

УДК 628.35

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРА ДЛЯ ВОДООЧИСТКИ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИОПЛЕНОК**© 2023 Т. Н. Бобылева,<sup>1а</sup>, А. С. Шамаев,<sup>2б</sup>, О. В. Янцен<sup>3,4с</sup>

<sup>1</sup>*Национальный исследовательский Московский  
государственный строительный университет,  
Ярославское шоссе, 26, г. Москва 129337, Россия,*

<sup>2</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского,  
просп. Вернадского, 101-1, г. Москва 119526, Россия,*

<sup>3</sup>*Научно-технический центр, ООО «ВТ Эксперт»,  
ул. Саморы Машела, 2а, г. Москва 117198, Россия,*

<sup>4</sup>*Российский государственный геологоразведочный  
университет им. С. Орджоникидзе,  
ул. Миклухо-Маклая, 23, г. Москва 117485, Россия*

E-mails: <sup>a</sup>tatyana2211@outlook.com, <sup>b</sup>sham@rambler.ru, <sup>c</sup>yantsenov@bk.ru

Поступила в редакцию 26.08.2022 г.; после доработки 20.11.2022 г.;  
принята к публикации 12.01.2023 г.

Предложена математическая модель очистки сточных вод в фильтрах на основе использования биопленки, в которой микроорганизмы разрушают вредные примеси, содержащиеся в воде. Фильтр содержит большое количество элементов загрузки. Приведена система уравнений в частных производных с граничными условиями для одного элемента загрузки, представляющего собой цилиндрический стержень, поверхность которого покрыта биологически активной плёнкой. Эта система содержит параболическое уравнение в трёхмерной области и гиперболическое уравнение на части поверхности этой области, связанные друг с другом с помощью граничного условия и потенциала в гиперболическом уравнении. Проводится асимптотический анализ этой системы, позволяющий свести данную модель к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Используется математический метод построения асимптотики в так называемых тонких областях. Дается математическое обоснование предлагаемого метода. Метод представляет собой упрощение сложной комбинированной модели, основанной на законах гидродинамики и диффузии. На этой основе предлагается модель работы всего устройства очистки сточных вод, содержащего большое количество (миллионы) таких элементов.

**Ключевые слова:** водоочистка, биологически активный слой, асимптотический анализ решений в тонкой области, математическая модель очистки загрязнений, система дифференциальных уравнений смешанного типа.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.203

**ВВЕДЕНИЕ**

Очистка воды от нежелательных примесей имеет большое практическое значение [1, 2]. Математическое моделирование различных задач со сложными флюидами при биологической очистке приведено в [3–7]. В работе [8] рассматривается краевая задача с подвижной границей для биологического фильтра. В большинстве случаев такие задачи решаются численно. В [9]

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 075-15-2022-284) и Госзадания Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (проект АААА-А20-120011690138-6).

приведён пример численного решения задачи, моделирующей поведение взвешенных субстратов и биопленок. В данной работе представлена модель очистки сложной жидкости, например воды, содержащей различные жидкие и твёрдые добавки, органические загрязнения. Очистка осуществляется с помощью биологически активных плёнок, расположенных на поверхности элемента загрузки фильтра. В биопленках происходит процесс биоокисления микроорганизмами вредных веществ из жидкости. Лабораторная модель биофильтра этой задачи представляет собой цилиндрический контейнер высотой около метра и диаметром около 20 см. Внутри он имеет большое количество параллелепипедов, состоящих из спрессованных тонких полимерных волокон в виде цилиндрических стержней. Объём такого параллелепипеда около  $15\text{--}20\text{ см}^3$ , отдельные стержни имеют длину около 1 см. В процессе работы фильтра на поверхности каждого стержня появляется тонкая биопленка, толщиной около десятой доли миллиметра. Загрязнённая вода поступает в верхнюю часть биофильтра, затем капли воды стекают по стержням, смачивая биопленку. Нежелательные примеси проникают в плёнку и являются пищей для находящихся в ней бактерий. Интенсивность проникновения зависит как от концентрации микроорганизмов, так и от концентрации нежелательных примесей на границе плёнки. На скорость поглощения примесей влияет средняя скорость воды, которая просачивается по поверхности биопленки. Таким образом, указанный стержень является элементарным элементом водоочистного устройства. Таких элементов в биофильтре несколько миллионов. Это означает, что сначала нужно построить адекватную модель очистки воды (т. е. процесса поглощения примесей) для одного такого элемента, затем реализовать эту модель на компьютере. В результате можно смоделировать весь процесс очистки воды, количественно определив уменьшение загрязнения воды при прохождении через биофильтр. Подобные модели рассматривались в [10–13]. Опишем основные принципы нашей математической модели.

## 1. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Как указывалось ранее, в модели используется множество тонких цилиндрических стержней, покрытых очищающим слоем (биопленкой). Кроме того, к биопленке примыкает бесконечно тонкий слой, по которому движутся воздух и вода с нежелательными примесями. Микроорганизмы в биопленке поглощают вредные примеси из движущихся капель воды. Абсорбирующий очищающий слой (биопленка) принимает в свой объём примеси с прилегающей поверхности со скоростью, зависящей от концентрации микроорганизмов на поверхности биопленки и примесей в очищаемой жидкости на той же поверхности, например пропорциональной разнице концентраций в очищающем слое и на поверхности. В пределах рассматриваемого слоя уравнение, описывающее изменение концентрации биопленки во времени, представляет собой уравнение диффузии с нелинейным членом, который моделирует поглощение загрязняющих веществ микроорганизмами. Если концентрация загрязнений невелика, этот закон можно считать линейным; с увеличением концентрации зависимость скорости поглощения примесей стремится к постоянному значению, так как неограниченный рост невозможен из-за влияния микроорганизмов друг на друга при их высокой концентрации. Закон, математически описывающий такое поведение биопленки, называется законом Моно. Попадание нежелательных примесей моделируется условием контакта с поверхностью, прилегающей к биопленке, по которой вода с нежелательными примесями, смешанная с воздухом, транспортируется по очищающему слою. Скорость движения воды рассчитывается для каждого элемента очистки, исходя из общего расхода загрязнённой жидкости и наклона элемента к горизонтальной плоскости. Уравнение движения воды в смеси с вредными примесями и воздухом является уравнением переноса, т. е. уравнением гиперболического типа с потенциалом, зависящим как от концентрации примесей на поверхности, так и от концентрации бактерий внутри очищающего слоя. В нашей модели этот потенциал описывает интенсивность поступления вредных примесей в очищающий слой. Например, в простейшем случае величина потенциала пропорциональна разнице концентрации примесей на поверхности и в очищающем слое. Система,

описывающая поглощение вредных примесей, включает уравнение диффузии в трёхмерной области цилиндрического слоя и уравнение переноса на прилегающей цилиндрической поверхности. Аналитического решения этой задачи нет. Необходимо рассчитать степень поглощения вредных примесей в зависимости от их концентрации и скорости поступления, толщины очищающего слоя, закона поглощения вредных примесей микроорганизмами и зависимости выхода вредных примесей от разности концентраций в биопленке и на её поверхности. После такого расчёта степени поглощения одним очищающим элементом нетрудно построить модель всего фильтра, состоящего из тысяч или даже миллионов таких элементов. Самое сложное — построить модель и соответствующие программы расчёта для одного элемента. А затем весь цилиндрический резервуар разбивается на отдельные слои по высоте резервуара и строится расчётная программа, позволяющая рассчитать изменение концентрации на каждом из слоёв сверху вниз, используя модель элементарного элемента очистки.

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Выбираем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, x)$ . В нашей задаче концентрация микроорганизмов и концентрация примесей на границе биопленки зависят от радиальной переменной  $r$  и переменной  $x$  по длине стержня, но не зависят от угловой переменной  $\varphi$ . Пусть  $\Omega_0^\varepsilon$  — один цилиндрический стержень диаметром  $\varepsilon = 2r_0$ , элемент загрузки;  $\Omega_1^\varepsilon$  — поверхностный слой стержня толщиной  $h$ , т. е. биопленка;  $S_\varepsilon$  — часть боковой поверхности  $\Omega_1^\varepsilon$ , не соприкасающаяся с  $\Omega_0^\varepsilon$ ;  $\Gamma_\varepsilon$  — оставшая часть боковой границы  $\Omega_1^\varepsilon$  (рис. 1);  $C^\varepsilon(\vec{z}, t)$  — концентрация бактерий в  $\Omega_1^\varepsilon$ ;  $\vec{z} = (r, x)$ ;  $t$  — переменная времени;  $M^\varepsilon(\vec{z}, t)$  — концентрация примесей на  $S_\varepsilon$  (на двумерной поверхности);  $\vec{v}(\vec{z}, t)$  — вектор скорости, касательный к этой поверхности;  $D_1, D_2$  — верхняя и нижняя плоские поверхности стержня  $\Omega_0^\varepsilon$  соответственно.

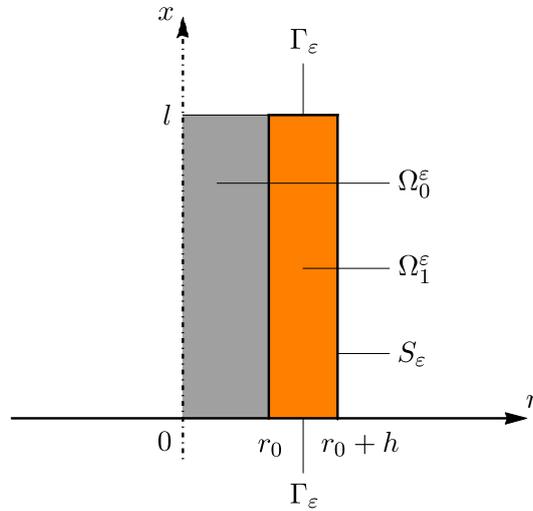


Рис. 1. Элемент загрузки  $\Omega_0^\varepsilon$  с биопленкой  $\Omega_1^\varepsilon$

Функции  $C^\varepsilon(\vec{z}, t)$  и  $M^\varepsilon(\vec{z}, t)$  удовлетворяют в  $\Omega_1^\varepsilon$  и на  $S_\varepsilon$  следующим уравнениям [10]:

$$\dot{C}^\varepsilon = D \cdot \Delta C^\varepsilon + F(t, C_\varepsilon) \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_\varepsilon} + k_0 C_\varepsilon = -k_1 (M_\varepsilon - k_2 C_\varepsilon)|_{S_\varepsilon}, \quad C_\varepsilon|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Для краткости в (1) и (2) аргументы функций опущены. Кроме того, на  $D_1, D_2$  также должно выполняться однородное условие Неймана. Уравнение (1) описывает диффузию бактерий в слое с учётом их гибели при увеличении концентрации. Оператор  $\Delta$  — оператор Лапласа

в цилиндрических координатах;  $F(t, C_\varepsilon)$  — нелинейная функция, отражающая влияние взаимодействия бактерий на их концентрацию;  $D$  — коэффициент диффузии;  $k_0, k_1, k_2$  — постоянные;  $\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}$  — производная по внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S_\varepsilon$ .

Следующая система описывает перенос примесей, количество которых мы хотим уменьшить с помощью биофильтра, по поверхности  $S_\varepsilon$  с переходом примесей в  $\Omega_1^\varepsilon$  [10]:

$$\begin{aligned} \dot{M}_\varepsilon &= \vec{v} \cdot \nabla M_\varepsilon + k_3(C_\varepsilon - k_4 M_\varepsilon), \quad \nabla = \frac{d}{dx}, \\ M_\varepsilon|_{\partial S_\varepsilon} &= M_0(\vec{z}), \quad M_\varepsilon|_{t=0} = M_0; \end{aligned} \quad (3)$$

$\partial S'_\varepsilon$  — часть верхней торцевой кромки стержня, где поле  $\vec{v}(\vec{z}, t)$  входит в неё. Здесь  $\Delta M_\varepsilon = \frac{dM_\varepsilon}{dx}$ , так как  $r$  постоянна на  $S_\varepsilon$ ;  $k_3, k_4, M_0$  — константы.

Для поставленной краевой задачи (1)–(3) нетрудно построить прямую разностную схему. Однако здесь следует отметить, что эта задача состоит из двух уравнений в частных производных, первое из которых параболическое, а второе гиперболическое. Причём эти уравнения заданы в областях разной размерности, уравнение (1) в трёхмерной области, а уравнение (3) — в двумерной. Вообще говоря, система этих уравнений нелинейна, и её корректность вызывает вопросы. Это новый и довольно интересный математический объект. Можно предположить, что при больших значениях времени биофильтр будет работать в стационарном режиме. В этом случае решение задачи не зависит от начального распределения концентрации бактерий, а зависит от плотности примесей, поступающих в верхнюю часть биофильтра.

В нашей задаче зависимость, заданная в граничных условиях (2), носит линейный характер. В этом случае значение концентрации примеси можно исключить из системы, решив в явном виде линейное уравнение для концентрации примесей  $M_\varepsilon(\vec{z}, t)$  при заданном значении концентрации  $C_\varepsilon(\vec{z}, t)$  в биопленке и подставив полученное выражение в граничное условие для функции  $C_\varepsilon(\vec{z}, t)$ . Результатом является нелокальное условие последействия интегрального типа, поскольку на поток через границу будут влиять прошлые значения концентрации в различных точках пространства. Это интересная с математической точки зрения краевая задача с интегральным «последействием». В этом случае влияние «прошлого» в данной точке границы определяется «прошлыми» значениями неизвестных функций не в этой точке, а в точках некоторой фазовой кривой некоторой динамической системы на двумерной поверхности. В настоящее время такие задачи ещё мало изучены. Чтобы исключить эти математические сложности, упростим нашу модель, используя дополнительное допущение, а именно, пусть длина отдельного чистящего стержня будет значительно (примерно в 100 раз) больше толщины биологически активной плёнки. Для рассматриваемого нами в данной работе метода водоочистки это предположение действительно верно. Так в задаче появляется малый параметр  $h$ ,  $h$  — толщина биопленки. Затем можно применить асимптотический метод анализа решений краевых задач в так называемых тонких областях [14]. В соответствии с этим методом мы переходим к пределу, когда толщина биопленки стремится к нулю. В результате размерность пространства независимых переменных уменьшается, и рассматриваемая нами краевая задача для стационарного режима распределения примеси сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Единственной независимой переменной в упрощённой модели является переменная  $x$  вдоль стержня. Такая упрощённая модель полностью описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и решение таких систем требует очень мало машинного времени при расчёте. Предлагаемая нами модель содержит миллионы описанных выше стержневых элементов водоочистки. Но даже несмотря на такое большое количество этих элементов расчёт в предлагаемой полной модели займёт несколько минут. Начальные условия для таких уравнений моделируются в зависимости от высотного слоя, на котором находится такой элемент. А именно, разделим весь биофильтр на горизонтальные

слои толщиной примерно один сантиметр в высоту. Начальные условия для уравнений, соответствующих элементам очистки воды в верхнем слое, определяются режимом поступления воды в биофильтр. Они устанавливаются заранее. Вода может течь неравномерно по площади поверхности. Исходным условием модели является распределение интенсивности поступления воды с примесями на верхнюю крышку биофильтра. Каждый элемент верхнего слоя передаёт частично очищенную жидкость на следующий слой. Эта жидкость распределяется между несколькими соседними точками входа элементов на следующий более высокий (нижний) слой. (Смежным элементом называется элемент, находящийся на некотором расстоянии, не превышающем заданного значения  $d$ .) Каждый элемент верхнего слоя делит определённым образом, например поровну, долю ещё не очищенных им примесей (а это и есть значения концентрации примесей на его нижнем конце) между входными верхними точками соседних элементов следующего (нижнего) слоя по высоте. Итак, очистка от примесей переходит на следующий по высоте слой. Наклоны элементов водоочистки (стержней) по отношению к вертикали можно моделировать как равномерно распределённые, а скорость движения смеси воды и воздуха через отдельные элементы выбирать в зависимости от наклона элемента к вертикальной оси.

Конечно, предложенный в данной работе метод моделирования процесса очистки воды далеко не единственный. Также возможно использование современных методов теории усреднения [15], с помощью которых можно описывать различные процессы в перфорированных (мелко вырезанных) областях посредством построения так называемых усреднённых или эффективных моделей. Уравнения для таких моделей задаются не в «мелко очерченной» области со сложной структурой, а в однородной области с простой структурой. Решения систем уравнений для усреднённой или эффективной моделей можно получить предельным переходом от решения для модели в перфорированной области по малому параметру, характеризующему размер микроструктуры перфорированной области. Также можно представить процесс водоочистки как случайное блуждание очень большого количества примесных частиц в перфорированной области. Сталкиваясь с границей, частицы примесей с некоторой вероятностью поглощаются, а также с некоторой вероятностью могут вновь появиться в водной среде. Работа над такими моделями сейчас ведётся, но требует анализа трёхмерных задач, что всегда представляет определённые трудности. В данной статье модель сводится к одномерным задачам, что значительно упрощает расчёты. Также возможно моделирование фильтрации водовоздушной смеси через пористую структуру путём построения усреднённой модели фильтрации. В результате следует рассчитать среднюю «эффективную» скорость фильтрации смеси вода с примесями-воздух. Однако создание и анализ такого рода не всегда оправданы с точки зрения построения полезной модели изучаемых процессов. Необходимо найти баланс между сложностью модели и её адекватностью. Предложенная в данной работе модель может, с нашей точки зрения, помочь в разработке фильтров на основе биологически активных плёнок, поскольку не требует решения сложных краевых задач в трёхмерных областях.

Опишем более подробно процедуру предельного перехода по толщине плёнки в исходной краевой задаче, приведённой в этом разделе, что упрощает модель за счёт сведения её к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД ПО ТОЛЩИНЕ ЭЛЕМЕНТА ВОДООЧИСТКИ

Для математического обоснования предлагаемого асимптотического метода разложения решения краевой задачи в тонкой области (см. рис. 2) нам потребуется следующая

**Теорема.** Пусть  $Z_h = [r_0, r_0 + h] \times [0, l]$ ,  $Z_h^\delta = Z_h \setminus \{(l - \delta, l) \cup (0, \delta)\} \times [r_0, r_0 + h]$ ;  $h, \delta$  —

малые положительные постоянные;  $C(x, r)$  — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} LC = 0 \text{ в } Z_h, \quad L \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \equiv L_r + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ \left( \frac{\partial C}{\partial r} + k_0 C_0 \right)_{r=r_0+h} = f(x), \\ \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=l} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда в области  $Z_h^\delta$  имеет место неравенство

$$\frac{1}{h} \left\| C(x, r) - \frac{f(x)}{k_0} \right\|_{L_2(Z_h^\delta)} \leq \text{const } h,$$

где  $\text{const} > 0$  не зависит от  $h$ .

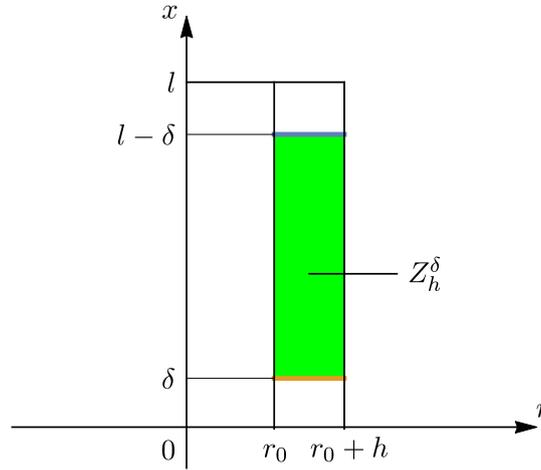


Рис. 2. Тонкая область зелёного цвета  $Z_h^\delta$

**Доказательство.** Задача (4) представляет собой смешанную краевую задачу для эллиптического уравнения в липшицевой области — прямоугольнике  $Z_h$ . Для оценки её решения и вопросов существования и единственности мы не можем непосредственно применить теорию эллиптических задач в области с гладкой границей. Однако в работе [16] построена теория таких краевых задач с липшицевыми границами области, доказаны существование и единственность решения, получены оценки решения через краевые условия. Из предложенного в [16] метода следует оценка решения смешанной краевой задачи через краевые условия в определённых функциональных пространствах. Исследуемая нами задача с условиями Неймана и смешанными граничными условиями тоже рассмотрена в [16].

Определим функцию

$$C^\delta(x, r) = C(x, r) - \frac{f(x)}{k_0} - \frac{f''(x)}{k_0} I(r),$$

где  $I(r)$  — вспомогательная функция, удовлетворяющая условиям

$$L_r I(r) = 1, \quad I(r_0) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0,$$

здесь  $L_r$  — радиальная часть оператора Лапласа. Очевидно, что

$$I(r) \equiv \frac{r^2 - r_0^2}{4} - \frac{r_0^2}{2} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Простое вычисление показывает, что функция  $C^\delta(x, r)$  удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=l} = \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0} = O(1), \quad \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=r_0} = o(h), \quad \left( \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} + k_0 C^\delta \right) \Big|_{r=r_0+h} = o(h).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для функции  $C^1(x, r)$  вида

$$\begin{aligned} LC^1(x, r) &= 0, \\ \frac{\partial C^1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=r_0} &= 0, \quad \frac{\partial C^1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial C^1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=l} = \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=l}, \\ \left( \frac{\partial C^1}{\partial \mathbf{n}} + k_0 C^1 \right) \Big|_{r=r_0+h} &= 0. \end{aligned}$$

Покажем, что функция  $C^1(x, r)$  имеет вид функции пограничного слоя, сосредоточенной вблизи отрезков  $\{l\} \times [r_0, r_0 + h]$ ,  $\{0\} \times [r_0, r_0 + h]$ , и в области  $Z_h^\delta$  заведомо удовлетворяет оценке

$$\frac{1}{h} \|C^1(x, r)\|_{L_2(Z_h^\delta)} \leq C h^2,$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $h$ . Введём для этого область  $\tilde{Z}_h = [r_0, r_0 + h] \times (0, \infty)$  (рис. 3)

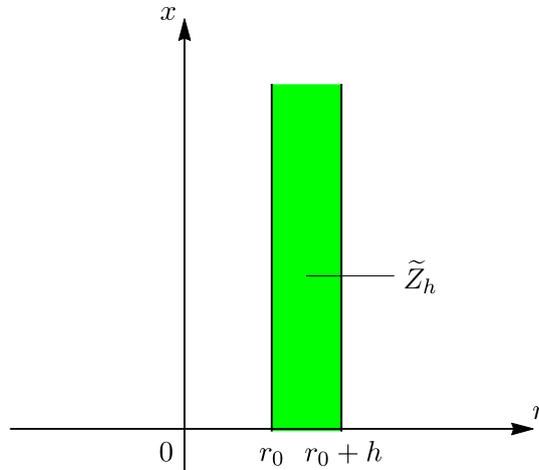


Рис. 3. Полубесконечная область  $\tilde{Z}_h$

и рассмотрим в этой полубесконечной области краевую задачу

$$\begin{aligned} L_r U &= 0 \quad \text{в } \tilde{Z}_h, \\ \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + k_0 U \right) \Big|_{r=r_0+h} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=r_0} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0}, \quad U \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Представим решение этой краевой задачи в виде ряда Фурье

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \varphi_n^h(r),$$

где  $\{\varphi_n^h(r)\}$  — собственные функции оператора  $L_r$  на отрезке  $[r_0, r_0 + h]$  с нулевыми краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial(\varphi_n^h(r))}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial \varphi_n^h(r)}{\partial r} + k_0 \varphi_n^h(r) \right) \right|_{r=r_0+h} = 0,$$

нормированные в  $L_2(r_0, r_0 + h)$ .

Обозначим через  $\{\lambda_n(h)\}$  соответствующие этим собственным функциям собственные значения. Используя хорошо известные результаты спектральной теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, можно показать, что  $\lambda_n(h) \rightarrow -\infty$  при  $h \rightarrow 0$  и  $|\lambda_n(h)| \sim 1/h^2$  при  $h \rightarrow 0$ , поэтому  $|v_n(x)| \leq c \exp(-\alpha x/h)$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$ . Дифференциальное уравнение второго порядка для  $v_n(x)$  имеет экспоненциально растущее и экспоненциально убывающее решения. Первое нам не подходит, так как возрастающее решение дифференциального уравнения для  $v_n$  противоречит условию  $U \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Отсюда видно, что  $U$  имеет вид пограничного слоя, сосредоточенного вблизи отрезка  $\{0\} \times [r_0, r_0 + h]$ . Аналогичное рассуждение можно привести и для отрезка  $\{l\} \times [r_0, r_0 + h]$ . Здесь требуется построить пограничный слой  $V$ , стремящийся к нулю при  $x \rightarrow -\infty$  в области  $\tilde{Z}_h^1 = [r_0, r_0 + h] \times [-\infty, l]$  (рис. 4).

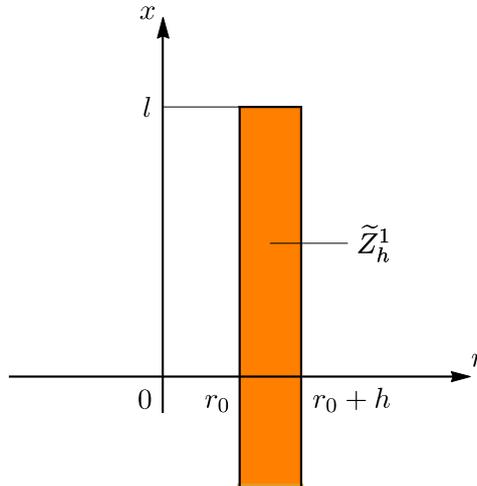


Рис. 4. Полубесконечная область  $\tilde{Z}_h^1$

Тогда  $\frac{1}{h} \|C^\delta - U - V\|_{L_2(Z_h^\delta)} \leq \text{const } h$  и, в силу погранслоевых оценок на  $U$  и  $V$  в  $Z_h^\delta$ ,  $\frac{1}{h} \|C^\delta\|_{L_2(Z_h^\delta)} \leq \text{const } h$ . Отсюда следует утверждение теоремы.  $\square$

#### 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Теперь, пользуясь утверждением теоремы, мы можем реализовать в стационарном случае асимптотический подход, существенно упрощающий решение исходной задачи. Оказывается, что первое приближение по параметру  $h$  построить несложно, для него несущественны величина диффузии и потенциал в (1), а основную роль играет граничное условие на поверхности.

Действительно, рассмотрим уравнение системы (1) в стационарном случае (когда производные по времени равны нулю) с граничным условием

$$\left( \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial r} + k_0 C_\varepsilon \right) \Big|_{r=r_0} = \Phi(x) \quad \text{на } S_\varepsilon.$$

Согласно теореме из разд. 3 для  $C_\varepsilon(r, x)$  при  $h \rightarrow 0$  имеет место следующее приближение:

$$C_\varepsilon^1(r, x) = \frac{\Phi(x)}{k_0} + \frac{\Phi''(x)}{k_0} I(r). \quad (5)$$

Заметим, что для приближения  $C_\varepsilon^1(r, x)$  граничное условие на  $S_\varepsilon$  выполняется с точностью  $O(h)$ , условие на  $\Gamma_\varepsilon$  выполняется точно, условия на поверхностях  $D_1, D_2$  не выполняются. Уравнение (1) для  $C_\varepsilon^1(r, x)$  выполняется точно. (Для простоты мы здесь рассматриваем  $F \equiv 0$ , но нетрудно рассмотреть и более общий случай, когда функция  $F$  не равна тождественно нулю.) Слагаемое  $\frac{\Phi''(x)}{k_0} I(r)$  в (5) имеет порядок  $O(h^2)$ , поэтому

$$C_\varepsilon^1(r, x) \sim \Phi(x)/k_0 \quad (6)$$

с точностью порядка  $O(h)$  при  $h \rightarrow 0$ . Таким образом, если указанное приближённое значение для  $C_\varepsilon(r, x)$  из (6) подставить в дифференциальное уравнение системы (3), то для предложенного приближения компоненты решения  $M(x)$  из (3) при малом значении  $h$  получим простое обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dM(x)}{dx} = -v^{-1} g \left[ M(x), f(M(x)) \right] \quad (7)$$

с начальным условием  $M(0) = m_0$ . Здесь  $f, g$  — явно заданные функции, конкретный вид которых определяется исходной постановкой задачи. Если  $f$  и  $g$  — линейные функции, то это уравнение (7) решается в явном виде, а если  $f$  и  $g$  — функции общего вида, то уравнение можно быстро и с высокой точностью решить на ЭВМ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы предлагаем модель процесса очистки воды с помощью биопленки, которая просто реализуется в виде вычислительной программы. Такая модель может быть использована в расчёте параметров фильтра водоочистки так, чтобы достигалась определённая производительность водоочистки и уровень вредных примесей в воде на выходе из фильтра не превышал заданного значения. Таким образом, данная модель может быть использована для решения оптимизационной задачи выбора различных параметров установки водоочистки с соответствующими ограничениями на производительность и качество очистки воды.

Авторы глубоко признательны профессору А. Л. Пятницкому за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хенце М., Армоэс П., Ля-Кур-Янсен Й., Арван Э. Очистка сточных вод. М.: Мир, 2006.
2. Bitton G. Wastewater Microbiology. N. Y.: Wiley-Interscience, 2005.
3. D'Acunto B., Frunzo L., Mattei M. R. Continuum approach to mathematical modelling of multispecies biofilms // Ricerche di Matematica. 2017. V. 66. P. 153–169; <https://doi.org/10.1007/s11587-016-0294-8>
4. Boltz J. P., Mongenroth E., Sen D. Mathematical modelling of biofilms and biofilm reactors for engineering design // Water Sci. Technology. 2010. V. 62. P. 1821–1836; <https://doi.org/10.2166/wst.2010.076>

5. Guo C.M., Chen J.F., Zhang Z.Z., Zhao L.J. Mathematical model of biofilm reactor treating industrial wastewater – a review // *Adv. Materials Res.* 2011. V. 356-360. P. 1739–1742; <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.356-360.1739>
6. Wanner O., Reichert R. Mathematical modelling of mixed-culture biofilms // *Biotechnol. Bioengr.* 1996. V. 48. P. 172–184; [doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0290\(19960120\)49:2<172::AID-BIT6>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0290(19960120)49:2<172::AID-BIT6>3.0.CO;2-N)
7. Alpkvist E., Klapper I.Yu. A multidimensional multispecies continuum model for heterogeneous biofilm development // *Bull. Math. Biol.* 2007. V. 69, N 2. P. 765–789; <https://doi.org/10.1007/s11538-006-9168-7>
8. D’Acunto B., Frunzo L., Mattei M. R. Qualitative analysis of the moving boundary problem for a biofilm reactor model // *Math. Anal. Appl.* 2016. V. 438. P. 474–491; <https://doi.org/10.1016/J.JMAA.2016.02.008>
9. Masic A., Eberl H. J. A modeling and simulation study of the role of suspended microbial populations in nitrification in a biofilm reactor // *Bull. Math. Biol.* 2014. V. 76. P. 27–58; <https://doi.org/10.1007/s11538-013-9898-2>
10. Олейник А.Я., Василенко Т.В., Рыбаченко С.А., Хамад И.А. Моделирование процессов доочистки хозяйственно-бытовых сточных вод на фильтрах // *Проблемы водопостачання, водовидведення та гидравлики.* 2006. Т. 7. С. 85–97.
11. Christiansen R., Hollesen L., Harremoës R. Liquid film diffusion of reaction rate in submergen biofilters. // *Water Res.* 1995. V. 29, N 1. P. 947–952; [https://doi.org/10.1016/0043-1354\(94\)00206-m](https://doi.org/10.1016/0043-1354(94)00206-m)
12. Taylor S.V., Milly P.C.D., Jaffe P. R. Biofilm growth and the related changes in the physical properties of a porous medium // *Water Resources Res.* 1990. V. 26, N 9. P. 2161–2169; <https://doi.org/10.1029/WR026i009p02153>
13. Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука, 1983.
14. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Новосибирск: Научн. книга, 2002.
15. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
16. Агранович М.С. Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка // *Функц. анализ и его прил.* 2011. Т. 45, № 2. С. 1–22; <https://doi.org/10.4213/faa3039>

UDC 628.35

**MATHEMATICAL MODEL OF THE WASTEWATER TREATMENT  
PROCESS USING BIOFILM**© 2023 T. N. Bobyleva,<sup>1a</sup>, A. S. Shamaev,<sup>2b</sup>, O. V. Yantsen<sup>3,4c</sup><sup>1</sup>*Moscow State University of Civil Engineering,  
Yaroslavskoye Shosse 26, Moscow 129337, Russia,*<sup>2</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,  
Pr. Vernadskogo 101-1, Moscow 119526, Russia,*<sup>3</sup>*Scientific and Technical Center, LLC «VT Expert»,  
ul. Samora Mashela 2a, Moscow 117198, Russia,*<sup>4</sup>*Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting,  
ul. Miklukho-Maklaya 23, Moscow, 117485, Russia*E-mails: <sup>a</sup>tatyana2211@outlook.com, <sup>b</sup>sham@rambler.ru, <sup>c</sup>yantsenov@bk.ru

Received 26.08.2022, revised 20.11.2022, accepted 12.01.2023

**Abstract.** The article proposes a mathematical model of wastewater treatment based on the use of biofilm; whose microorganisms destroy harmful impurities contained in water. For microorganisms, impurities are "food". A system of partial differential equations with boundary conditions is given. A system of partial differential equations with boundary conditions is given for one loading element, which is a cylindrical rod whose surface is covered with a biologically active film. This system includes a parabolic equation in a three-dimensional domain and a hyperbolic equation on a part of the surface of this domain connected to each other through a boundary condition and a potential in a hyperbolic equation. Further, an asymptotic analysis of this system is carried out, which makes it possible to reduce the model of an individual element to the solution of a simple ordinary differential equation, and a strict mathematical justification of this method is given. In this case, a mathematical method is used to construct asymptotics in the so-called «thin regions». The proposed method is a simplification of a complex combined model based on the laws of hydrodynamics and diffusion. On this basis, a model of the operation of the entire wastewater treatment device containing a large (millions) of such elements is proposed.

**Keywords:** water treatment, biologically active layer, asymptotic analysis of solutions in a thin region, mathematical model of impurity treatment, systems of partial differential equations of mixed type.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.203

## REFERENCES

1. Henze M., Harremoës P., La Cour J.J., E. Arvin E. Wastewater Treatment. Biological and Chemical Processes. Berlin: Springer-Verl., 1997.
2. Bitton G. Wastewater Microbiology. N. Y.: Wiley-Interscience, 2005.
3. D'Acunto B., Frunzo L., Mattei M. R. Continuum approach to mathematical modelling of multispecies biofilms. *Ricerche di Matematica*, 2017, Vol. 66, pp. 153–169; <https://doi.org/10.1007/s11587-016-0294-8>
4. Boltz J. P., Mongenroth E., Sen D. Mathematical modelling of biofilms and biofilm reactors for engineering design. *Water Sci. Technology*, 2010, Vol. 62, pp. 1821–1836; <https://doi.org/10.2166/wst.2010.076>

5. Guo C.M., Chen J.F., Zhang Z.Z., Zhao L.J. Mathematical model of biofilm reactor treating industrial wastewater – a review. *Adv. Materials Res.*, 2011, Vol. 356-360, pp. 1739–1742; <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.356-360.1739>
6. Wanner O., Reichert R. Mathematical modelling of mixed-culture biofilms. *Biotechnol. Bioengr.*, 1996, Vol. 48, pp. 172–184; [doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0290\(19960120\)49:2<172::AID-BIT6>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0290(19960120)49:2<172::AID-BIT6>3.0.CO;2-N)
7. Alpkvist E., Klapper I.Yu. A multidimensional multispecies continuum model for heterogeneous biofilm development. *Bull. Math. Biol.*, 2007, Vol. 69, No. 2, pp. 765–789; <https://doi.org/10.1007/s11538-006-9168-7>
8. D’Acunto B., Frunzo L., Mattei M. R. Qualitative analysis of the moving boundary problem for a biofilm reactor model. *Math. Anal. Appl.*, 2016, Vol. 438, pp. 474–491; <https://doi.org/10.1016/J.JMAA.2016.02.008>
9. Masic A., Eberl H. J. A modeling and simulation study of the role of suspended microbial populations in nitrification in a biofilm reactor // *Bull. Math. Biol.* 2014. V. 76. P. 27–58; <https://doi.org/10.1007/s11538-013-9898-2>
10. Oleinik A.Ya., Vasilenko T.V., Rybachenko S.A., Khamad I.A. Modelirovanie protsessov doochistki khozyaistvenno-bytovykh stochnykh vod na fil'trakh [Modeling of post-treatment processes of household wastewater on filters]. *Probl. Vodopostachannya, Vodovidvedennya ta Gidravliki*, 2006, Vol. 7, pp. 85–97 (in Russian).
11. Christiansen R., Hollesen L., Harremoes R. Liquid film diffusion of reaction rate in submergen biofilters. *Water Res.*, 1995, Vol. 29, No. 1, pp. 947–952; [https://doi.org/10.1016/0043-1354\(94\)00206-m](https://doi.org/10.1016/0043-1354(94)00206-m)
12. Taylor S.V., Milly P.C.D., Jaffe P. R. Biofilm growth and the related changes in the physical properties of a porous medium. *Water Resources Res.*, 1990, Vol. 26, No. 9, pp. 2161–2169; <https://doi.org/10.1029/WR026i009p02153>
13. Vavilin V.A. Nelineinye modeli biologicheskoi ochistki i protsessov samoochishcheniya v rekakh [Nonlinear models of biological purification and self-purification processes in rivers]. Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
14. Nazarov S.A. Asimptoticheskaya teoriya tonkii plastin i sterzhnei [Asymptotic theory of thin plates and rods]. Novosibirsk: Nauchn. Kniga, 2002 (in Russian).
15. Oleinik O.A., Iosif’yan G.A., Shamaev A.S. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. North-Holland: Elsevier, 1992; eBook ISBN: 9780080875477
16. Agranovich M.S. Mixed problems in a Lipschitz domain for strongly elliptic second-order systems. *Funct. Anal. Appl.*, 2011, Vol. 45, No. 2, pp. 81–98; <https://doi.org/10.1007/s10688-011-0011-z>