СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2023. Т. 26, № 2. С. 155–170

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ЧЁТНОГО ПОРЯДКА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

© 2023 А. К. Уринов[1,2a], М. С. Азизов[2b]

[1] *Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, ул. Университетская, 46, г. Ташкент 100174, Узбекистан,*
[2] *Ферганский государственный университет, ул. Мураббийлар, 19, г. Фергана 150100, Узбекистан*

E-mails: [a]urinovak@mail.ru, [b]muzaffar.azizov.1988@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2021 г.; после доработки 15.07.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Для одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого чётного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике сформулирована начально-граничная задача и доказаны существование, единственность и устойчивость решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: вырождающееся дифференциальное уравнение, начально-граничная задача, спектральная задача, существование, единственность и устойчивость решения, метод разделения переменных.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.213

В связи с многочисленными приложениями в науке и технике теория дифференциальных уравнений в частных производных развивается быстрыми темпами. В частности, к уравнениям высокого чётного порядка приводятся многие задачи колебания стержня, пластин, балок и т. д. [1–4]. В настоящее время имеются многочисленные научные работы, в которых сформулированы и изучены начально-граничные задачи для таких уравнений. Например, в работе [5] в многомерных областях сформулированы и исследованы начально-граничные задачи для некоторых классов ультрагиперболических уравнений $2m$-го порядка по пространственным переменным и второго порядка по временной переменной; в работах [6–8] изучены начально-граничные задачи соответственно для уравнения смешанного типа и уравнения с меняющимся направлением времени $2m$-го порядка по пространственным переменным, а по временной переменной $2s$-го и $2s+1$-го порядков, где $m, s \in \mathbb{N}$. Начально-граничные задачи в многомерных областях исследованы также в работах [9, 10], именно в работе [9] для псевдопараболических, квазиэллиптических и «частично гиперболических» уравнений видов соответственно $D_t^{2m+1}(Au) + Bu = f(x,t)$, $D_t^{2m}(Au) - Bu = f(x,t)$, $D_t^{2m}(Au) + Bu = f(x,t)$ (здесь $D_t^l u = \dfrac{\partial^l u}{\partial t^l}$; A и B — линейные дифференциальные операторы второго и $2p$-го порядка по пространственным переменным, l, m, $p \in N$); в работе [10] — для некоторых классов уравнений составного типа 2-го порядка по пространственным переменным и $2p$-го порядков по временной (выделенной) переменной. В работе [11] в многомерной области с достаточно гладкой границей изучена начально-граничная задача для уравнения $\partial_t^\rho u(x,t) + A(x,D)u(x,t) = f(x,t)$, где ∂_t^ρ — дифференциальный оператор Римана — Лиувилля дробного порядка $\rho \in (0,1]$, $A(x,D)$ — произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор чётного порядка.

В перечисленных выше работах рассмотрены, в определенном смысле, общие уравнения с достаточно гладкими коэффициентами, а однозначная разрешимость задач, поставленных для них, доказана в более общих условиях для коэффициентов уравнений.

В последнее время возрос интерес к постановке и изучению новых начально-граничных задач на плоскости для уравнений высокого порядка с конкретными коэффициентами. В частности, в работах [12–16] в прямоугольной области исследованы начально-граничные задачи для уравнений

$$\frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t),$$
$$\frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t),$$
$$B^t_{\gamma-1/2}u + (-1)^p\frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} = f(x,t),$$

в работе [17] — для уравнения

$$B^t_{\gamma-1/2}\left[(-1)^s\frac{\partial^s}{\partial x^s}\left(\rho(x)\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right)\right] + (-1)^k\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} = f(x,t),$$

где p, k, $s \in N$, $s < k$, а $B^t_{\gamma-1/2} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{2\gamma}{t}\dfrac{\partial}{\partial t}$ — оператор Бесселя [18]. В работе [19] изучена задача Дирихле в прямоугольнике и параллелепипеде соответственно для уравнений

$$\frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial y^{2p}} = f(x,y),$$
$$\frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial y^{2p}} = f(x,y,t).$$

В работе [20] в прямоугольной области исследована спектральная задача для уравнения $(-1)^n D^{2n}_x u + (-1)^k D^{2k}_y u + g(x,y)u = \lambda u$; в [21] в квадрате рассмотрена краевая задача для уравнения $(-1)^q D^{2q+1}_x u + (-1)^p y^m D^{2p}_y u = 0$, где $m \in \mathbb{R}$, p, q, n, $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant k$, $n > 1$, $0 \leqslant m < 2p$, $D^j_z \equiv \dfrac{\partial^j}{\partial z^j}$.

Несмотря на изложенное выше, в настоящее время начально-граничные задачи на плоскости для вырождающихся уравнений остаются малоизученными. В данной работе сформулируем и исследуем одну начально-граничную задачу для уравнения высокого чётного порядка, вырождающегося на границе области.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение высокого чётного порядка вида

$$B^t_{\gamma-1/2}u + (-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha\ \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = f(x,t), \tag{1}$$

вырождающегося на боковой стороне $x = 0$ области Ω, где α, γ, k, T — заданные действительные числа, причем $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 \leqslant \gamma < 1/2$, $k \in N$, а $f(x,t)$ — заданная функция.

Исследуем существование, единственность и устойчивость решения следующей начально-граничной задачи для уравнения (1) в области Ω:

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $\dfrac{\partial^j u}{\partial x^j} \in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\Omega)$, $\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) \in C(\overline{\Omega})$, $j=\overline{0,k-1}$; $t^{2\gamma}u_t \in C(\overline{\Omega})$; $B^t_{\gamma-1/2}u$, $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) \in C(\Omega)\cap L_2(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$u(x,0)=\varphi_1(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1; \qquad \lim_{t\to+0} t^{2\gamma}u_t(x,t)=\varphi_2(x), \quad 0<x<1, \tag{2}$$

$$u(0,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(0,t)=\cdots=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}u(0,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(1,t)=\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}u(1,t)=\cdots=\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}u(1,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{4}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — заданные непрерывные функции.

Отметим, что поставленная задача для уравнения (1) при $\alpha=0$, $k\in\mathbb{N}$ изучена в работе [14], а при $\gamma=0$, $\alpha=0$, $k=2$ — в работе [22], причем в последнем случае, она описывает вынужденные колебания консольно закрепленной балки [1]. Также отметим, что начально-граничные задачи с другими граничными условиями для уравнения (1) при $\gamma=0$, $2<k\in\mathbb{N}$, α — нецелое число из интервала $(0,k)$ и $(k,2k-1)$, исследованы соответственно в [23, 24].

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Нетривиальное решение однородного уравнения

$$B^t_{\gamma-1/2}\,u+(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha\ \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)=0,$$

удовлетворяющего условиям (3) и (4), ищем в виде $u(x,t)=v(x)T(t)$. В результате относительно функции $v(x)$ получим следующую спектральную задачу:

$$Mv\equiv(-1)^k[x^\alpha v^{(k)}(x)]^{(k)}=\lambda v(x), \quad 0<x<1; \tag{5}$$

$$v(0)=v'(0)=\cdots=v^{(k-1)}(0)=0; \quad v^{(k)}(1)=v^{(k+1)}(1)=\cdots=v^{(2k-1)}(1)=0. \tag{6}$$

Выясним, при каких λ задача (5), (6) имеет нетривиальные решения. С этой целью сначала умножим уравнение (5) на функцию $v(x)$, а затем проинтегрируем полученное равенство по x на отрезке $[0,1]$:

$$(-1)^k\int\limits_0^1[x^\alpha v^{(k)}(x)]^{(k)}v(x)\,dx=\lambda\int\limits_0^1 v^2(x)\,dx. \tag{7}$$

Из равенства (7), применяя правило интегрирования по частям k раз к первому интегралу и учитывая условия (6), получим

$$\int\limits_0^1 x^\alpha\big[v^{(k)}(x)\big]^2\,dx=\lambda\int\limits_0^1 v^2(x)\,dx,$$

откуда при $v(x)\not\equiv 0$ вытекает, что $\lambda\geqslant 0$. Если $\lambda=0$, то из последнего равенства следует, что $v^{(k)}(x)=0$, $x\in(0,1)$. Отсюда в силу условия (6) получим $v(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$.

Следовательно, задача (5), (6) может иметь нетривиальные решения только при $\lambda>0$.

Для исследования спектральной задачи (5), (6) применим метод функций Грина. С этой целью построим функцию Грина $G(x,s)$ задачи. Она должна обладать следующими свойствами:

1°. Функция $G(x,s)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(k-1)$-го порядка включительно, а функция $x^\alpha \dfrac{\partial^k G(x,s)}{\partial x^k}$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(k-2)$-го порядка включительно для всех значений x и s из отрезка $[0,1]$.

2°. При любом фиксированном $s \in (0,1)$ функция $x^\alpha \dfrac{\partial^k G(x,s)}{\partial x^k}$ имеет непрерывные производные $(k-1)$-го и k-го порядков по x в каждом из интервалов $[0,s)$ и $(s,1]$, причём

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(x^\alpha \frac{\partial^k G(x,s)}{\partial x^k}\right)\bigg|_{x=s+0} - \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(x^\alpha \frac{\partial^k G(x,s)}{\partial x^k}\right)\bigg|_{x=s-0} = (-1)^k.$$

3°. Функция $G(x,s)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет условиям (6) и уравнению $MG(x,s)=0$, $x \in (0,s)\cup(s,1)$.

Функция $G(x,s)$, обладающая перечисленными выше свойствами существует, единственна и имеет вид

$$G(x,s)=\begin{cases}(-1)^k\dfrac{(-1)^{k-1}x^{2k-1-\alpha}}{(k-1)!(k-\alpha)_k 0!}+\dfrac{(-1)^{k-2}x^{2k-2-\alpha}s}{(k-2)!(k-\alpha-1)_k 1!}+\dots+\dfrac{x^{k-\alpha}s^{k-1}}{0!(1-\alpha)_k(k-1)!}, & x<s,\\[2mm] (-1)^k\dfrac{(-1)^{k-1}s^{2k-1-\alpha}}{(k-1)!(k-\alpha)_k 0!}+\dfrac{(-1)^{k-2}s^{2k-2-\alpha}x}{(k-2)!(k-\alpha-1)_k 1!}+\dots+\dfrac{s^{k-\alpha}x^{k-1}}{0!(1-\alpha)_k(k-1)!}, & x>s,\end{cases}$$

здесь $(a)_k=(a)(a+1)\dots(a+k-1)$ — символ Похгаммера [25].

Тогда методом, применённым в [26], легко убедиться, что задача (5), (6) эквивалентна следующему интегральному уравнению с симметричным ядром $G(x,s)$:

$$v(x)=\lambda\int_0^1 G(x,s)v(s)\,ds. \tag{8}$$

Так как ядро $G(x,s)$ непрерывно, симметрично и положительно (т. е. $\lambda>0$), то согласно теории интегральных уравнений [27] уравнение (8) и задача (5), (6) имеют счётное число собственных значений $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots<\lambda_n<\dots,\quad \lambda_n\to+\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x),\dots,v_n(x),\dots$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$ и любая функция, истокообразно представимая через ядро $G(x,s)$, разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по этим собственным функциям [27].

Лемма 1. *Если* $h(x)$, $x^\alpha h^{(k)}(x)\in C^{k-1}[0,1]$ *и* $(x^\alpha h^{(k)}(x))^{(k)}\in L_2(0,1)$, $h^{(j)}(0)=0$, $h^{(k+j)}(1)=0$, $j=\overline{0,k-1}$, *то функция* $h(x)$ *разлагается в ряд по собственным функциям задачи* (5), (6), *который сходится равномерно и абсолютно в интервале* $[0,1]$.

Доказательство. В силу свойства функций $G(x,s)$ и $h(x)$ справедливо равенство

$$h(x)=\int_0^1 G(x,s)(-1)^k(s^\alpha h^{(k)}(s))^{(k)}\,ds.$$

Следовательно, функция $h(x)$ истокообразно представима через ядро $G(x,s)$. Кроме того, нетрудно убедиться, что

$$\int_0^1 G^2(x,s)\,ds \leqslant A(x)\leqslant K=\text{const},\quad K>0.$$

Тогда, согласно теореме Гильберта — Шмидта [27], справедливо утверждение леммы 1. □

3. СХОДИМОСТЬ ОСНОВНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ РЯДОВ

Лемма 2. *В промежутке* $[0,1]$ *равномерно сходятся следующие ряды:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(v_n^{(\mu)}(x)\right)^2}{\lambda_n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\left(x^{\alpha}v_n^{(k)}(x)\right)^{(\mu)}\right]^2}{\lambda_n^2},\quad \mu=\overline{0,k-1}. \tag{9}$$

Доказательство. Так как ядро $G(x,s)$ интегрального уравнения (8) симметрично, положительно и непрерывно в $\{(x,s)\mid 0\leqslant x,\ s\leqslant 1\}$, то на основании теоремы Мерсера [27] это ядро представлено абсолютно и равномерно сходящимся билинейным рядом $G(x,s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[v_n(x)v_n(s)]/\lambda_n$. Отсюда, в частности, при $x=s$ следует, что

$$G(x,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2(x)/\lambda_n\leqslant K=\mathrm{const}<+\infty,$$

т. е.первый ряд в (9) равномерно сходится на отрезке $[0,1]$.

Из уравнения (8) при $\lambda=\lambda_n$, $v(x)=v_n(x)$, $\mu=\overline{0,k-1}$ имеем

$$v_n{}^{(\mu)}(x)=\lambda_n\int\limits_0^1\frac{\partial^{\mu}G(x,s)}{\partial x^{\mu}}v_n(s)\,ds=(-1)^k\int\limits_0^1\frac{\partial^{\mu}G(x,s)}{\partial x^{\mu}}\left(s^{\alpha}v_n^{(k)}(s)\right)^{(k)}ds. \tag{10}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функции $\dfrac{\partial^{\mu}G(x,s)}{\partial x^{\mu}}$, $\mu=\overline{0,k-1}$, имеют непрерывные производные по s до $(k-1)$-го порядка включительно и удовлетворяют граничным условиям (3) по аргументу s, причём $s^{\alpha/2}\dfrac{\partial^{\mu+k}G(x,s)}{\partial x^{\mu}\partial s^k}\in L_2(0,1)$ для любых $x\in[0,1]$. Учитывая это, применим правило интегрирования по частям k раз к последнему интегралу в (10). В результате, принимая во внимание свойства функций $G(x,s)$ и $v_n(s)$, получим

$$v_n{}^{(\mu)}(x)=\int\limits_0^1 s^{\alpha}\frac{\partial^{\mu+k}G(x,s)}{\partial x^{\mu}\partial s^k}v_n{}^{(k)}(s)\,ds$$

или

$$\frac{v^{(\mu)}(x)}{\sqrt{\lambda_n}}=\int\limits_0^1(s^{\alpha/2}\frac{\partial^{\mu+k}G(x,s)}{\partial x^{\mu}\partial s^k})(\frac{s^{\alpha/2}v_n{}^{(k)}(s)}{\sqrt{\lambda_n}})\,ds.$$

Следовательно, выражения $v^{(\mu)}(x)/\sqrt{\lambda_n}$ есть коэффициенты Фурье функции $s^{\alpha/2}\dfrac{\partial^{\mu+k}G(x,s)}{\partial x^{\mu}\partial s^k}$ в системе функций $\left\{\left(s^{\alpha/2}v_n{}^{(k)}(s)/\sqrt{\lambda_n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, ортонормированность которой доказывается ниже (см. равенство (12)). Поэтому, на основании неравенства Бесселя [27], имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[v_n{}^{(\mu)}(x)\right]^2}{\lambda_n}\leqslant\int\limits_0^1 s^{\alpha}\left(\frac{\partial^{\mu+k}G(x,s)}{\partial x^{\mu}\partial s^k}\right)^2ds,$$

т. е. второй ряд в (9) сходится равномерно.

Из (8), в силу свойств 1°, 2° функции Грина $G(x,s)$, имеем

$$\frac{\big[x^\alpha {v_n}^{(k)}(x)\big]^{(\mu)}}{\lambda_n}=\int\limits_0^1\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu}\bigg(x^\alpha\frac{\partial^k G(x,s)}{\partial x^k}\bigg)v_n(s)\,ds,\quad \mu=\overline{0,\,k-1}.$$

Следовательно, функции $[x^\alpha {v_n}^{(k)}(x)]^{(\mu)}$ являются коэффициентами Фурье функции $\dfrac{\partial^\mu}{\partial x^\mu}\bigg(x^\alpha\dfrac{\partial^k G(x,s)}{\partial x^k}\bigg)$ в системе ортонормированных функций $\{v_n(s)\}_{n=1}^\infty$. Так как $\dfrac{\partial^\mu}{\partial x^\mu}\bigg(x^\alpha\dfrac{\partial^k G(x,s)}{\partial x^k}\bigg)\in L_2(0,1)$ для любых $s\in[0,1]$, то отсюда на основании неравенства Бесселя [27] вытекает равномерная сходимость последнего ряда в (9). Лемма 2 доказана. □

4. ПОРЯДОК КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Лемма 3. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна вместе со своими производными до $(k-1)$-го порядка включительно, удовлетворяет граничным условиям $g(0)=g'(0)=\dots=g^{(k-1)}(0)=0$ и $g^{(k)}(x)\in L_{2,\alpha}(0,1)$; здесь $L_{2,\alpha}(0,1)$ — пространство функций с нормой*

$$\|g\|_\alpha^2=\int\limits_0^1 x^\alpha g^2(x)\,dx.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^\infty\lambda_n g_n^2\leqslant\int\limits_0^1 x^\alpha\big[g^{(k)}(x)\big]^2\,dx,$$

где g_n — коэффициенты Фурье функции $g(x)$ по системе собственных функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$.

Доказательство. Введём в рассмотрение функционал

$$I(F)=\int\limits_0^1 x^\alpha\big[F^{(k)}(x)\big]^2\,dx$$

и применим его к функции $F=g(x)-\sum\limits_{n=1}^{m-1}g_n v_n(x)$. Тогда

$$\begin{gathered}I(F)=I(g)\\
+\sum_{n=1}^{m-1}g_n^2 I(v_n)-2\sum_{\substack{n,l=1\\ n\neq l}}^{m-1}g_n g_l\int\limits_0^1 x^\alpha v_n^{(k)}(x)v_l^{(k)}(x)\,dx-2\sum_{n=1}^{m-1}g_n\int\limits_0^1 x^\alpha g^{(k)}(x)v_n^{(k)}(x)\,dx.\end{gathered}\tag{11}$$

Вычислим некоторые интегралы, участвующие в (11):

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 x^\alpha v_n^{(k)}(x)v_l^{(k)}(x)\,dx&=\int\limits_0^1\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)v_l^{(k)}(x)\,dx\\
&=\Big[\big(x^\alpha v_n^{(k)}\big)v_l^{(k-1)}-\big(x^\alpha v_n^{(k)}\big)'v_l^{(k-2)}+\dots+(-1)^{k-1}\big(x^\alpha v_n^{(k)}\big)^{(k-1)}v_l\Big]_{x=0}^{x=1}\\
&+(-1)^k\int\limits_0^1\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)}v_l(x)\,dx=\lambda_n\int\limits_0^1 v_n(x)v_l(x)\,dx=\begin{cases}0, & n\neq l,\\ \lambda_n, & n=l.\end{cases}\end{aligned}\tag{12}$$

Аналогично, находим

$$\int_0^1 x^\alpha g^{(k)}(x) v_n^{(k)}(x)\,dx = \lambda_n \int_0^1 g(x) v_n(x)\,dx = \lambda_n g_n. \tag{13}$$

Из (12) следует, что

$$I(v_n) = \int_0^1 x^\alpha \left[v_n^{(k)}(x)\right]^2 dx = \lambda_n. \tag{14}$$

Из (11) на основании (12)–(14) следует, что $I(F) = I(g) - \sum\limits_{n=1}^{m-1} \lambda_n g_n^2 \geqslant 0$. Отсюда следует утверждение леммы 3. □

Лемма 4. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна вместе со своими производными до $(k-1)$-го порядка включительно, а функция $x^\alpha g^{(k)}(x)$ непрерывна вместе со своими производными также до $(k-1)$-го порядка включительно, $\left[x^\alpha g^{(k)}(x)\right]^{(k)} \in L_2(0,1)$ и $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$, $g^{(k)}(1) = g^{(k+1)}(1) = \dots = g^{(2k-1)}(1) = 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 \leqslant \int_0^1 [(x^\alpha g^{(k)}(x))^{(k)}]^2\,dx.$$

Доказательство. Нетрудно показать, что $(-1)^k \lambda_n g_n$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье функции $\left[x^\alpha g^{(k)}(x)\right]^{(k)}$ по системе собственных функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Отсюда, согласно неравенству Бесселя [27], следует утверждение леммы 4. □

Из лемм 3 и 4 вытекает следующая

Лемма 5. *Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3, а функция $\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)^{(k)}$ условиям леммы 2. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 g_n^2 \leqslant \int_0^t x^\alpha [(x^\alpha g^{(k)}(x))^{(2k)}]^2\,dx.$$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Нетрудно видеть, что формальное применение метода Фурье приводит к следующему представлению решения задачи 1:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(x), \tag{15}$$

где λ_n и $v_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, — собственные значения и собственные функции задачи (5), (6);

$$u_n(t) = a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \int_0^t [J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t)$$

$$J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}\tau) - J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}\tau)] (t/\tau)^{1/2-\gamma} \tau f_n(\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\lambda_n}/2\right)^{\gamma-1/2} \Gamma(1/2-\gamma)\varphi_{2n}, \quad b_n = \left(\sqrt{\lambda_n}/2\right)^{1/2-\gamma} \Gamma(1/2+\gamma)\varphi_{1n}, \tag{17}$$

$J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода [28], $\Gamma(z)$ — гамма-функция [25], а φ_{1n}, φ_{2n}, $f_n(t)$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(x,t)$ в системе собственных функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma = 0$ *и функция* $\varphi_1(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 5, *функция* $\varphi_2(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 4, *а функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет условиям леммы* 4 *по аргументу* x *равномерно по* t. *Тогда ряд* (15) *определяет решение задачи* 1.

Доказательство. Так как $\gamma = 0$, то в силу $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)}\sin x$, $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)}\cos x$ функция (16) записывается в виде

$$u_n(t) = \varphi_{1n}\cos\sqrt{\lambda_n}t + \frac{\varphi_{2n}}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\,d\tau. \tag{18}$$

Учитывая это, докажем равномерную сходимость рядов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)v_n(x), \quad \frac{\partial^\mu u}{\partial x^\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)v_n^{(\mu)}(x), \quad \mu = \overline{0, k-1},$$
$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\left(x^\alpha\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(\nu)}, \quad \nu = \overline{0, k}.$$

Сначала покажем равномерную сходимость ряда $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)$. В силу (15) и (18) имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{1n}\cos\sqrt{\lambda_n}t\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{2n}}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)}}{\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\,d\tau.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, оценим каждую из сумм в правой части последнего равенства:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{1n}\cos\sqrt{\lambda_n}t\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)^{(k)}\big)\right|$$
$$\leqslant \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^3\varphi_{1n}^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}]^2}{\lambda_n^3}\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^3\varphi_{1n}^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\right\}^{1/2},$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{2n}}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)^{(k)}\big)\right|$$
$$\leqslant \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\varphi_{2n}^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}]^2}{\lambda_n^3}\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\varphi_{2n}^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\right\}^{1/2},$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big[x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big]^{(k)}}{\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\,d\tau\right|$$
$$\leqslant \left\{T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\int\limits_0^1 f_n^2(\tau)\,d\tau\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)}]^2}{\lambda_n^3}\right\}^{1/2} = \left\{T\int\limits_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 f_n^2(\tau)\,d\tau\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\right\}^{1/2}.$$

В силу условия теоремы 1, на основании лемм 2, 4 и 5 ряды в правой части последних неравенств сходятся равномерно на $[0,1]$. Следовательно, ряды, стоящие в левых частях, сходятся равномерно в $\overline{\Omega}$.

Аналогично доказывается равномерная сходимость и остальных рядов. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $\gamma \in (0,1/2)$ *и функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 5, *а функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет условиям леммы* 5 *по аргументу* x *равномерно по* t. *Тогда ряд* (15) *определяет решение задачи* 1.

При доказательстве этой теоремы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 6. *Для функций* $u_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, *определяемых равенствами* (16), *при всех* $\gamma \in (0,1/2)$ *справедливы неравенства*

$$|u_n(t)| \leqslant |\varphi_{1n}| + \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}|\varphi_{2n}| + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Доказательство. Переписывая функции (16) с помощью функции Бесселя — Клиффорда $\bar{J}_w(z) = \Gamma(w+1)(z/2)^{-w}J_w(z)$ и учитывая $|\bar{J}_w(x)| \leqslant 1$ при $w > -1/2$, а также $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, получим

$$|u_n(t)| \leqslant |a_n|\,\frac{T^{1-2\gamma}(\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} + |b_n|\,\frac{(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)} + \frac{2T}{1-2\gamma}\int\limits_0^t |f_n(\tau)|\,d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание равенства (17) и применяя неравенство Коши —Буняковского к интегралу, сразу придём к неравенству (19). Лемма 6 доказана. $\square$

Переходим к доказательству теоремы 2, т. е. к равномерной сходимости рядов (15) и рядов

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n^{(j)}(x), \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j}(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(j)}, \quad j = \overline{0,k-1},$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)},$$

$$t^{2\gamma}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} t^{2\gamma} u_n'(t) v_n(x), \quad B_{\gamma-1/2}^t u = \sum_{n=1}^{\infty} B_{\gamma-1/2}^t\, u_n(t) v_n(x).$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\big[x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big]^{(k)}. \tag{20}$$

Отсюда, согласно (19), следует, что для доказательства равномерной сходимости ряда, стоящего в правой части равенства (20), достаточно доказать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{jn}\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)}, \quad j = \overline{1,2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\int\limits_0^T f_n^2(\tau)\,d\tau}\,(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}.$$

К каждому этих рядов применим неравенство Коши — Буняковского:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{jn}(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sqrt{\lambda_n^3}\varphi_{jn}\frac{(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}}{\sqrt{\lambda_n^3}}\right|$$

$$\leqslant \left[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^3\varphi_{jn}^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big[\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)}\big]^2}{\lambda_n^3}\right]^{1/2} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^3\varphi_{jn}^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\right]^{1/2}, \quad j = \overline{1,2},$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\int\limits_0^T f_n^2(\tau)d\tau\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)}}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sqrt{\lambda_n^3\int\limits_0^T f_n^2(\tau)\,d\tau\frac{\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)}}{\sqrt{\lambda_n^3}}}\right|$$

$$\leqslant \left[\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^3 f_n^2(\tau)\,d\tau\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big[\big(x^\alpha v_n^{(k)}(x)\big)^{(k)}\big]^2}{\lambda_n^3}\right]^{1/2} = \left[\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^3 f_n^2(\tau)\,d\tau\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правых частях этих неравенств, в силу условия теоремы 2, согласно леммам 2 и 5, равномерно сходятся. Тогда ряды, стоящие в левых частях, сходятся равномерно в $\overline{\Omega}$. Аналогично доказывается равномерная сходимость в $\overline{\Omega}$ и остальных рядов.

Из доказанного выше следует, что ряды, соответствующие каждым членам уравнения (1) и условиям (2), (3), сходятся равномерно в $\overline{\Omega}$. Тогда сумма этих рядов удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3). Следовательно, сумма ряда (15) является решением задачи 1.

6. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Теорема 3. *Задача* 1 *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что задача 1 имеет два решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Введём обозначение $u_1(x,t)-u_2(x,t)=u(x,t)$. Тогда функция $u(x,t)$ является решением задачи 1 при $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)\equiv 0$, $f(x,t)\equiv 0$.

Возьмём произвольное число b из $(0,T]$ и введём функцию

$$w(x,t)=\begin{cases}0, & b\leqslant t\leqslant T,\\ \int\limits_b^t \xi^{-2\gamma}u(x,\xi)\,d\xi, & 0\leqslant t\leqslant b.\end{cases} \tag{21}$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

а) $\dfrac{\partial^j w}{\partial x^j}$, $\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k}\right)\in C(\overline{\Omega})$, $j=\overline{0,k-1}$, и удовлетворяет условиям (3), (4);

б) $t^{2\gamma}w_t$, $t^{2\gamma}(t^{2\gamma}w_t)'_t\in C(\overline{\Omega})$ и $w(x,t)=0$, $t\in[b,T]$.

Умножим уравнение (1), при $f(x,t)\equiv 0$, на функцию $t^{2\gamma}w(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Ω:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^T t^{2\gamma}w(x,t)\left[t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{2\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)\right]dtdx=0.$$

Принимая во внимание (21), перепишем это равенство в виде

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^b w\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{2\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt+(-1)^k\int\limits_0^b t^{2\gamma}\,dt\int\limits_0^1 w\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)dx=0.$$

Теперь, применяя правило интегрирования по частям, получим

$$\int_0^1 \left[w t^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}^{t=b} - \int_0^b \frac{\partial w}{\partial t} t^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t}\, dt \right] dx$$
$$+ (-1)^k \int_0^b t^{2\gamma} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) w - \frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right.$$
$$\left. + \dots + (-1)^{k-1} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \frac{\partial^{k-1} w}{\partial x^{k-1}} \Big|_{x=0}^{x=1} \right] dt + \int_0^b t^{2\gamma} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\, dx = 0,$$

откуда, в силу свойств функций $w(x,t)$ и $u(x,t)$, следует

$$-\int_0^1 dx \int_0^b t^{2\gamma} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \int_0^b t^{2\gamma} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\, dx = 0.$$

Отсюда, учитывая равенства $u = t^{2\gamma} \dfrac{\partial w}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k} = t^{2\gamma} \dfrac{\partial^{k+1} w}{\partial x^k \partial t}$, имеем

$$-\int_0^1 dx \int_0^b u \frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \int_0^1 x^\alpha\, dx \int_0^b t^{4\gamma} \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^{k+1} w}{\partial x^k \partial t}\, dt = 0.$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$u \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u^2, \quad \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^{k+1} w}{\partial x^k \partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^k w}{\partial x^k} \right]^2, \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} w(x,b) = 0,$$

получим

$$\int_0^1 u^2(x,b)\, dx = -(\varepsilon + 1) \int_0^1 x^\alpha dx \int_0^b t^\varepsilon \left(\frac{\partial^k w}{\partial x^k} \right)^2 dt,$$

где $\varepsilon = 0$ при $\gamma = 0$ и $\varepsilon = 4\gamma - 1$ при $\gamma > 0$.

Из последнего равенства, в силу $\gamma \in [0, 1/2)$, следует, что $\int_0^1 u^2(x,b)\, dx \equiv 0$.

Следовательно, $u(x,b) \equiv 0$ при $x \in [0,1]$. Так как b — произвольное число из $(0,T]$ и $u(x,0) = 0$, то $u(x,t) \equiv 0$, т. е. $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в $\overline{\Omega}$. Теорема 3 доказана. □

Теорема 4. *Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1 *или* 2. *Тогда для решения задачи* 1 *справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant K_0 \big[\|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \big], \tag{22}$$

где K_0 — некоторое действительное положительное число.

Доказательство. Так как $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормальная система, то из (15), согласно (16)–(19), следует неравенство

$$\begin{aligned}
&\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)}\\
&=\int\limits_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)v_n(x)\right]^2dx=\int\limits_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2(t)v_n^2(x)+2\sum_{\substack{n,k=1\\ n\neq k}}^{\infty}u_n(t)u_k(t)v_n(x)v_k(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2(t)\\
&\qquad\leqslant\widetilde{K}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|\varphi_{1n}|+|\varphi_{2n}|+\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}\right]^2\leqslant\widetilde{K}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|\varphi_{1n}|^2+|\varphi_{2n}|^2+\|f_n(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+2|\varphi_{1n}||\varphi_{2n}|+2|\varphi_{1n}|\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}+2|\varphi_{2n}|\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}\right].
\end{aligned}$$

Заменяя последние три слагаемых по неравенству, $a^2+b^2\geqslant 2ab$, а затем применяя неравенство Бесселя и обозначая $3\widetilde{K}$ через K_0, получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)}\leqslant K_0\left(\|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right).\tag{23}$$

Оценим последнее слагаемое правой части (23). Принимая во внимание $f(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(t)v_n(x)$ и ортонормированность системы функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, находим

$$\begin{aligned}
\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}&=(f(x,t),f(x,t))_{L_2(\Omega)}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)v_n(x),\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)v_n(x)\right)_{L_2(\Omega)}\\
&=\int\limits_0^T\int\limits_0^1\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)v_n(x)\sum_{m=1}^{\infty}f_m(t)v_m(x)\,dxdt=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^T f_n^2(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n(t)\|^2_{L_2(0,T)}.
\end{aligned}$$

В силу этого равенства из (23) сразу следует неравенство (22). Теорема 4 доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. *Коренев Б.Г.* Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1954.
3. *Маховер Е.В.* Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем // Уч. зап. ЛГП им. Герцена. 1957. Т. 17, № 2. С. 28–39.
4. *Маховер Е.В.* О спектре собственных частот пластинки с острым краем // Уч. зап. ЛГП им. Герцена. 1958. Т. 197. С. 113–118.
5. *Бубнов Б.А., Врагов В.Н.* К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 4. С. 795–800.
6. *Егоров И. Е.* Разрешимость одной краевой задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1560–1567.
7. *Егоров И.Е. Федоров И.Е.* О первой краевой задаче для одного уравнения смешанного типа высокого порядка // Методы прикл. математики и мат. физики. Якутск: ЯФ СО АН СССР, 1987. С. 8–14.
8. *Егоров И.Е.* Краевая задача для одного уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 6. С. 1301–1304.
9. *Кожанов А.И.* О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешённых относительно старшей производной // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 359–376.

10. *Кожанов А.И., Пинигина Н.Р.* Краевые задачи для некоторых классов уравнений составного типа высокого порядка // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 842–853.
11. *Ashurov R.R., Muhiddinova A.T.* Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, N 3. P. 517–525.
12. *Amanov D.* About correctness of boundary value problems for an equation of even order // Uzbek Math. J. 2011. № 4. P. 20–35.
13. *Amanov D., Ashuraliyev A.* Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order // First Internat. Conf. Anal. Appl. Math. 2012. P. 3–7.
14. *Уринов А. К., Азизов М. С.* Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 2. С. 273-–292.
15. *Уринов А. К., Азизов М. С.* О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // Вестню Удмурю ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 2. С. 240–255.
16. *Азизов М.С.* Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Бюлл. Ин-та математики АН Республики Уз. 2022. Т. 5, № 1. С. 14–24.
17. *Азизов М. С.* Об одной нелокальной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Бюлл. Ин-та математики АН Республики Уз. 2022. Т. 5, № 5. С. 112–133.
18. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
19. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 262–276.
20. *Иргашев Б.Ю.* О спектральной задаче для одного уравнения высокого чётного порядка // Изв. вузов. Математика. 2016. №. 7, С. 44–54.
21. *Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю.* Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечётного порядка // Украин. мат. журн. 2014. Т. 66, №. 10, С. 1348–1331.
22. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66.
23. *Байкузиев К.Б., Каланов Б.С.* О разрешимости смешанной задачи для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. 1972. Т. 2. С. 40–54.
24. *Байкузиев К.Б., Каланов Б.С.* О разрешимости смешанной задачи для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. 1973. Т. 3. 1973. С. 65–73.
25. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1965.
26. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
27. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959.
28. *Ватсон Дж.Н.* Теории бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.956

ABOUT AN INITIAL BOUNDARY PROBLEM FOR A DEGENERATE HIGHER EVEN ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

© 2023 **A. K. Urinov**[1,2a], **M. S. Azizov**[2b]

[1] *Romanovsky Institute of Mathematics AS Respubliki Uzbekistan, ul. Universitetskaya 46, Tashkent 100174, Uzbekistan,*
[2] *Ferghana State University, ul. Murabbiylar 19, Ferghana 150100, Uzbekistan*

E-mails: [a]urinovak@mail.ru, [b]muzaffar.azizov.1988@mail.ru

Received 18.12.2021, revised 15.07.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. For one degenerate differential equation in partial derivatives of high even order with operator The initial boundary value problem is formulated in the rectangle and the existence, uniqueness and stability of the solution of the problem under study are proved.

Keywords: degenerate partial differential equation initial-boundary value problem, spectral problem, the existence, uniqueness and stability of the solution, the method of separation of variables.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.213

REFERENCES

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
2. Korenev B. G. Voprosy rascheta balok i plit na uprugom osnovanii [Issues of calculation of beams and slabs on an elastic foundation]. Moscow: Stroiizdat, 1954 (in Russian).
3. Makhover E. V. Izgib plastinki peremennoi tolshchiny s ostrym kraem [Bending of a plate of variable thickness with a sharp edge]. *Uch. Zap. LGP im. Gertsena*, 1957, Vol. 17, No. 2, pp. 28–39 (in Russian).
4. Makhover E. V. O spektre sobstvennykh chastot plastinki s ostrym kraem [On the natural frequency spectrum of a plate with a sharp edge]. *Uch. Zap. LGP im. Gertsena*, 1958, Vol. 197, pp. 113–118 (in Russian).
5. Bubnov B. A., Vragov V. N. K teorii korrektnykh kraevykh zadach dlya nekotorykh klassov ul'tragiperbolicheskikh uravnenii [On the theory of well-posed boundary value problems for some classes of ultrahyperbolic equations]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1982, Vol. 264, No 4, pp. 795–800 (in Russian).
6. Egorov I. E. Razreshimost' odnoi kraevoi zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa vysokogo poryadka [Solvability of a boundary value problem for a high-order equation of mixed type]. *Differ. Uravn.*, 1987, Vol. 23, No. 9. pp. 1560–1567 (in Russian).
7. Egorov I. E. Fedorov I.E. O pervoi kraevoi zadache dlya odnogo uravneniya smeshannogo tipa vysokogo poryadka [On the first boundary value problem for a high-order mixed-type equation]. *Metody prikladnoi matematiki i mat. fiziki*, 1987, pp. 8–14 (in Russian)
8. Egorov I. E. Kraevaya zadacha dlya odnogo uravneniya vysokogo poryadka s menyayushchimsya napravleniem vremeni [A boundary value problem for a higher-order equation with changing time direction]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1988, Vol. 303, No. 6, pp. 1301–1304 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 2.

9. Kozhanov A. I. O kraevykh zadachakh dlya nekotorykh klassov uravnenii vysokogo poryadka, nerazreshennykh otnositel'no starshei proizvodnoi [Boundary value problems for some classes of higher-order equations that are unsolved with respect to the highest derivative]. *Sib. Mat. Zhurn.*, 1994, Vol. 35, No. 2, pp. 359–376 (in Russian).
10. Kozhanov A. I., Pinigina N. R. Kraevye zadachi dlya nekotorykh klassov uravnenii sostavnogo tipa vysokogo poryadkam [Boundary value problems for certain classes of high order composite type equations]. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2015, Vol. 12, pp. 842–853 (in Russian).
11. Ashurov R. R., Muhiddinova A. T. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator. *Lobachevskii J. Math*, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 517–525.
12. Amanov D. About correctness of boundary value problems for an equation of even order. *Uzbek Math. J.*, 2011, No. 4, pp. 20–35.
13. Amanov D. and Ashuraliyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order. *First Internat. Conf. Anal. Appl. Math.*, 2012, pp. 3–7.
14. Urinov A. K., Azizov M. S. Nachal'no-granichnaya zadacha dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh vysshego chetnogo poryadka s operatorom Besselya [Initial boundary value problem for partial differential equations of higher even order with Bessel operator]. *Vestn. Samara Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2022, Vol. 26, No. 2, pp. 273–292 (in Russian).
15. Urinov A. K., Azizov M. S. O razreshimosti nelokal'nykh nachal'no-granichnykh zadach dlya odnogo differentsial'nogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh vysokogo chetnogo poryadka [On the solvability of non-local initial boundary value problems for a single partial differential equation of high even order]. *Vestn. Udmurd. Univ. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, Vol. 32, No. 2, pp. 240–255 (in Russian).
16. Azizov M.S. Ob odnoi nachal'no-granichnoi zadache dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh vysshego chetnogo poryadka s operatorom Besselya [On an initial boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with Bessel operator]. *Bull. In-ta mat. AN Respubliki Uzbekistan*, 2022, Vol. 5, No. 1, pp. 14–24 (in Russian).
17. Azizov M.S. Ob odnoi nelokal'noi nachal'no-granichnoi zadache dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh vysokogo chetnogo poryadka v pryamougol'nike [On a non-local initial boundary value problem for a partial differential equation of high even order in a rectangle]. *Bull. In-ta mat. AN Respubliki Uzbekistan*, 2022, Vol. 5, No. 5, pp. 112–133 (in Russian).
18. Kipriyanov I. A. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi [Singular elliptic boundary value problems]. Moscow: Nauka, 1997 (in Russian).
19. Sabitov K. B. Zadacha Dirikhle dlya uravnenii s chastnymi proizvodnymi vysokikh poryadkov [The Dirichlet Problem for Higher-Order Partial Differential Equations]. *Mat. Zametki*, 2015, Vol. 97, No. 2, pp. 262–276 (in Russian).
20. Irgashev B. YU. O spektral'noi zadache dlya odnogo uravneniya vysokogo chetnogo poryadka [On spectral problem for one equation of high even order]. *Izv. VUZov. Mat.*, 2016, No. 7, pp. 44–54 (in Russian).
21. Apakov Yu.P., Irgashev B. YU. Kraevaya zadacha dlya vyrozhdayushchegosya uravneniya vysokogo nechetnogo poryadka [Boundary value problem for a degenerate equation of high odd order]. *Ukrain. Mat. Zhurn.*, 2014, Vol. 66, No. 10, pp. 1348–1331. (in Russian).
22. Sabitov K.B., Fadeeva O.V. Nachal'no-granichnaya zadacha dlya uravneniya vynuzhdennykh kolebanii konsol'noi balki [Initial boundary value problem for the equation of forced oscillations of a cantilever beam]. *Vestn. Samara Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2021, Vol. 25, No. 1, pp. 51–66 (in Russian).
23. Baikuziev K. B., Kalanov B. S. O razreshimosti smeshannoi zadachi dlya uravneniya vysshego poryadka, vyrozhdayushchegosya na granitse oblasti [On the solvability of a mixed problem for a higher-order equation that degenerates on the boundary of a domain]. *Boundary Value Problems Diff. Equ.*, 1972, No. 2, pp. 40–54 (in Russian).
24. Baikuziev K. B., Kalanov B. S. O razreshimosti smeshannoi zadachi dlya uravneniya vysshego poryadka, vyrozhdayushchegosya na granitse oblasti [On the solvability of a mixed problem for a higher-order

equation that degenerates on the boundary of a domain] *Boundary Value Problems Diff. Equ.*, 1973, No. 3, pp. 65–73 (in Russian).

25. Beitmen G., Ehrdeii A. Vysshie transtsendentnye funktsii [Higher transcendental functions]. Vol. I. Moscow: Nauka, 1965 (in Russian).
26. Naimark M. A. Lineinye differentsial'nye operatory [Linear differential operators]. Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).
27. Mikhlin S. G. Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam [Lectures on linear integral equations]. Moscow: Fizmatlit, 1959 (in Russian).
28. Vatson Dzh. N. Teorii besselevykh funktsii [Theories of Bessel functions]. Moscow: Izdatel'stvo Inostrannoi Literatury, 1949 (in Russian).