

УДК 519.63

**ЭФФЕКТИВНЫЙ МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ**© 2023 А. И. Федюшкин<sup>1а</sup>, К. А. Иванов<sup>2б</sup>, А. А. Пунтус<sup>3с</sup><sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН,  
просп. Вернадского, 101, корпус 1, г. Москва 119526, Россия,*<sup>2</sup>*АО «НПП «Пульсар»,  
Окружной проезд, 27, г. Москва 105187, Россия,*<sup>3</sup>*Московский авиационный институт,  
Волоколамское шоссе, 4, г. Москва 125993, Россия*E-mails: <sup>a</sup>fai@ipmnet.ru, <sup>b</sup>kirill7785@mail.ru, <sup>c</sup>artpuntos@yandex.ruПоступила в редакцию 29.08.2022 г.; после доработки 29.08.2022 г.;  
принята к публикации 29.09.2022 г.

Описана реализация алгоритма решения задачи о вибрационной конвекции в прямоугольной области, заполненной неравномерно нагретой несжимаемой жидкостью. Математическая модель основана на решении уравнений Симоненко — Зеньковской, полученных осреднением уравнений Навье — Стокса в предположении, что объём жидкости совершает высокочастотные поступательные вибрации. Для решения уравнений Пуассона реализован алгебраический многосеточный метод в сочетании с высокоэффективным методом динамического программирования (на основе принципа оптимального управления Беллмана) и дискретным преобразованием Фурье. Разработано математическое программное обеспечение, написанное на языке C/C++. Приводятся примеры решения модельных задач с различными направлениями потока нагрева квадратной области относительно вектора вибраций.

**Ключевые слова:** многосеточный метод, высокочастотная вибрационная конвекция, уравнения Симоненко — Зеньковской, вихрь-функция тока, принцип оптимальности Беллмана, дискретное преобразование Фурье.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.214

**ВВЕДЕНИЕ**

Исследования вибрационного влияния на гидродинамику и теплообмен в жидкости имеет фундаментальное и многочисленные прикладные значения. Например, среди таких приложений можно выделить влияние вибраций на пограничные слои и процессы выращивания совершенных кристаллов, снижение сопротивления тела, движущегося в газе или жидкости. Это важно для процессов охлаждения и теплоотвода в мощных электронных приборах и суперкомпьютерах, тепловых и ядерных энергетических установках; для задач фильтрации с целью увеличения нефтеотдачи; для технологических процессов с теплопереносом, например при получении новых материалов и лекарств; а также в медицине (в кардиологии — проблема кальциноза аорты и клапанов сердца, гемодинамике, урологии и др.), для решения задач интенсификации перемешивания в химических реакторах. Изучение воздействия вибраций на жидкие среды проводится уже около 200 лет, начиная с работ М. Фарадея (1831 г.) и Л. Рэлея (1883 г.) [1, 2]. Актуальность исследований вибрационных течений подтверждается огромным количеством научных работ (например, [3–18]), в которых имеются обзоры по влиянию вибраций на конвективное течение. Авторами работ [3, 4] впервые было указано на

возникновение осреднённого вибрационного конвективного течения при периодическом воздействии на жидкость. Вибрационное воздействие на жидкий объём может осуществляться двумя способами: 1) вибрации всего жидкого объёма как целого (например, так называемый *g-jitter* [3–8], при изменении гравитационного поля, в котором находится жидкий объём), 2) вибрации приложены к части границы этого жидкого объёма или к погружённому в расплав вибратору [9–20]. Первый способ вибрационного воздействия можно рассматривать как частный случай второго, но при одновременной вибрации всех границ жидкого объёма. Вибрационные воздействия на расплав могут иметь позитивное и негативное влияние. К позитивному можно отнести эффективное улучшение перемешивания расплава, отвод тепла от кристалла и свойства кристалла; к негативным — эффект, ухудшающий процесс роста и свойства кристалла. В технологических процессах получения материалов, например в процессах выращивания монокристаллов, вибрации могут оказывать влияние на гидродинамику расплава, распределение температуры (примеси), скорость кристаллизации, теплоотвод от кристалла и, как следствие, на качество кристаллов [9–18]. Для эффективности вибрационного воздействия на расплав необходимо определять диапазоны амплитудно-частотных параметров, зависящих от свойств расплава, метода роста кристалла и конфигурации вибрационного воздействия. Это можно делать с помощью математического моделирования, используя эффективные модели и численные методы. В отличие от моделирования стационарных задач [19] численное исследование нестационарных задач осложнено временными затратами получения решений. Возникает потребность использовать эффективные методы, сокращающие время вычислений, не уменьшая точности. Эффективные численные методы способны либо увеличить неявность метода, позволяющую увеличить шаг по времени [20], и/или использовать алгоритмы [21–24], сокращающие затраты на один шаг по времени. Данная работа посвящена методическому изучению численного решения модели виброконвекции на основе осреднённых уравнений Симоненко — Зеньковской [5], записанной в терминах вихрь-функции тока с применением эффективного многосеточного метода Федоренко [21], и прямых методов решения двух уравнений Пуассона с оптимизацией по Беллману [25] или дискретного преобразования Фурье.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система координат и геометрия расчётной прямоугольной области, заполненная жидкостью и совершающая вертикальные вибрации вдоль оси  $Oy$ , показаны на рис. 1.

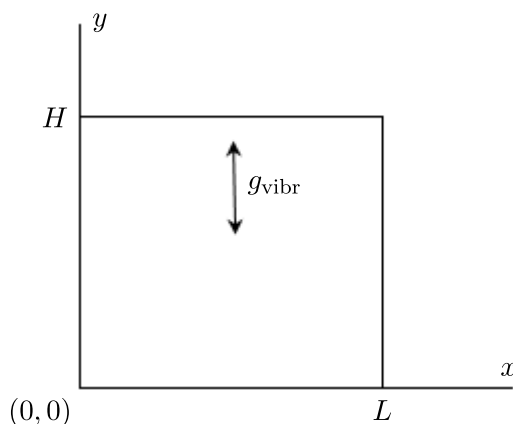


Рис. 1. Геометрия расчётной области и система координат

В данной работе представлены результаты для квадратного контейнера  $L = H$  (рис. 1), заполненного неравномерно нагретой жидкостью, совершающего высокочастотные вибрационные колебания вдоль оси  $Oy$  с малой амплитудой  $A$  по следующему закону:  $y = -A \sin \Omega t$ ,

$g_{\text{vibr}} \equiv \ddot{y} = A\Omega^2 \sin \Omega t$ , где  $\Omega = 2\pi f$  — круговая частота (об/сек),  $f$  — частота колебаний (Гц) (порядка 50 Гц),  $A$  — амплитуда вибраций (м) (порядка 100 мкм),  $g_{\text{vibr}}$  — вибрационное ускорение.

В случае совершения объёмом жидкости высокочастотных вибраций задача может описываться системой уравнений Симоненко — Зеньковской, полученной усреднением системы уравнений Навье — Стокса по «быстрому» времени [5]. В двумерном случае в переменных вихрь-функция тока данная система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \omega = \Delta \omega + Gr \frac{\partial \theta}{\partial x} + \varepsilon J(G, K), \quad (1)$$

$$\nabla \psi = -\omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta, \quad (3)$$

$$\Delta G = F, \quad (4)$$

$$\psi_{x=0} = \psi_{x=L} = \psi_{y=0} = \psi_{y=H} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \omega_{x=0} &= \frac{2(\psi_{1j} - \psi_{0j})}{\Delta h_x^2}, & \omega_{x=L} &= \frac{2(\psi_{(L-1)j} - \psi_{Lj})}{\Delta h_x^2}, \\ \omega_{y=0} &= \frac{2(\psi_{i1} - \psi_{i0})}{\Delta h_y^2}, & \omega_{y=H} &= \frac{2(\psi_{i(H-1)} - \psi_{iH})}{\Delta h_y^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\theta(x=0) = 1, \quad \theta(x=L) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(y=0, y=H) = 0, \quad (7)$$

$$G_{x=0} = G_{x=L} = G_{y=0} = G_{y=H} = 0; \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} J(G, K) &= -\left(1 + \frac{\partial G}{\partial y}\right)(G_{xy^2}) + G_{xx}(G_{xy} + K) + \frac{\partial G}{\partial x}\left(G_{x^2y} + \frac{\partial K}{\partial x}\right), \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad F = -\beta_T \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad K = -\beta_T \frac{\partial \theta}{\partial y}, \end{aligned}$$

вектор ускорения силы тяжести  $\mathbf{g}$  направлен навстречу оси  $Oy$ ; безразмерные функции: завихренность (вихрь)  $\omega$ , функция тока  $\psi$ , температура  $\theta = (T - T_1)/(T_2 - T_1)$ , вторая функция тока (вибрационная)  $G$ ;  $\vec{V}$  — вектор скорости с компонентами  $u$  и  $v$ ,  $t$  — время. Безразмерными определяющими параметрами являются: число Прандля  $\text{Pr} = \nu/a = \mu \text{Cp}/\lambda$ , число Грасгофа  $\text{Gr} = g\beta_T(T_2 - T_1)H^3/\nu^2$  (число Рэлея  $\text{Ra} = \text{GrPr}$ ), вибрационный параметр  $\varepsilon = A(\Omega)^2/2$  (единственный в случае высоких частот), вибрационное число Рэлея  $\text{Ra}_{\text{vibr}} = \text{Pr} g_{\text{vibr}}\beta_T(T_2 - T_1)H^3/\nu^2$ , где  $T$  — размерная температура,  $(T_2 - T_1)$  — масштаб температуры,  $g$  — модуль вектора ускорения силы тяжести  $\mathbf{g}$ ,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\beta_T$  — коэффициент объёмного температурного расширения,  $\mu$  — динамическая вязкость,  $\lambda$  — теплопроводность,  $\text{Cp}$  — удельная теплоёмкость при постоянном давлении,  $a$  — температуропроводность,  $g_{\text{vibr}} = A\Omega^2$ . Рассматриваются граничные условия прилипания и непроницаемости (5), (6), где условие для вихря аппроксимируется по формуле Тома.

## 2. ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА РАСЧЁТА

Особенностью предложенного метода решения системы уравнений виброконвекции является то, что уравнения Симоненко — Зеньковской [5] были переписаны в терминах: вихрь-две функции тока, температура (1)–(4), и поскольку основное время при численном решении системы уравнений (1)–(4) затрачивается на решение уравнений Пуассона (2), (4), то для решения эллиптических уравнений для функций тока были использованы экономичные алгоритмы:

- 1) геометрический многосеточный метод Федоренко [21],
- 2) матричный метод на основе динамического программирования Беллмана [25],
- 3) метод решения уравнения Пуассона в прямоугольнике на основе дискретного преобразования Фурье (DFT) [29].

Метод расчёта с указанными экономичными алгоритмами 1)–3) реализован в программе AliceFlow2D, написанной на языке C/C++, с реализацией алгоритма Fedorenko v.0.32 [21]. В программе AliceFlow2D также реализован алгоритм решения уравнений Симоненко — Зеньковской, записанных в естественных переменных скорость-давление [5], который требует больше времени в сравнении с изложенным эффективным алгоритмом решения уравнений Симоненко — Зеньковской, записанных в виде (1)–(4). Программа AliceFlow2D сертифицирована в государственном Реестре России программ для ЭВМ [30] и находится в свободном доступе с разрешения авторов.

Для определения эффективности данных методов были проведены методические расчёты уравнения Лапласа  $\Delta T = 0$  (с условиями Дирихле  $T_{x=0} = 400$ ,  $T_{x=L} = 300$ ,  $T_{y=0} = 300$ ,  $T_{y=H} = 300$ ) на сетке  $N_x = N_y = 50$  семью различными методами решения:

- 1) стандартным методом поточечной нижней релаксации с параметром  $\alpha=0.8$ ;
- 2) методом Зейделя, в котором для каждого узла две точки берутся с текущего слоя и две точки с предыдущего;
- 3) методом Зейделя, использующим алгоритм прогонки сначала вдоль горизонтальных, а потом вдоль вертикальных линий сетки;
- 4) методом последовательной верхней релаксации с параметром  $\alpha = 1.855$ ;
- 5) геометрическим многосеточным методом, где каждый пятый узел вдоль каждого координатного направления образует грубую сетку. Используется геометрический двухсеточный метод, сглаживание в котором осуществляется полинейным методом Зейделя, использующим алгоритм прогонки вдоль горизонтальных и вертикальных линий сетки, а также сплайновую интерполяцию с грубой сетки на подробную;
- 6) геометрическим многосеточным методом, где каждый пятый узел вдоль каждого координатного направления образует грубую сетку. Используется геометрический двухсеточный метод, сглаживание в котором осуществляется поточечным методом Зейделя;
- 7) геометрическим многосеточным методом, где каждый пятый узел вдоль каждого координатного направления образует грубую сетку. Используется геометрический двухсеточный метод, сглаживание в котором осуществляется поточечным методом верхней релаксации. Оптимальный параметр верхней релаксации свой на каждой сетке.

На рис. 2 показаны результаты методических расчётов уравнения Лапласа, которые показали, что наилучшей скоростью сходимости среди рассмотренных алгоритмов обладает многосеточный алгоритм Федоренко [21] с продольно поперечной прогонкой, сплайновой интерполяцией и проекцией на основе средних значений. Геометрический многосеточный вариант метода Федоренко [21] со сплайновой интерполяцией с грубой сетки на подробную является быстродействующим, поскольку позволяет использовать эффективный оператор проекции, в котором осреднённые значения для сборки матрицы с однородными граничными условиями берутся на сетке меньшей размерности, а также позволяет часть операций по вычислению среднего проводить один раз и выносить их из общего вычислительного цикла.

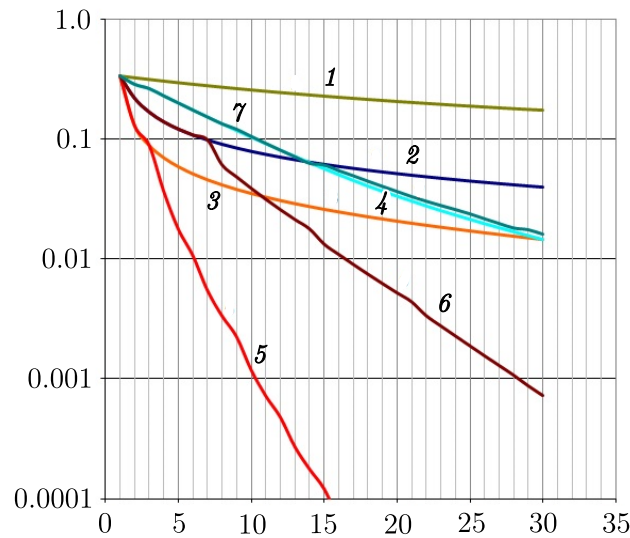


Рис. 2. Скорости сходимости различных реализованных итерационных методов решения уравнения Лапласа: стандартный (1), Зейделя (2), полилинейный LR (3), SOR (4), Федоренко на базе LR (5), Федоренко на базе Зейделя (6), Федоренко на базе SOR с оптимальным набором параметров (7)

Реализацию метода динамического программирования Беллмана [25] кратко поясним на примере решения уравнения Пуассона, записанного в общем виде (5):

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \varsigma = 0, \quad (9)$$

$$D(\phi) = \int_S (\phi_x^2 + \phi_y^2 - 2\varsigma\phi) dx dy, \quad (10)$$

где  $S$  — расчётная область.

Уравнение (9) — обобщённый вид уравнения Пуассона, где в случае  $\phi \equiv \psi$  и  $\varsigma \equiv \omega$  справедливо уравнение (2), а в случае  $\phi \equiv G$  и  $\varsigma \equiv -F$  — уравнение (4).

Задача решения уравнения Пуассона (9) эквивалентна задаче минимизации функционала энергии  $D(\phi)$  (10), которая решается методом динамического программирования Беллмана [25]. Минимизация функционала  $D(\phi)$  на всей области  $S$  приводит к тому, что он минимален также и на каждом вертикальном вектор-столбце, и вообще в каждом конечном элементе. Принцип минимума функционала  $D(\phi)$  позволяет записать рекуррентное соотношение для вектор-столбцов в прямоугольной расчётной области от правой границы до левой границы расчётной области (13), (14). Нахождение функции  $\phi$  состоит из прямого хода:

$$C_i = I - [I + Q + C_{i+1}]^{-1}, \quad C_{N_x} = I, \quad b_i = [I - C_i](b_{i+1} + r_i + \varsigma_i h_x h_y \beta), \\ b_{N_x} = \phi_{N_x}, \quad i = N_x - 1, \dots, 1,$$

и обратного хода:

$$\phi_i = [I - C_i]\phi_{i-1} + b_i, \quad i = 1, \dots, N_x - 1,$$

где матрица  $Q = (q_{ij})$  для равномерной сетки с шагами  $h_x$  и  $h_y$  и  $\beta = h_x/h_y$  имеет вид

$$q_{ij} = \begin{cases} 2\beta^2, & i = j \\ -\beta^2, & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Краевые условия Дирихле на нижней и верхней границах учитываются в векторах  $r_i$ :

$$r_i = [r_{ij}], \quad \text{где } r_{ij} = \begin{cases} \phi_{i0}, & i = j \\ \phi_{iM}, & i = N_x - 1, \quad j = 1, \dots, N_y - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Последовательность матриц  $C_i, i = 1, \dots, N_x$ , вычисляется один раз и запоминается при первом обращении. На всех остальных итерациях происходит лишь чтение матриц  $A_i$  в оперативной памяти. На сетке  $50 \times 50$  работающая программа потребляет не более 3 Мб оперативной памяти, а на сетке  $200 \times 200$  требуется 87 Мб. Векторы  $b_i$  вычисляются каждый раз заново так как зависят от изменяющейся правой части  $\varsigma$  уравнения (5). Обратная матрица находится путём  $N_x - 2$  кратного решения системы линейных уравнений (СЛАУ) размерности  $(N_y - 2)(N_y - 2)$  методом Гаусса. Всего требуется обратить  $N_x - 2$  матриц, где  $N_x$  — число сеточных узлов в горизонтальном направлении, а  $N_y$  — количество узлов сетки по вертикали. Кратко поясним решение уравнения Пуассона (9) с помощью дискретного преобразования Фурье (DFT) с постоянным шагом сетки по оси [29]. Разностную аппроксимацию уравнения Пуассона (9) удобно переписать в следующем виде:

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \alpha_j \phi_{i,j} + \beta_j \phi_{i,j+1} + \gamma_j \phi_{i,j-1} = p \varsigma_{i,j}, \quad (11)$$

где  $\beta_j = \gamma_j = \beta^2$ ,  $p = h_x^2$ ,  $\alpha_j = -2 - 2\beta^2$ ,  $\beta = h_x/h_y$ . Пусть разностные аналоги  $\phi_{i,j}$  и  $\varsigma_{i,j}$  функции  $\phi$  и  $\varsigma$  представлены в виде

$$\phi_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} a_{k,j} \sin\left(\frac{\pi k i}{N_x}\right), \quad \varsigma_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} b_{k,j} \sin\left(\frac{\pi k i}{N_x}\right), \quad (12)$$

где

$$a_{k,j} = \frac{2}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x-1} \phi_{i,j} \sin\left(\frac{\pi k i}{N_x}\right), \quad b_{k,j} = \frac{2}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x-1} \varsigma_{i,j} \sin\left(\frac{\pi k i}{N_x}\right).$$

Подставив (12) в (11), получим

$$\sum_{k=1}^{N_x-1} \left[ a_{k,j} \left( \sin \frac{\pi k (i+1)}{N_x} + \sin \frac{\pi k (i-1)}{N_x} \right) + \alpha_j a_{k,j} \sin \frac{\pi k i}{N_x} + \beta_j a_{k,j+1} \sin \frac{\pi k i}{N_x} + \gamma_j a_{k,j-1} \sin \frac{\pi k i}{N_x} \right] = p \sum_{k=1}^{N_x-1} b_{k,j} \sin \frac{\pi k i}{N_x}. \quad (13)$$

Далее, приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в уравнении (13), придём к трёхдиагональному соотношению:

$$\beta_j a_{k,j+1} + \lambda_{k,j} a_{k,j} + \gamma_j a_{k,j-1} = p b_{k,j}, \quad \text{где } \lambda_{k,j} = \alpha_j + 2 \cos \frac{\pi k}{N_x}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1. \quad (14)$$

Система уравнений (14) с трёхдиагональной матрицей для определения величин  $a_{k,j}$  при каждом  $k$  решается методом прогонки. Затем функция  $\phi_{i,j}$  отыскивается с помощью обратного преобразования (12).

Если метод Беллмана не содержит параметров настройки, то эффективность геометрического многосеточного метода, как и любого итерационного метода, зависит от нескольких параметров настройки: числа итераций на каждой из сеток, порогового значения невязки, процедуры интерполяции и огрубления, итерационного метода сглаживателя, числа уровней

сетки и самого алгоритма построения грубых сеток в случае алгебраического многосеточного метода.

Для двух функций тока в случае геометрически сложной области, а также неравномерной и даже треугольной сетки может быть применён прямой метод для ленточной матрицы. При этом, так как матрица СЛАУ не меняется, она может быть приведена к верхнетреугольному виду лишь единожды, а время обратного хода при изменяющейся правой части уравнения занимает столько же мало времени, что и в методе динамического программирования Беллмана. При этом метод с ленточной матрицей потребляет в 2.73 раза больше оперативной памяти, чем метод Беллмана, и может быть применён для двумерных задач.

Тестовые решения уравнения Пуассона на компьютере с процессором 2.2 ГГц (2 потока) показали, что на сетке в 1 млн расчётных узлов ( $10^3 \times 10^3$ ) тремя методами (дискретного преобразования Фурье (DFT), динамического программирования Беллмана и алгебраического многосеточного метода (AMG) в эффективной реализации, известной под названием `amg1r5` [23]) необходимы следующие затраты компьютера по времени и памяти.

1. Метод на основе дискретного преобразования Фурье (DFT) для решения уравнения Пуассона потребовал 101 Мб памяти и 2 с 775 мс времени.

2. Метод динамического программирования Беллмана [25] потребовал 9 Гб памяти и 13 м 45 с времени на построение последовательности матриц  $A_i$ . Обратный ход метода Беллмана занял 3 с 864 мс.

3. Алгебраический многосеточный метод `amg1r5` [23] потребовал 2 Гб памяти, и решение алгебраическим многосеточным методом `amg1r5` заняло 2 с 855 мс.

Система уравнений Симоненко — Зеньковской (1)–(4) решалась на совмещённой сетке, (вихрь, обе функции тока и температура вычисляются в одних и тех же узлах сетки). В процессе вычислений никаких шахматных осцилляций, характерных для формулировки в естественных переменных, не возникало [22, 27–29].

Система уравнений гидродинамики решается отдельным решателем (уравнения для вихря, функций тока  $\psi$  и  $G$ , а также температуры решаются последовательно). Для завихренности на твёрдой границе в комплексе программ реализованы три метода: условия Тома  $\omega_{\text{wall}} = 2(\psi_i - \psi_{\text{wall}})/h^2$ , Вудса  $\omega_{\text{wall}} = -0.5\omega_i + 3 \cdot (\psi_{\text{wall}} - \psi_i)/h^2$  и Йенсена  $\omega_{\text{wall}} = (-7\psi_{\text{wall}} + 8\psi_i - \psi_{ii})/(2h^2)$  [28, 29]. В данной работе представлены результаты с аппроксимацией граничного условия для завихренности по формуле Тома. Для удовлетворения граничного условия для завихренности по неявной схеме на твёрдой стенке в программном комплексе организован итерационный цикл нижней релаксации с параметром  $\alpha = 0.2$  [28, 29].

При решении уравнения переноса вихря с продольно-поперечной прогонкой (ADI) характерное время расчёта одного варианта на сетке  $50 \times 50$  узлов составляло около 6 мин (PC с процессором 2.2 ГГц, 2 потока), а потребление оперативной памяти при этом составляло 8 Мб. Для аппроксимации уравнения конвективной диффузии применялся метод контрольного объёма [27]. При аппроксимации конвективного члена применялся метод отложенной коррекции, в котором неявно реализуется противопоточная схема (Upwind), а также явная уточняющая добавка до схемы высокой разрешающей способности (QUICK, LUS, CUS, SMART, H\_QUICK, UMIST, CHARM, MUSCL, VAN\_LEER\_HARMONIC, OSPRE, VAN\_ALBADA, SUPERBEE, MINMOD, H\_CUS, KOREN или FROMM), которая реализована добавлением в правую часть уравнения выражений для ограничителя потока, представленных в табл. 1.

В табл. 1 величина  $r = (\Phi_d - \Phi_c)/(\Phi_c - \Phi_u)$ , где  $\Phi$  — искомая функция, а индексы означают:  $c$  — center,  $u$  — upwind (сторона против потока),  $d$  — direct (сторона по потоку).

Для аппроксимации по времени используется схема Пейре второго порядка на равномерной сетке по времени с шагом  $\tau$  в виде 
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{3\omega^{n+1} - 4\omega^n + \omega^{n-1}}{2\tau}.$$

Для уравнений Пуассона (2), (4) применяется метод динамического программирования Беллмана [25], для завихренности делается одна итерация метода установления с продольно-

Таблица 1

Ограничители потока для различных схем

№	Схема	Формула ограничителя потока
1	<i>QUICK</i>	$0.5(1.5r + 0.5)$
2	<i>LUS</i>	1.0
3	<i>CUS</i>	$0.5((1 + 1/3)r + (1 - 1/3))$
4	<i>SMART</i>	$\max(0, \min(2r, 0.75r + 0.25, 4.0))$
5	<i>H_QUICK</i>	$\begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ 2(r +  r )/(r + 3), & r > 0 \end{cases}$
6	<i>UMIST</i>	$\max(0, \min(2r, 0.25 + 0.75r, 0.75 + 0.25r, 2))$
7	<i>CHARM</i>	$\begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ r(3r + 1)/(r + 1)^2, & r > 0 \end{cases}$
8	<i>MUSCL</i>	$\max(0, \min(2, 0.5r + 0.5, 2r))$
9	<i>VAN_LEER_HARMONIC</i>	$\begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ (r +  r )/(r + 1), & r > 0 \end{cases}$
10	<i>OSPRE</i>	$3(r^2 + r)/(2(r^2 + r + 1))$
11	<i>VAN_ALBADA</i>	$(r^2 + r)/(r^2 + 1)$
12	<i>SUPERBEE</i>	$\max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$
13	<i>MINMOD</i>	$\max(0, \min(r, 1))$
14	<i>H_CUS</i>	$\begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ 1.5(r +  r )/(r + 2), & r > 0 \end{cases}$
15	<i>KOREN</i>	$\max(0, \min(2r, (2r + 1)/3, 2))$
16	<i>FROMM</i>	$0.5(r + 1)$

поперечной прогонкой и применяется нижняя релаксация; для температуры применяется алгебраический многосеточный метод `amg1r5` [23].

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной работе рассмотрено влияние на гидродинамику и теплоперенос вертикальных вибраций квадратной области ( $H = L = 3.0$  см), заполненной жидкостью в условиях невесомости, для трёх наборов параметров, приведённых в табл. 2. Свойства жидкости соответствуют расплаву теллурида кадмия CdTe (число Прандтля  $Pr = 0.0824$ ).

Получены результаты решения трёх модельных задач с разными граничными условиями для температуры.

**Задача 1.** Задача с боковым подогревом квадратной области [26].  $T(x = 0) = 400$  К,  $T(x = L) = 300$  К,  $\frac{\partial T}{\partial y}(y = 0, y = H) = 0$ ,  $\psi$  и  $G(y = 0, y = H, x = 0, x = L) = 0$ ; условие прилипания на твёрдых стенках задаётся граничным условием для вихря  $\omega(y = 0, y = H, x = 0, x = L)$  с аппроксимацией Тома.

**Задача 2.** Задача с охлаждением части верхней границы (модель выращивания кристаллов методом Чохральского).  $T(x = 0) = T(x = L) = T(y = 0) = 400$  К,  $T(y = H, L/3 < x < 2L/3) = 300$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y}(y = H, x \leq L/3$  и  $x \geq 2L/3) = 0$ ,  $\psi$  и  $G(y = 0, y = H, x = 0, x = L) = 0$ ;

условие прилипания на твёрдых стенках задаётся граничным условием для вихря  $\omega (y = 0, y = H, x = 0, x = L)$  с аппроксимацией Тома.

**Задача 3.** Задача с подогревом снизу (задача Рэлея – Бенара).  $T(y = 0) = 400\text{ К}$ ,  $T(y = H) = 300\text{ К}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, x = L) = 0$ ;  $\psi$  и  $G(y = 0, y = H, x = 0, x = L) = 0$ ; условие прилипания на твёрдых стенках задаётся через граничное условием для вихря  $\omega (y = 0, y = H, x = 0, x = L)$  с аппроксимацией Тома.

Результаты решения данных задач 1–3 для параметров  $P0, P1, P2$  и  $P3$  (см. табл. 2) представлены в виде изотерм и изолиний функции тока на рис. 3–6 и в виде значений максимальных скоростей в табл. 3.

Таблица 2

Параметры вибрационного воздействия

№ набора параметров	Амплитуда $A$ , мкм	Частота $f$ , Гц	$g_{\text{vibr}}$	$Ra_{\text{vibr}}$	$\epsilon$
P0	2	5	0.1	$5 \cdot 10^2$	0.001
P1	50	50	4.93	$2.47 \cdot 10^6$	2.465
P2	100	30	3.55	$1.78 \cdot 10^6$	1.776
P3	100	50	9.87	$4.95 \cdot 10^6$	4.93

Таблица 3

Результаты расчётов

№	Максимальное значение модуля скорости, мм/с		
	Задача 1	Задача 2	Задача 3
P1	1	—	<0.2
P2	0.9	0.8–1.71	<0.2
P3	1.2	—	<0.2

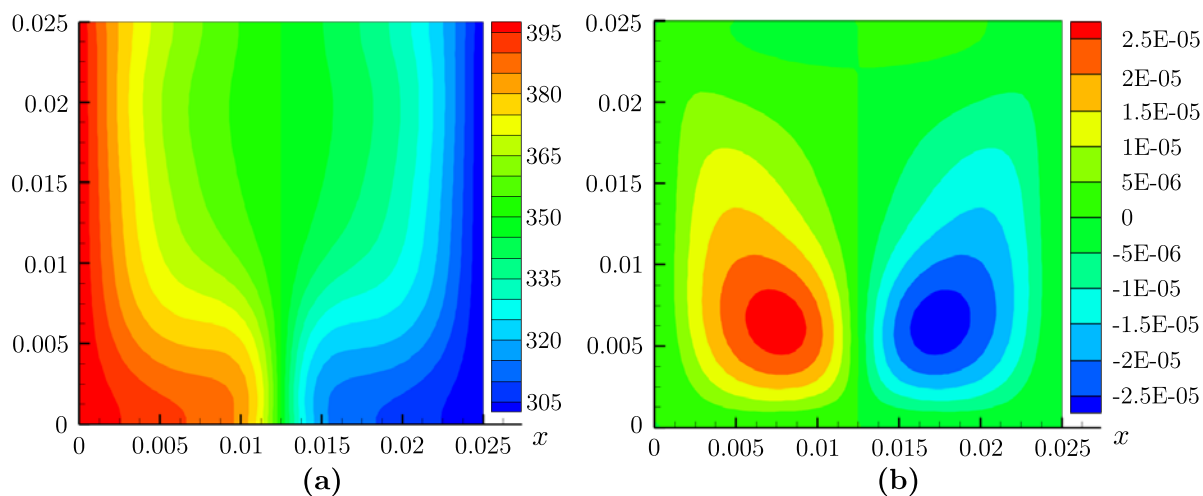


Рис. 3. Задача 1. Изотермы (а) и функция тока (б) течения расплава при слабой вибрационной конвекции для параметров P0 (табл. 2)

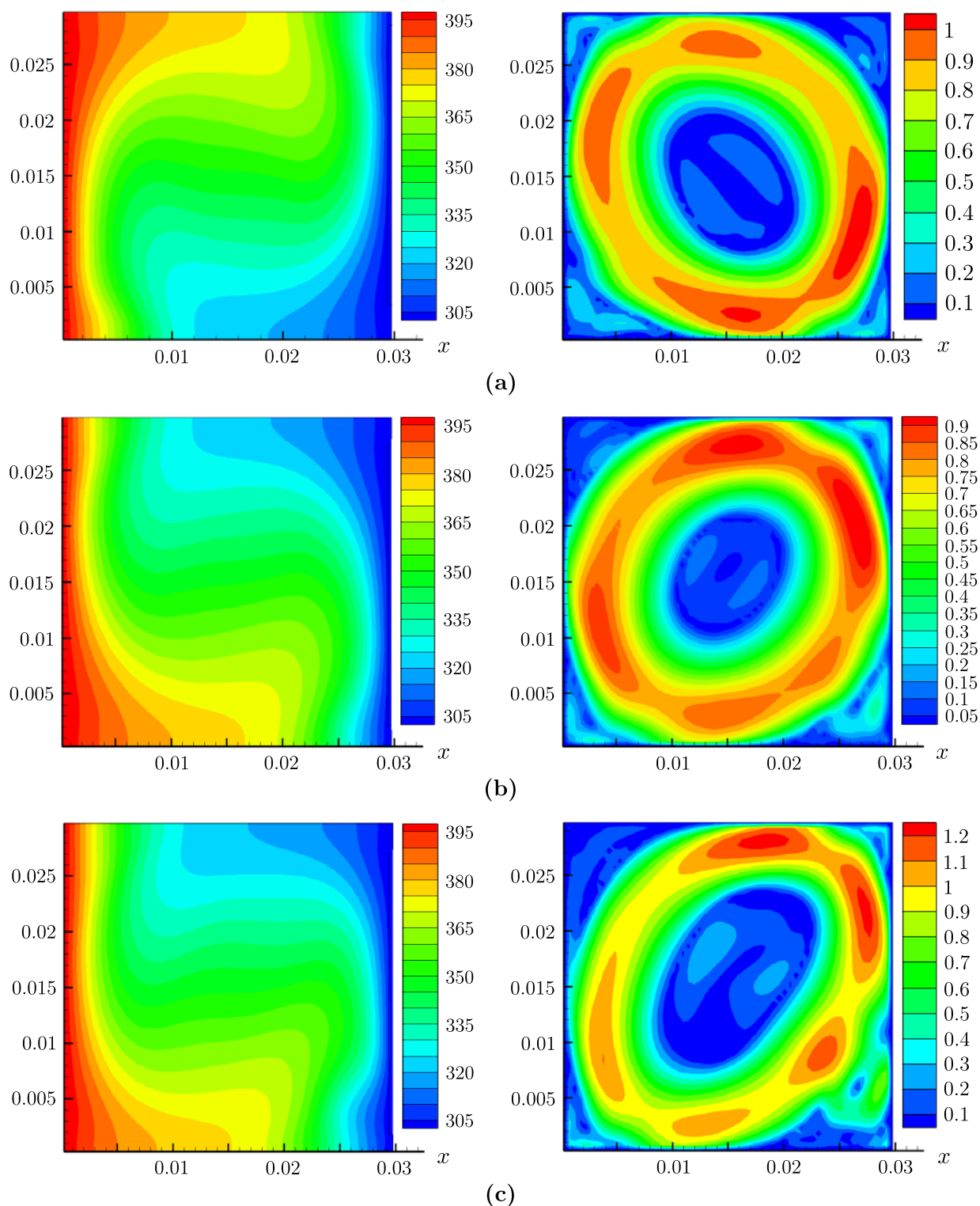


Рис. 4. Задача 1. Изотермы (слева) и модуль скорости (справа) течения расплава при вибрационной конвекции для параметров:  $P1$  (а),  $P2$  (б),  $P3$ (с) (табл. 2)

На рис. 3–6 показана вибрационная конвекция для задач 1–3 в условиях невесомости для расплава с числом  $Pr = 0.087$  в виде полей функции тока, модуля скорости и изотерм. На рис. 3 представлены результаты в виде изотерм и функции тока для задачи 1, показывающие влияние

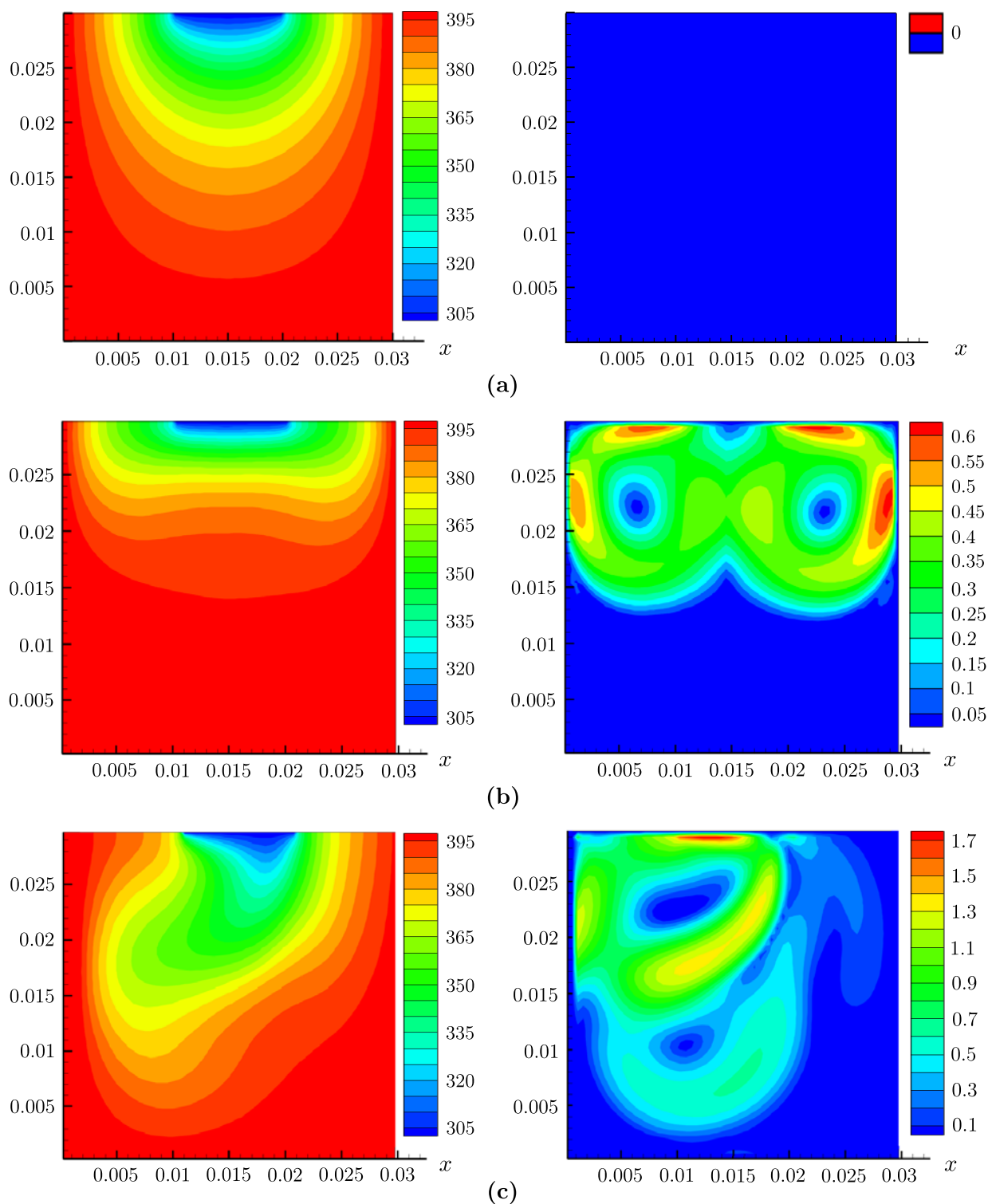


Рис. 5. Задача 2. Изотермы (слева) и модуль скорости (справа) течения расплава при вибрационной конвекции для параметров: без вибраций (а), вертикальные вибрации при  $P2$  (б), горизонтальные вибрации при  $P2$  (с) (табл. 2)

виброконвекции на поле температуры и структуру течения расплава в случае слабого вибрационного воздействия:  $Ra_{\text{vibr}} = 500$  — набор параметров  $P0$  (табл. 2). В этом случае наблюдается двухъячейковая структура слабой виброконвекции с двумя согласующимися вихрями,

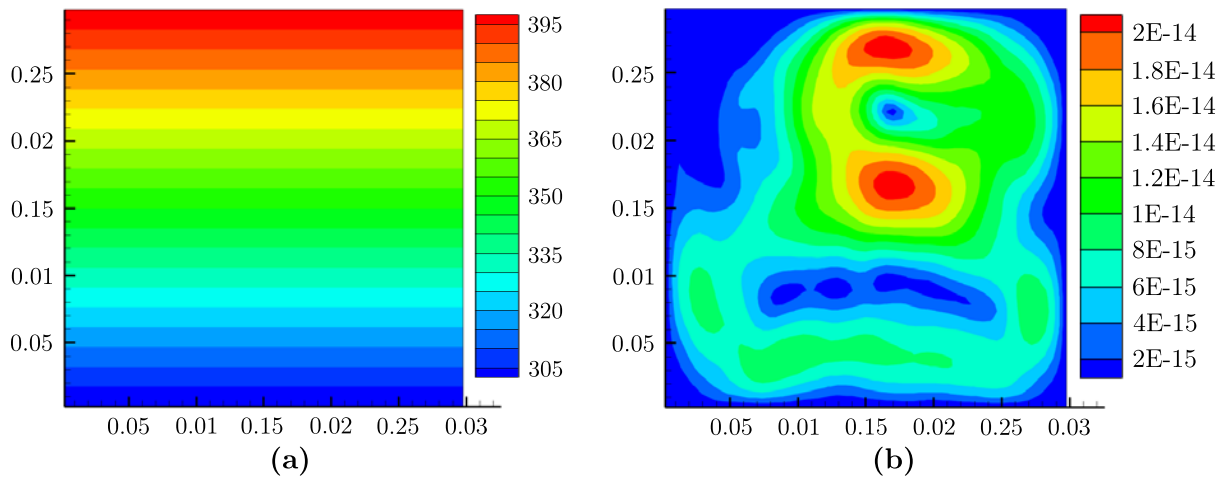


Рис. 6. Задача 3. Изотермы (а) и модуль скорости (б) течения расплава при вибрационной конвекции для параметров  $P2$  (табл. 2)

вытянутыми вдоль вертикальной линии с подъёмом жидкости в центре области и опусканием вдоль вертикальных стенок. В результате двухвихревого подъёмно-опускного конвективного течения распределение отклонений поля температуры от исходного практически симметрично относительно средней вертикальной линии области. При повышении вибрационного числа Рэлея  $Ra_{vibr} > 10^6$  двухвихревая вертикальная симметричная структура конвективного течения теряет устойчивость и становится одновихревой, как показано на рис. 4. Смена моды конвективного течения связана с потерей устойчивости и согласуется с теоретическими результатами [3, 4]. На рис. 4 показаны изотермы и модули скорости для задачи 1 для трёх наборов параметров  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$  (табл. 2). Характерной особенностью одновихревого течения виброконвективного течения в невесомости является направление закрутки течения. На рис. 4 показано, что направление виброконвективного течения меняется дискретно в зависимости от вибрационных параметров и на это может влиять величина амплитуды вибрационного воздействия; например, на рис. 4(а) течение направлено по часовой стрелке при амплитуде 50 мкм, а на рис. 4(б) и 4(с) течение направлено против часовой стрелки при амплитуде 100 мкм.

На рис. 5(а) показаны изотермы при отсутствии вибрационного воздействия в простейшей модели метода Чохральского и показано влияние на структуру течения и поле температуры вертикальных вибраций (рис. 5(б)) и горизонтальных вибраций (рис. 5(с)) для набора параметров  $P2$  (табл. 2).

Для задачи 3 (рис. 6) результаты моделирования показали, что для наборов параметров  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$  (табл. 2) вибрационные воздействия создают очень слабые течения, которые не оказывают влияния на поле температуры и решения практически совпадают для всех трёх наборов параметров  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$  (табл. 3), что согласуется с результатами авторов работы [5].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Система уравнений Симоненко — Зеньковской для высокочастотной виброконвекции несжимаемой жидкости [5] была записана в терминах: вихрь-две функции тока, температура, что позволило использовать эффективные алгоритмы численного решения.

В результате проведённого исследования выбран наилучший по быстродействию метод в виде связки следующих алгоритмов: для уравнения вихря — одна итерация метода установления с использованием продольно поперечной прогонки (LR), для эллиптических уравнений применяется метод динамического программирования Беллмана [25], для уравнения переноса температуры — алгебраический многосеточный метод `amg1r5` Руге и Штубена [23]. Система

уравнений Симоненко — Зеньковской решается отдельным решателем [28]. Время расчёта одного варианта на сетке  $50 \times 50$  узлов в среднем составляет порядка 6 м процессорного времени (2.2 ГГц, 2 потока; потребляет 8 Мб оперативной памяти). На языке C/C++ написана программа решения системы уравнений Симоненко — Зеньковской, записанной в терминах: вихрь-две функции тока, температура. С помощью разработанной программы могут быть рассчитаны течения теплоносителей и теплообмен в широком наборе определяющих параметров ( $Pr, Gr, Ra, \varepsilon, Ra_{vibr}$ ).

На примере решения модельных задач показано, что изменением вибрационных параметров можно менять структуру и направление конвективного течения, что согласуется с теоретическими результатами, указывающими на дискретную неустойчивость возникновения виброконвекции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Faraday M.* On a peculiar class of acoustical figures // *Philos. Trans. Royal Soc.* 1831. N 121. P. 299–340.
2. *Lord Rayleigh* On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems // *Trans. Royal Soc. London.* 1883. V. 175, N 1. P. 1–21.
3. *Gershuni G.Z., Lubimov D.V.* Termal Vibrational Convection. John Willey & Sons, 1998.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
5. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1966. № 5. С. 51–55.
6. *Farooq A., Homsy G.M.* Streaming flows due to g-jitter-induced natural convection // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 271. P. 351–378; DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112094001801>
7. *Zyuzgin A.V., Putin G.F., Kharisov A.F.* Ground modeling of thermovibrational convection in real weightlessness // *Fluid Dynamics.* 2007. V. 42, N 3. P. 354–361.
8. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Иванцов А.О. Влияние вибраций на гидродинамику расплава при выращивании кристаллов бесконтактным методом Бриджмена // *Вычисл. механика сплошных сред.* 2011. V. 4, N 4. P. 52–62; <https://doi.org/https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4>
9. Аветисов И.Х., Жариков Е.В., Зиновьев А.Ю., Садовский А.П. Новый метод управления тепло-массопереносом в расплаве при выращивании кристаллов по Чохральскому // *Докл. АН.* 2009. Т. 428, № 2. С. 177–179.
10. *Fedyushkin A.I., Bourago N.G., Polezhaev V.I., Zharikov E.V.* The influence of vibration on hydrodynamics and heat-mass transfer during crystal growth // *J. Crystal Growth.* 2005. V. 275. P. e1557–e1563.
11. Федюшкин А.И., Иванов К.А. Гидродинамика и теплообмен при вибрационных воздействиях на расплав в процессах выращивания монокристаллов, М., 2014. (Препринт ИПМех РАН, № 1085).
12. *Fedyushkin A.I., Burago N.G., Puntus A.A.* Convective heat and mass transfer modeling under crystal growth by vertical Bridgman method // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. V. 1479. Article 012029; DOI: [10.1088/1742-6596/1479/1/012029](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012029)
13. Федюшкин А.И. Влияние управляемых вибраций на гидродинамику и теплоперенос при росте кристаллов методом Чохральского // *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Тр. Межд. научн. конф., Воронеж, 17–19 декабря 2018 г., Воронеж, 2018.* С. 955–962.
14. Федюшкин А.И. Влияние вибраций на пограничные слои в задачах свободной и вынужденной конвекции // *Материалы XIII Межд. конф. по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ2020), 6–13 сентября 2020 г., Алушта, 2020.* С. 594–596; [http://www.npnj.ru/files/npnj2020\\_web.pdf](http://www.npnj.ru/files/npnj2020_web.pdf)
15. Федюшкин А.И. Влияния управляемых вибраций на гидродинамику и теплоперенос при росте кристаллов // *Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XX Межд. конф. (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.). Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного фед. ун-та, 2020.* С. 236–240; ISBN 978-5-9275-3486-9

16. *Fedyushkin A.I.* Heat and mass transfer during crystal growing by the Czochralski method with a submerged vibrator // *J. Phys. Conf. Ser.* 2019. V. 1359. Article 012054; DOI: 10.1088/1742-6596/1359/1/012054
17. *Fedyushkin A.I.* The effect of controlled vibrations on Rayleigh—Benard convection // *J. Phys. Conf. Ser.* 2021. V. 2057, N 1. Article 012012; DOI: 10.1088/1742-6596/2057/1/012012.
18. *Fedyushkin A.I.* Numerical simulation of gas-liquid flows and boiling under effect of vibrations and gravity // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. Article 1479; DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012094.
19. *Иванов К.А., Золотарёв А.А., Юрасов А.Н.* Численные методы решения стационарных задач теплопроводности многосеточными методами. М.: изд. ВНИИГеосистем, 2021.
20. *Федюшкин А.И.* Исследование матричного метода решения уравнений конвекции. Комплекс программ «МАРЕНА». М., 1990. (Препринт Ин-та прикл. математики; № 471).
21. *Федоренко Р.П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927.
22. *Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г.* Методы расчёта нестационарных несжимаемых течений в естественных переменных на неразнесённых сетках // *Мат. моделирование.* 1996. Т. 8, № 7. С. 1–29.
23. *Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н. и др.* Методы ускорения газодинамических расчётов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014.
24. *Ермаков М.К.* Использование многосеточного метода в задачах физической механики // *Физ.-хим. кинетика в газовой динамике.* 2014. Т. 15, № 2; <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-2/articles/116/>
25. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.
26. *Davis de V.G., Jones I.P.* Natural convection in square cavity: A comparison exercise // *Internat. J. Numer. Meth. Fluids.* 1983. V. 3. Article 227.
27. *Патанкар С.* Численные моды решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
28. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
29. *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
30. *Иванов К.А. и др.* Свидетельство № 2021668343 о государственной регистрации программы AliceFlow2D в российском Реестре программ для ЭВМ от 15.11.2021 г.

UDC 519.63

**AN EFFECTIVE MULTIGRID METHOD FOR SOLVING PROBLEMS  
OF HIGH FREQUENCY VIBRATIONAL CONVECTION**© 2023 A. I. Fedyushkin<sup>1a</sup>, K. A. Ivanov<sup>2b</sup>, A. A. Puntus<sup>3</sup><sup>1</sup>*Ishlinsky Institute of Problems of Mechanics RAS,  
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow 119526, Russia,*<sup>2</sup>*NPP «Pulsar»,**Okružnoi proezd 27, Moscow 105187, Russia,*<sup>3</sup>*Moscow Aviation Institute,**Volokolamskoe shosse 4, Moscow 125993, Russia*E-mails: <sup>a</sup>fai@ipmnet.ru, <sup>b</sup>kirill7785@mail.ru, <sup>c</sup>artpuntus@yandex.ru

Received 29.08.2022, revised 29.08.2022, accepted 29.09.2022

**Abstract.** The paper describes an implemented algorithm for solving the problem of vibrational convection in a rectangular area filled with an unevenly heated incompressible fluid. The mathematical model is based on the solution of the Simonenko–Zenkovskaya equations obtained by averaging the Navier–Stokes equations under the assumption that the volume of liquid performs high-frequency translational vibrations. To solve the Poisson equations, an algebraic multigrid method is implemented in combination with a highly efficient dynamic programming method (based on the optimal control principle of R. Bellman) and discrete Fourier transform. Mathematical software written in C/C++ has been developed. Examples of solving model problems with different directions of the heating flow of a square region relative to the vibration vector are given.

**Keywords:** multigrid method, high-frequency vibrational convection. Simonenko–Zenkovskaya equations, Bellman optimality principle, discrete Fourier transform.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.214

## REFERENCES

1. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures. *Philos. Trans. Royal Soc.*, 1831, No. 121, pp. 299–340.
2. Lord Rayleigh On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems. *Trans. Royal Soc. London*, 1883, Vol. 175, No. 1, pp. 1–21.
3. Gershuni G.Z., Lubimov D.V. *Thermal Vibrational Convection*. John Willey & Sons, 1998.
4. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M., Nepomnyashchii A.A. *Ustoichivost' konvektivnykh techenii* [Stability of convective currents]. Moscow: Nauka, 1989 (in Russian).
5. Zen'kovskaya S.M., Simoneneko I.B. O vliyaniy vibratsii vysokoi chastoty na vozniknovenie konveksii [About the influence of high frequency vibrations on the occurrence of convection]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1966, No. 5, pp. 51–55 (in Russian).
6. Farooq A., Homsy G.M. Streaming flows due to g-jitter-induced natural convection. *J. Fluid Mech.*, 2006, Vol. 271, pp. 351–378; DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112094001801>
7. Zyuzgin A.V., Putin G.F., Kharisov A.F. Ground modeling of thermovibrational convection in real weightlessness. *Fluid Dynamics*, 2007, Vol. 42, No. 3, pp. 354–361.

8. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Ivantsov A.O. Vliyanie vibratsii na gidrodinamiku rasplava pri vyrashchivaniy kristallov beskontaktnym metodom Bridzhmena [The effect of vibrations on the hydrodynamics of the melt during crystal growth by the contactless Bridgman method]. *Vychisl. Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2011, Vol. 4, No. 4, pp. 52–62 (in Russian); <https://doi.org/https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4>
9. Avetisov I.Kh., Zharikov E.V., Zinov'ev A.Yu., Sadovskii A.P. Novyi metod upravleniya teplomassoperenosom v rasplave pri vyrashchivaniy kristallov po Chokhral'skomu [A new method for controlling heat and mass transfer in a melt during crystal growth according to Chokhralsky]. *Dokl. Akad. Nauk*, 2009, Vol. 428, No. 2, pp. 177–179 (in Russian).
10. Fedyushkin A.I., Bourago N.G., Polezhaev V.I., Zharikov E.V. The influence of vibration on hydrodynamics and heat-mass transfer during crystal growth. *J. Crystal Growth*, 2005, Vol. 275, pp. e1557–e1563.
11. Fedyushkin A.I., Ivanov K.A. Gidrodinamika i teploobmen pri vibratsionnykh vozdeistviyakh na rasplav v protsessakh vyrashchivaniya monokristallov [Hydrodynamics and heat transfer under vibration effects on the melt in the processes of growing single crystals]. Moscow, 2014. (Preprint Institute of Applied Mechanics Russian Akad. Nauk, No. 1085) (in Russian).
12. Fedyushkin A.I., Burago N.G., Puntus A.A. Convective heat and mass transfer modeling under crystal growth by vertical Bridgman method. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, Vol. 1479, article 012029; DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012029
13. Fedyushkin A.I. Vliyanie upravlyaemykh vibratsii na gidrodinamiku i teploperenos pri roste kristallov metodom Chokhral'skogo [The effect of controlled vibrations on hydrodynamics and heat transfer during crystal growth by the Chokhralsky method]. *Proc. Internat. Conf. Actual Probl. Appl. Math., Comput. Sci. Mech.* (Voronezh, December 17–19, 2018). Voronezh, 2018, pp. 955–962 (in Russian).
14. Fedyushkin A.I. Vliyanie vibratsii na pogramichnye sloi v zadachakh svobodnoi i vynuuzhdennoi konveksii [Influence of vibrations on boundary layers in problems of free and forced convection]. *Proc. XIII Internat. Conf. Appl. Math. Mech. Aerospace Industry (AMMAI'2020)* ( Alushta, September 6–13, 2020). Moscow, 2020, pp. 594–596 (in Russian); [http://www.npnj.ru/files/npnj2020\\_web.pdf](http://www.npnj.ru/files/npnj2020_web.pdf)
15. Fedyushkin A.I. Effects of controlled vibrations on hydrodynamics and heat transfer during crystal growth [The effects of controlled vibrations on hydrodynamics and heat transfer during crystal growth]. *Proc. XX Internat. Conf. Modern Problems of Continuum Mechanics* (Rostov-on-Don, June 18–21, 2020). Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal Univ. Press, 2020, Vol. 2, pp. 236–240; ISBN 978-5-9275-3488-3 (in Russian).
16. Fedyushkin A.I. Heat and mass transfer during crystal growing by the Czochralski method with a submerged vibrator. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, Vol. 1359, article 012054; DOI: 10.1088/1742-6596/1359/1/012054
17. Fedyushkin A.I. The effect of controlled vibrations on Rayleigh–Benard convection. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, Vol. 2057, No. 1, article 012012; DOI: 10.1088/1742-6596/2057/1/012012.
18. Fedyushkin A.I. Numerical simulation of gas-liquid flows and boiling under effect of vibrations and gravity. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, article 1479; DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012094.
19. Ivanov K.A., Zolotarev A.A., Yurasov A.N. Chislennyye metody resheniya statsionarnykh zadach teploprovodnosti mnogosetochnymi metodami [Numerical methods for solving stationary heat conduction problems by multigrid methods]. Moscow: VNII geosistem Press, 2021 (in Russian).
20. Fedyushkin A.I. Issledovanie matrichnogo metoda resheniya uravnenii konveksii. Kompleks programm «MARENA» [Investigation of the matrix method for solving convection equations. A set of programs «MADDER»]. Moscow, 1990. (Preprint In-ta Prikl. Mat., No. 471) (in Russian).
21. Fedorenko R.P. Relaksatsionnyi metod resheniya raznostnykh ellipticheskikh uravnenii [Relaxation method for solving difference elliptic equations]. *Zhurn. Vychisl. Matematiki i Mat. Fiziki*, 1961, Vol. 1, No. 5, pp. 922–927 (in Russian).
22. Vabishchevich P.N., Pavlov A.N., Churbanov A.G. Metody rascheta nestatsionarnykh neszhimaemykh techenii v estestvennykh peremennykh na neraznesennykh setkakh [Methods for calculating unsteady incompressible flows in natural variables on non-weighted grids]. *Mat. Model.*, 1996, Vol. 8, No. 7, pp. 1–29 (in Russian).

23. Volkov K.N., Deryugin Yu.N., Emel'yanov V.N. i dr. Metody uskoreniya gazodinamicheskikh raschetov na nestruturovannykh setkakh [Methods for accelerating gas-dynamic calculations on unstructured grids.]. Moscow: Fizmatlit, 2014 (in Russian).
24. Ermakov M.K. Ispol'zovanie mnogosetochnogo metoda v zadachakh fizicheskoi mekhaniki [Using the multigrid method in problems of physical mechanics]. *Phys.-Chem. Kinetics in Gas Dynamics.*, 2014, Vol. 15, No. 2 (in Russian); <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-2/articles/116/>
25. Bellman R., Endzhel E. Dinamicheskoe programmirovaniye i uravneniya v chastnykh proizvodnykh [Dynamic programming and partial differential equations]. Moscow: Mir, 1974 (in Russian).
26. Davis de V.G., Jones I.P. Natural convection in square cavity: A comparison exercise. *Internat. J. Numer. Meth. Fluids*, 1983, Vol. 3, article 227.
27. Patankar S. Chislennyye mody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti [Numerical modes for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. Moscow: Energoatomizdat, 1984 (in Russian).
28. Rouch P. Vychislitel'naya gidrodinamika [Computational fluid dynamics]. Moscow: Mir, 1980 (in Russian).
29. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. Chislennoe modelirovaniye protsessov teplo- i massoobmena [Numerical modeling of heat and mass transfer processes]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
30. Ivanov K.A., etc. Svidetel'stvo No. 2021668343 o gosudarstvennoi registratsii programmy AliceFlow2D v rossiiskom Reestre programm dlya EVM ot 15.11.2021 [Certificate No. 2021668343 on state registration of the AliceFlow2D program in the Russian Register of Comput. Programs, 15.11.2021] (in Russian).