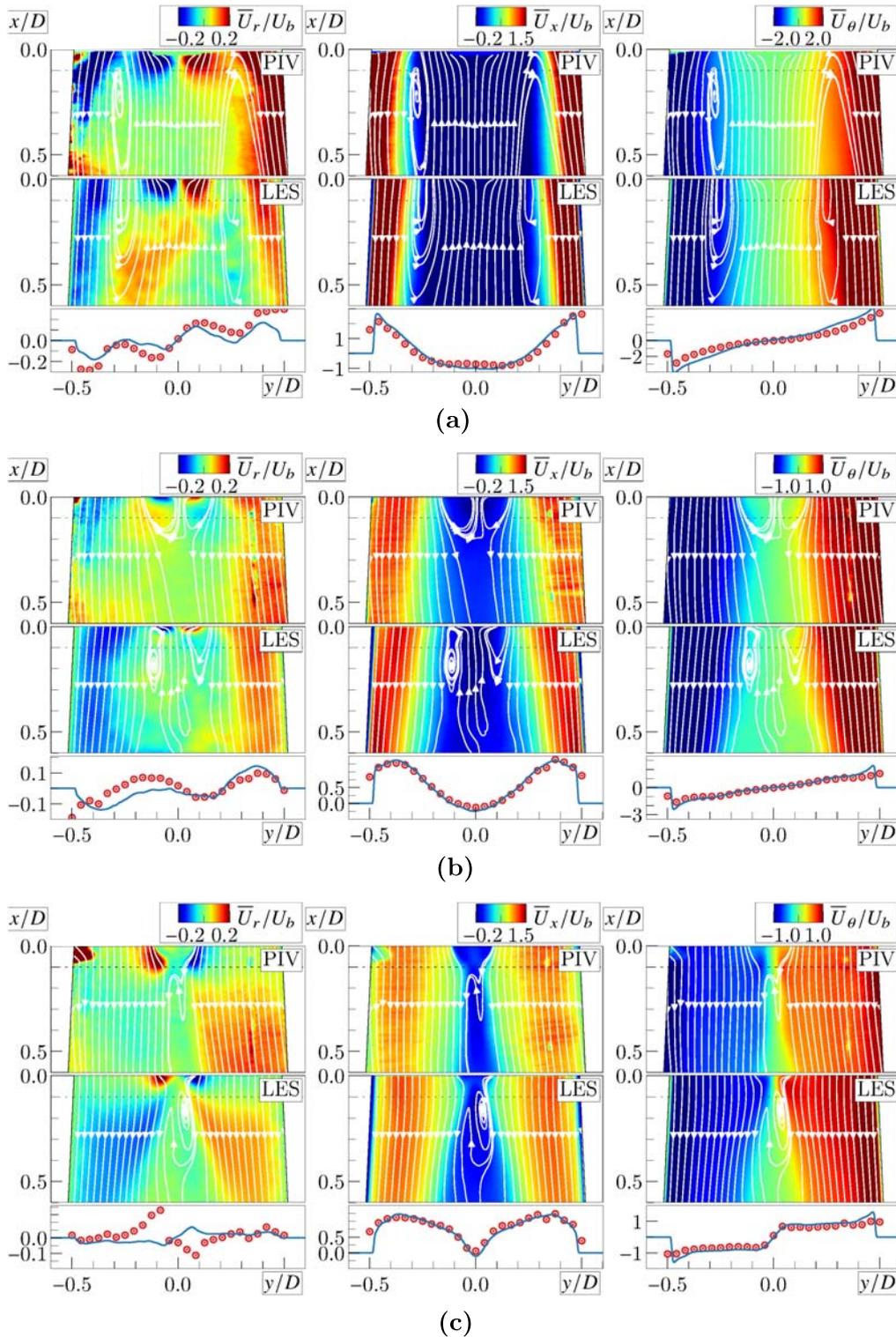


Рис. 3. Сравнение осреднённых по времени компонент скорости в плоскости  $xOy$  между LES и PIV для режимов: 1 (а), 2 (б), 3 (с) (см. таблицу); нижний ряд для каждого режима показывает соответствующий профиль на линии  $x/D = 0.1$  (LES — сплошная линия, PIV —  $\odot$  маркер)

Средние профили азимутальной и продольной скоростей хорошо согласованы, в то время как для профиля радиальной компоненты наблюдается большее отклонение из-за её малой ам-

плитуды. Результаты по размеру рециркуляционной зоны, полученные методом LES, воспроизводят PIV данные. С увеличением расхода наблюдается уменьшение этой области. Можно заметить, что для  $Q/Q_c = 0.30$  область возвратного течения проникает внутрь вращающегося завихрителя.

Далее был проанализирован безразмерный сигнал разницы давления  $\Delta p/(\rho U_b^2)$  в двух противоположных точках на стенке отсасывающей трубы гидротурбины в плоскости  $x/D = 1.5$  и его спектральные характеристики (см. рис. 4). На рисунке отчётливо видны низкочастотные пульсации давления, вызванные ПВЯ. Характерная частота ПВЯ для входных расходов  $Q/Q_c = 0.30, 0.50, 0.65$  равна  $fD/U_b = 1.03, 0.54, 0.52$  соответственно. Для  $Q/Q_c = 0.50$  было произведено сравнение частоты ПВЯ между численными и экспериментальными данными и получено хорошее согласие. Тем не менее, экспериментальные данные показывают характерный вторичный пик на более высокой частоте, что не было воспроизведено LES методом.

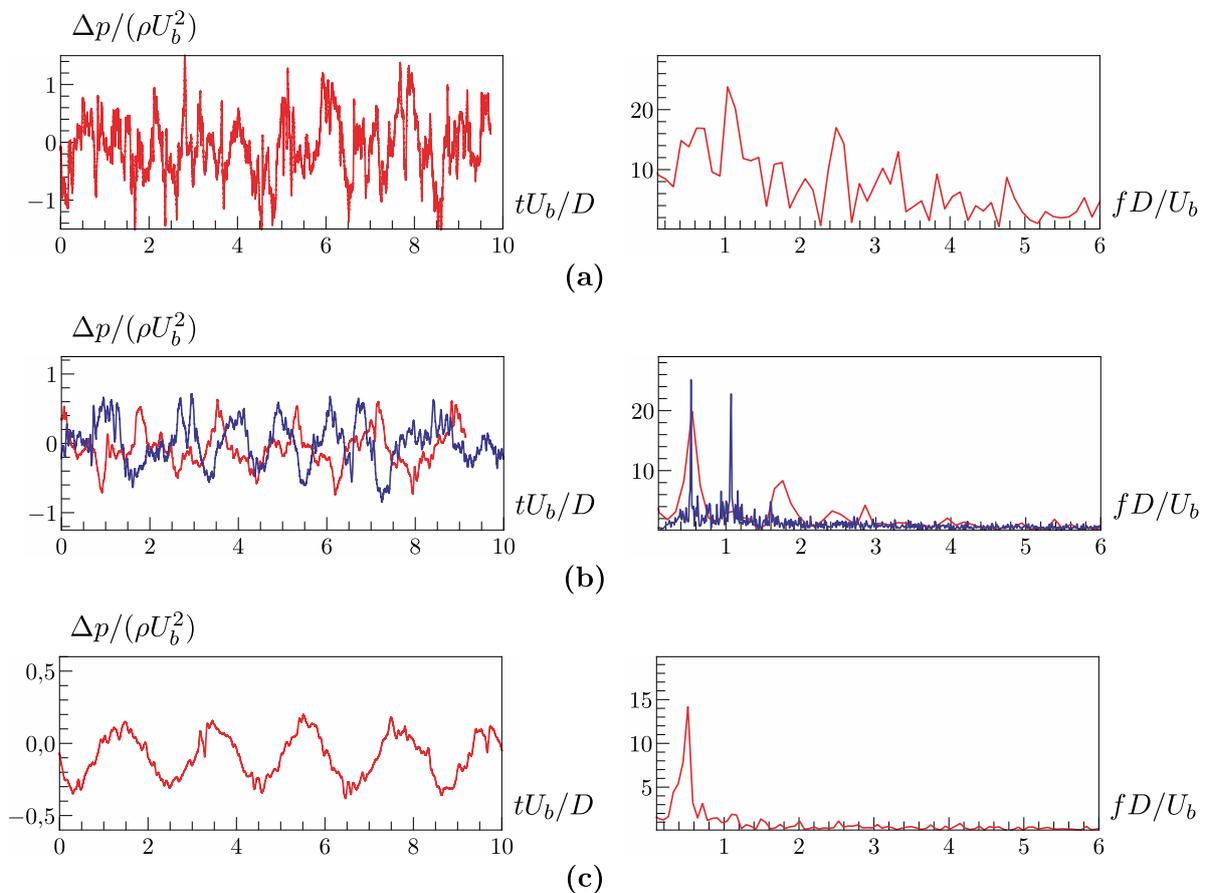


Рис. 4. Слева: сигнал разницы давления  $\Delta p/(\rho U_b^2)$ , измеренный в двух противоположных точках на стенке  $x/D = 1.5$  (см. рис. 2) для режимов 1 (а), 2 (б), 3 (с); справа: Фурье-спектр сигнала слева; красная и синяя кривые отвечают численным и экспериментальным данным соответственно

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование закрученного потока методом крупных вихрей в отсасывающей трубе за модельной воздушной турбиной в условиях частичной нагрузки для трёх режимов течения, характеризующихся различными расходами воздуха. Моделирование включало вращающийся завихритель и неконформные сетки с динамической интерполяцией полей скорости и давления. Основное внимание уделялось этапу верификации на экспериментальных данных.

Между экспериментальными и численными результатами продемонстрировано хорошее соответствие, указывающее на то, что численное моделирование корректно фиксирует изменения размеров и амплитуды рециркуляционной области. Визуализация изоповерхностей показала наличие прецессирующего вихревого ядра, вращающегося вокруг оси. Анализ сигналов пульсаций давления и их Фурье-спектр подтвердил это и указал на согласие между расчётами и экспериментальными измерениями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Gallaire F., Ruith M., Meiburg E., Chomaz J.-M., Huerre P.* Spiral vortex breakdown as a global mode // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 549. P. 71–80; DOI: 10.1017/S0022112005007834
2. *Syred N.* A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems // *Prog. Energy Combust. Sci.* 2006. V. 32. P. 93–161; DOI: 10.1016/j.pecs.2005.10.002
3. *Dörfler P., Sick M., Coutu A.* Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery: Engineer's Guidebook for Planning, Design and Troubleshooting. London: Springer-Verl., 2013.
4. *Nishi M., Kubota T., Matsunaga S., Senoo Y.* Study on swirl flow and surge in an elbow type draft tube // *Proc. IAHR 10th Symp.* 1980. V. 1. P. 557–568.
5. *Pasche S., Avellan F., Gallaire F.* Part load vortex rope as a global unstable mode // *J. Fluids Engrg.* 2017. V. 139, N 5; DOI: 10.1115/1.4035640
6. *Goyal R., Gandhi B. K., Cervantes M. J.* PIV measurements in francis turbine—a review and application to transient operations // *Renew. Sust. Energ. Rev.* 2018. V. 81. P. 2976–2991; DOI: 10.1115/1.4035640
7. *Tiwari G., Kumar J., Prasad V., Patel V. K.* Utility of CFD in the design and performance analysis of hydraulic turbines – A review // *Energy Rep.* 2020. V. 6. P. 2410–2429; DOI: 10.1016/j.egy.2020.09.004
8. *Reynolds O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // *Philos. Trans. Royal Soc. A.* 1895. V. 186. P. 123–64.
9. *Ferziger J. H., Perić M., Street R.L.* Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verl., 2002.
10. *Litvinov I., Shtork S., Gorelikov E., Mitryakov A., Hanjalić K.* Unsteady regimes and pressure pulsations in draft tube of a model hydro turbine in a range of off-design conditions // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2018. V. 91. P. 410–422; DOI: 10.1016/j.exptthermfluidsci.2017.10.030
11. *Litvinov I., Sharaborin D., Gorelikov E., Dulin V., Shtork S., Alekseenko S., Oberleithner K.* Modal decomposition of precessing vortex core in a model hydro turbine // *Appl. Sci.* 2022. V. 12, N 10. Article 5127; DOI: 10.3390/app12105127
12. *Sonin V., Ustimenko A., Kuibin P., Litvinov I., Shtork S.* Study of the velocity distribution influence upon the pressure pulsations in draft tube model of hydro-turbine // *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* 2016. V. 49. P. 82020; DOI: 10.1088/1755-1315/49/8/082020
13. OpenFOAM (Программный пакет CFD с открытым исходным кодом и широким набором функций для решения множества задач, от сложных потоков жидкости, включающих химические реакции, турбулентность и теплопередачу, до акустики, механики твёрдого тела и электромагнетизма). 2004; <http://www.openfoam.com>
14. *Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W.* A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // *Phys. Fluids. A. Fluid Dynamics.* 1991. V. 3, N 7. P. 1760–1765.
15. *Lilly D. K.* A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method // *Phys. Fluids. A. Fluid Dynamics.* 1992. V. 4, N 3. P. 633–635.
16. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment // *Mon. Weather. Rev.* 1963. V. 91, N 3. P. 99–164.
17. *Crank J., Nicolson P.* A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1947. V. 43, N 1. P. 50–67.

18. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comput. Phys.* 1979. V. 32, N 1. P. 101–36.
19. *Issa R.I.* Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // *J. Comput. Phys.* 1986. V. 62, N 1. P. 40–65.
20. *Numerical Prediction of Flow, Heat Transfer, Turbulence and Combustion.* Elsevier, 1983.
21. *Holzmann T.* Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM(R). Loeben: Holzmann CFD, 2019.
22. *Cervantes M., Trivedi C. H., Dahlhaug O.-G., Nielsen T.* Francis-99 workshop 1: steady operation of Francis turbines // *J. Phys. Conf. Ser.* 2015. V. 579. Article 011001; DOI: 10.1088/1742-6596/579/1/011001
23. *Minakov A.V., Platonov D.V., Litvinov I.V., Shtork S.I., Hanjalić K.* Vortex ropes in draft tube of a laboratory Kaplan hydroturbine at low load: an experimental and les scrutiny of rans and des computational models // *J. Hydraul. Res.* 2017. V. 55, N 5. P. 668–685.
24. *Hrebtov M.Yu., Palkin E.V., Mullyadzhyanov R.I.* Large-eddy simulation of a swirling flow in a model combustion chamber // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. V. 1677, N 1. Article 012012; DOI: 10.1088/1742-6596/1677/1/012012
25. *Farrell P.E., Maddison J.R.* Conservative interpolation between volume meshes by local Galerkin projection // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 2011. V. 200, N 1–4. P. 89–100.

UDC 533.17:532.517.4:53.082.56:532.574.7

## NUMERICAL SIMULATIONS OF A SWIRLING FLOW IN A FRANCIS DRAFT TUBE

© 2023 E. V. Palkin<sup>1a</sup>, M. Yu. Hrebtov<sup>1,2b</sup>, R. I. Mullyadzhyanov<sup>1,2c</sup>,  
I. V. Litvinov<sup>1,2d</sup>, S. V. Alexeenko<sup>1,2e</sup><sup>1</sup>*Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,  
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia,*<sup>2</sup>*Novosibirsk State University,  
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: <sup>a</sup>palkinev89@gmail.com, <sup>b</sup>weexov@yandex.by, <sup>c</sup>rustammul@gmail.com,  
<sup>d</sup>litv88@yandex.ru, <sup>e</sup>aleks@itp.nsc.ru

Received 18.08.2022, revised 18.08.2022, accepted 29.09.2022

**Abstract.** We study the flow in a model Francis-99 draft tube for partial load conditions using Large-eddy simulations. The swirl is produced by the runner rotating with a constant angular velocity. Within the validation step we compare results of eddy-resolving simulations with our Particle image velocimetry (PIV) and pressure measurements for three flow cases with different incoming flow rates. The time-averaged velocity fields agree well in experiments and simulations. To study the dynamical features we analyze spectral characteristics of the flow featuring a strong coherent component. This vortical structure corresponds to the precessing vortex core (PVC) changing the shape and amplitude with the increase in the bulk velocity.

**Keywords:** hydroturbine, draft tube, swirling flows, hydrodynamics instability, self-oscillation, precessing vortex core, turbulence, simulation, large-eddy simulation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.112

## REFERENCES

1. Gallaire F., Ruith M., Meiburg E., Chomaz J.-M., Huerre P. Spiral vortex breakdown as a global mode. *J. Fluid Mech.*, 2006, Vol. 549, pp. 71–80; DOI: 10.1017/S0022112005007834
2. Syred N. A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 2006, Vol. 32, pp. 93–161; DOI: 10.1016/j.pecs.2005.10.002
3. Dörfler P., Sick M., Coutu A. Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery: Engineer's Guidebook for Planning, Design and Troubleshooting. London: Springer-Verl., 2013.
4. Nishi M., Kubota T., Matsunaga S., Senoo Y. Study on swirl flow and surge in an elbow type draft tube. *Proc. IAHR 10th Symp.*, 1980, Vol. 1, pp. 557–568.
5. Pasche S., Avellan F., Gallaire F. Part load vortex rope as a global unstable mode. *J. Fluids Engrg.*, 2017, Vol. 139, No. 5; DOI: 10.1115/1.4035640
6. Goyal R., Gandhi B. K., Cervantes M. J. PIV measurements in francis turbine—a review and application to transient operations. *Renew. Sust. Energ. Rev.*, 2018, Vol. 81, pp. 2976–2991; DOI: 10.1115/1.4035640
7. Tiwari G., Kumar J., Prasad V., Patel V. K. Utility of CFD in the design and performance analysis of hydraulic turbines – A review. *Energy Rep.*, 2020, Vol. 6, pp. 2410–2429; DOI: 10.1016/j.egy.2020.09.004
8. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. Royal Soc. A.*, 1895, Vol. 186, pp. 123–64.

9. Ferziger J. H., Perić M., Street R.L. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verl., 2002.
10. Litvinov I., Shtork S., Gorelikov E., Mitryakov A., Hanjalić K. Unsteady regimes and pressure pulsations in draft tube of a model hydro turbine in a range of off-design conditions. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 2018, Vol. 91, pp. 410–422; DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2017.10.030
11. Litvinov I., Sharaborin D., Gorelikov E., Dulin V., Shtork S., Alekseenko S., Oberleithner K. Modal decomposition of precessing vortex core in a model hydro turbine. *Appl. Sci.*, 2022, Vol. 12, No. 10, article 5127; DOI: 10.3390/app12105127
12. Sonin V., Ustimenko A., Kuibin P., Litvinov I., Shtork S. Study of the velocity distribution influence upon the pressure pulsations in draft tube model of hydro-turbine. *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.*, 2016, Vol. 49, pp. 82020; DOI: 10.1088/1755-1315/49/8/082020
13. Software OpenFOAM; <http://www.openfoam.com>
14. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids. A. Fluid Dynamics*, 1991, Vol. 3, No. 7, pp. 1760–1765.
15. Lilly D. K. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids. A. Fluid Dynamics*, 1992, Vol. 4, No. 3, pp. 633–635.
16. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment. *Mon. Weather. Rev.*, 1963, Vol. 91, No. 3, pp. 99–164.
17. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1947, Vol. 43, No. 1, pp. 50–67.
18. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 1979, Vol. 32, No. 1, pp. 101–36.
19. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*, 1986, Vol. 62, No. 1, pp. 40–65.
20. Numerical Prediction of Flow, Heat Transfer, Turbulence and Combustion. Elsevier, 1983.
21. Holzmann T. Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM(R). Loeben: Holzmann CFD, 2019.
22. Cervantes M., Trivedi C. H., Dahlhaug O.-G., Nielsen T. Francis-99 workshop 1: steady operation of Francis turbines. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2015, Vol. 579, article 011001; DOI: 10.1088/1742-6596/579/1/011001
23. Minakov A.V., Platonov D.V., Litvinov I.V., Shtork S.I., Hanjalić K. Vortex ropes in draft tube of a laboratory Kaplan hydroturbine at low load: an experimental and les scrutiny of rans and des computational models. *J. Hydraul. Res.*, 2017, Vol. 55, No. 5, pp. 668–685.
24. Hrebtov M.Yu., Palkin E.V., Mullyadzhyanov R.I. Large-eddy simulation of a swirling flow in a model combustion chamber. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, Vol. 1677, No. 1, article 012012; DOI: 10.1088/1742-6596/1677/1/012012
25. Farrell P.E., Maddison J.R. Conservative interpolation between volume meshes by local Galerkin projection. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 2011, Vol. 200, No. 1–4, pp. 89–100.