УДК 539.376

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЧИСТОГО ИЗГИБА БАЛКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2023 **С. В. Бойко**[a], **А. Ю. Ларичкин**[b]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]boykosv.hydro@gmail.com, [b]larichking@gmail.com

Поступила в редакцию 03.05.2022 г.; после доработки 27.10.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Предложен алгоритм для решения обратной задачи формообразования элементов конструкций в условиях ползучести с применением метода оптимизации Нелдера — Мида. В рассмотренном методе исходная задача (поиск усилий, которые необходимо приложить, чтобы получить требуемую кривизну детали) сводится к последовательному решению вспомогательных прямых задач моделирования напряжённо-деформированного состояния чистого изгиба балок прямоугольного сечения. Модель, учитывающая различие свойств материала на растяжение и сжатие, наличие накопленных повреждений в материале в процессе ползучести, была проверена численными методами и внедрена в конечно-элементный пакет MSC.Marc.

Ключевые слова: прямоугольная балка, обратная задача, изгиб, ползучесть, разрушение, параметр поврежденности, разносопротивляемость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.204

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей в авиа-, машино- и кораблестроении является сохранение свойств материала на стадии изготовления элементов конструкций и их оптимизации — уменьшении веса при сохранении эксплуатационных характеристик. Оребрённые панели различной кривизны используются в технике из-за своих пониженных весовых характеристик при достаточной прочности конструкции [1, 2]. Панель имеет оребрение в виде двух пересекающихся систем рёбер. Рёбра изготовливаются при помощи механической обработки изначально сплошной плиты. Данную панель изготавливают при помощи фрезерования из толстых плит. Получение тонкостенных оребрённых панелей методами фрезерования может привести к деформации всей панели из-за действия остаточных сжимающих напряжений. Напряжения возникают по причине удаления фрезой металла с поверхностей плиты. В связи с этим возникает класс задач о создании упреждающей оснастки или приложения системы сил для придания изогнутой панели целевой формы.

Для панелей крыла летательных аппаратов и элементов фюзеляжа применяют процесс формообразования панелей в режиме ползучести при температуре старения [1]. Например, для получения элементов конструкций самолётов Airbus 330 и 340 [1] придавали кривизну стрингерам при помощи кручения и изгиба. После формовки в цилиндрическую поверхность прямоугольной пластины из алюминиевого сплава 7075 (аналог отечественного сплава В95 на базе Al-Cu-Mg) при температуре 180 °C, изготавливаемая деталь испытывала около 70% упругого возврата, который авторы работы связали с остаточными напряжениями. Авторы предложили метод для избежания больших упругих возвратов детали на габаритных изделиях сложной геометрии: отдельно формовать рёбра и исходную безреберную панель, а затем соединять их между собой при помощи сварки.

Для моделирования в конечно-элементном пакете ABAQUS процесса формообразования вафельных и изогридных пластин из алюминиевого сплава AA2219 (аналог сплава 1201 на базе Al-Cu) при температуре старения 175 °C использовалась математическая модель с семью уравнениями состояния, имеющая 17 констант для описания поведения материала [3]. Закон ползучести приведён в виде гиперболического синуса. В работе использовался закон связи напряжений со скоростью деформаций ползучести в виде гиперболического синуса. Авторы установили, что в экспериментах деталь испытывает распружинивание от 12,2% (на изогридной пластине) и до 15,7% (на вафельной).

Получить оребрённую панель сложной геометрии можно при помощи формовки толстой плиты в режимах ползучести с помощью перестраиваемого стержневого пуансона (матрицы), который позволяет за один технологический цикл получать целевую форму из заготовки [4]. После формовки толстой плиты проводится её фрезерование для получения оребрённой панели. Для моделирования процесса формовки толстой плиты задаётся закон перемещения каждого стержня оснастки, чтобы получить упреждающую форму панели. Варьируя температурный режим формовки, свойства материала и способы деформирования, можно уменьшить величину отклонения панели при разгрузке. В [4] формулируется обратная задача формообразования для определения закона перемещения стержней перестраиваемого пуансона. Стержни задавали упреждающую кривизну матрицы для панели двойной кривизны центроплановой части самолёта. Авторами был построен итерационный метод решения задачи относительно неизвестных перемещений точек поверхности панели по целевой кривизне.

Расчёт напряжённо-деформированного состояния монолитных и оребрённых конструкций требует больших численных затрат ввиду сложности геометрии конструкции [5–7]. Для упрощения расчёта геометрии можно рассматривать отдельные части изделия и для каждой из них определять кривизны, после чего изгиб всей детали в целом [8]. В качестве методов исследования чаще всего используются приближённые, в которых учитываются геометрические данные образцов и свойства материалов, а также численные методы с использованием конечно-разностных схем и метода конечных элементов (МКЭ).

Для моделирования формовки сложных панелей в режимах ползучести нужно уметь использовать приближённые методы формообразования составляющих панелей элементов конструкции — балок и тавров [9]. Простейшая конструкция для исследования изгибных деформаций — балка [10–15]. Конструкционные материалы обладают различием в деформационных и прочностных свойствах при растяжении и сжатии. Параметры ползучести и длительность до разрушения могут различаться в несколько раз [12]. Численные расчёты на ползучесть и длительную прочность изгибаемого бруса прямоугольного сечения при установившейся стадии ползучести с учётом различных свойств при растяжении и сжатии материла сводятся к решению системы дифференциальных уравнений относительно деформации, работы рассеяния [12], а также поврежденности [15–19]. Использование модели ползучести для описания различных свойств на растяжение и сжатие позволяет добиться удовлетворительного соответствия расчётов и данных эксперимента [19]. В [19] авторами представлено решение трёхмерных задач для металлических пластин в условиях ползучести под действием постоянных сосредоточенных сил, приложенных в её углах. В работе предложен алгоритм определения компонент тензора напряжений, реализованный в конечно-элементном пакете PIONER (разработка ИГиЛ СО РАН) для определяющих соотношений ползучести с учётом разных свойств материала при растяжении и сжатии.

Для описания ползучести в качестве определяющих соотношений также используются дробно-степенные функции [20]. Авторами рассматривалась задача изгиба круглых балок в режимах ползучести [20] и проводилось сравнение с результатами расчёта изгиба прямоугольных балок. На эпюрах распределений безразмерных напряжений при различных значениях показателя ползучести установлено, что величина напряжений по абсолютному значению больше

для круглого сечения, так как основную часть нагрузки выдерживают волокна, наиболее удалённые от нейтральной плоскости.

Процедура численного расчёта упругой балки с асимметричным поперечным сечением рассмотрена в [21]. Балка таврового сечения подвергается изгибающему моменту. Материал балки подчиняется реологической модели упруго-линейного упрочнения. Деформации описываются как функция вращения и сдвига нейтральной оси и кривизны балки. В процессе изгиба учитывается влияние локальной нагрузки при монотонном её уменьшении. Результаты расчётов подтверждают сильное влияние нагрузки на конечное и упругое вращение нейтральной оси, её смещение и кривизну балки. Отметим, что свойства ползучести не учитываются.

Помимо процесса ползучести особую важность имеет повреждаемость материала, которая может существенно влиять на точность изготовления элементов конструкций. Используя теорию ползучести для случая одноосного напряжённого состояния, можно описать изменение структуры материала вследствие накопления в нём повреждений [8]. Этот подход позволяет оценивать поврежденность конструкции вплоть до разрушения. Распространён энергетический вариант [11, 12], в котором за меру интенсивности процесса ползучести принята величина мощности рассеяния, а за меру накопленных повреждений — работа рассеяния. Работа [15] является развитием энергетического варианта теории ползучести [11, 12]. Авторами предложена феноменологическая модель ползучести, виброползучести и длительной прочности энергетического типа. Рассмотрен общий случай реологического состояния материала, включающий деформации упругости, пластичности, ползучести, процессы рассеянного накопления поврежденности и разрушения. Также существует так называемая теория обобщённого континуума [13], в которой распределение повреждений в материале описывается либо при помощи скалярных параметров поврежденности, либо при помощи тензорных характеристик различного ранга.

Фундаментальное описание явления ползучести представлено в монографии [14]. В ней приведены решения задач изгиба балок, пластин, оболочек и представлены подходы к описанию ползучести и накопления повреждений при сложном напряжённом состоянии. В частности, получены решения задачи чистого изгиба балок в режимах ползучести с учётом различных свойств на растяжение и сжатие, а также повреждаемости материала. Зависимость скорости ползучести и скорости изменения сплошности от напряжений принимается в виде дробно-степенных функций. Приводится решение с учётом фронта разрушения.

Цель данной работы — показать учёт влияния свойств ползучести и поврежденности материала при моделировании процесса формообразования элементов конструкций, получить решение обратной задачи формообразования по определению изгибающих моментов, которые позволяют достигнуть целевую форму детали.

1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

При решении обратной задачи формообразования элементов конструкций при чистом изгибе балки необходимо определить, какой изгибающий момент M прикладывать к балке во время процесса деформации в ползучести, чтобы при разгрузке в момент времени t получить целевую кривизну $\varkappa$. В настоящей статье решение этой задачи сводится к решению последовательных прямых задач формообразования.

Рассмотрим прямую задачу о деформировании и разрушении балки прямоугольного сечения с высотой h, шириной b и длиной l_0 в условиях действия изгибающего момента. Необходимо определить кривизну балки по заданному изгибающему моменту M. Момент M параллелен оси Ox.

Процесс ползучести материала описывается уравнением вида

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_+}{dt} &= (B_1|\sigma|^{n_1-1}\sigma)/\big(A_1^* - A\big)^{m_1}, \quad \sigma > 0 \quad \text{(при растяжении)};\\ \frac{d\varepsilon_-}{dt} &= (B_2|\sigma|^{n_2-1}\sigma)/\big(A_2^* - A\big)^{m_2}, \quad \sigma \leqslant 0 \quad \text{(при сжатии)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(y,t)$ — деформации балки в момент времени t по высоте балки y; $\sigma = \sigma(y,t)$ — напряжения в момент времени t по высоте балки y; $B_1, n_1,\ A_1,\ A_1^*,\ m_1,\ B_2,\ n_2,\ A_2,\ m_2,\ A_2^*$ — характеристики материала в процессе ползучести.

Считая справедливой гипотезу плоских сечений и то, что в процессе ползучести изгибаемой балки происходит смещение нейтральной поверхности вследствие разносопротивляемости материала растяжению и сжатию, имеем

$$\sigma(y,t)/E + \varepsilon(y,t) = \varkappa(y + \delta(t)), \tag{2}$$

где E — модуль упругости материала; $\delta(t)$ — расстояние между срединной поверхностью и нейтральной поверхностью в момент времени t; y — координата по высоте балки с началом в срединной поверхности; $\varkappa = \varkappa(y,t)$ — кривизна балки в момент времени t.

Уравнения равновесия балки имеют вид

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} b\sigma(y+\delta)\,dy = M, \qquad \int\limits_{-h/2}^{h/2} b\sigma\,dy = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (3) с учётом (2) имеем выражения для определения кривизны и напряжений в балке:

$$\varkappa = M/(EJ_\delta) + \frac{1}{J_\delta}\int\limits_{-h/2}^{h/2} b\varepsilon(y+\delta)\,dy, \quad \sigma = [M/J_\delta + (E/J_\delta)(b\varepsilon(y+\delta))](y+\delta) - E\varepsilon,$$

где $J_\delta = b(h^3/12 + h\delta^2)$ — момент инерции балки прямоугольного сечения.

Положение между срединной поверхностью и нейтральной поверхностью определяется из условия отсутствия нормальных усилий в сечении бруса (3): $\delta = -\dfrac{1}{\varkappa h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \varepsilon\,dy$.

Таким образом, решение системы (1) сводится к двум интегродифференциальным уравнениям относительно деформации ε и удельной работы рассеяния A.

В качестве начального напряжённо-деформированного состояния принимаем упругое. Значение деформации ε и работы рассеяния A в начальный момент в каждом волокне сечения принимаем нулевое.

1.1. Численный метод решения

Задача решается численным методом Рунге — Кутты — Мерсона [22]. Сечение балки разбивается на k равных интервалов, $i = 0, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{+i}}{dt} &= \big(B_1\sigma_i^{n_1}\big)/\big(A_1^* - A_i\big)^{m_1}, \quad \sigma > 0 \quad \text{(при растяжении)};\\ \frac{dA_{-i}}{dt} &= \big(B_2\sigma_i^{n_2}\big)/\big(A_2^* - A_i\big)^{m_2}, \quad \sigma \leqslant 0 \quad \text{(при сжатии)};\\ \frac{d\varepsilon_i}{dt} &= \frac{1}{\sigma_i}\Big/\frac{dA_i}{dt}. \end{aligned} \tag{4}$$

Заменяя интегралы конечными суммами по формуле Симпсона [23], получаем выражения для определения кривизны оси балки $\varkappa$ и положения между срединной поверхностью и нейтральной поверхностью δ:

$$\varkappa = M/[EJ_\delta] + [(bd)/(3J_\delta)][\varepsilon_{k-1}(y_{k-1}+\delta) + 4\varepsilon_k(y_k+\delta) + \varepsilon_{k+1}(y_{k+1}+\delta)], \tag{5}$$

$$\delta = -\frac{d}{3\varkappa h}[\varepsilon_{k-1}(y_{k-1}+\delta) + 4\varepsilon_k(y_k+\delta) + \varepsilon_{k+1}(y_{k+1}+\delta)]. \tag{6}$$

Здесь d — длина интервала разбиения, y_i — значение высоты в i-й точке разбиения.

Алгоритм решения задачи определения напряжённо-деформирования состояния балок прямоугольного сечения для разносопротивляющегося материала с учётом повреждаемости $\omega = \varepsilon/\varepsilon_* = A/A_*$ реализован в виде программного модуля в пакете Visual Studio на языке C++.

1.2. Результаты численного расчёта для балки прямоугольного сечения

Моделирование процесса деформирования прямоугольной балки проводилось для алюминиевого сплава АК4-1 при температуре 200 °C под действием изгибающего момента $M = 154.94$ Нм. Материал изотропен. Его параметры упругости при растяжении и сжатии: $E = 70000$ МПа. Параметры материала в процессе ползучести приведены в таблице.

Характерной особенностью кривых ползучести для алюминиевого сплава АК4-1 является отсутствие первой стадии неустановившейся ползучести. С самого начала нагружения начинается накопление повреждений ω ($\omega(0) = 0$, $\omega(1) = 1$) в материале, скорость деформаций ползучести растёт в процессе испытания вплоть до разрушения образца.

Параметры материала АК4-1Т [24]

Вид испытаний	B, (МПа)$^{m-n+1}$ ч$^{-1}$	n	m	A_*, МДж/мм^3
Растяжение	$B_1 = 6.37 \cdot 10^{-13}$	$n_1 = 7$	$m_1 = 7$	$A_{*1} = 10$
Сжатие	$B_1 = 2.84 \cdot 10^{-15}$	$n_2 = 8$	$m_2 = 2$	$A_{*2} = 10$

На рис. 1 представлено распределение повреждений по сечению балки y. При $A_* = 10$ МДж/мм^3 повреждаемость в крайнем волокне балки $\omega = A/A_* = 1$, т. е. процесс шёл вплоть до разрушения.

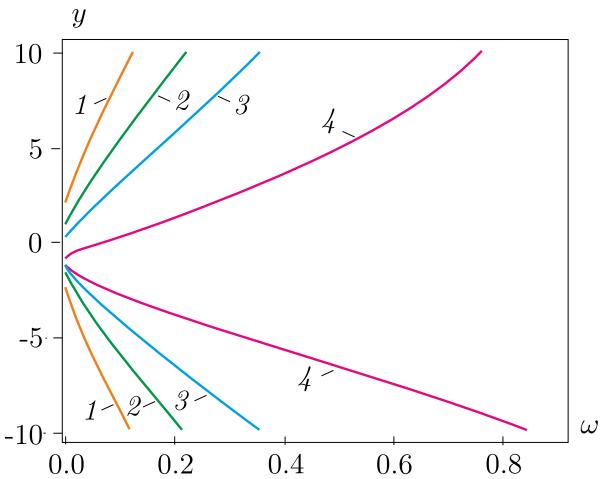

Рис. 1. Распределение повреждений по сечению балки y в различные моменты времени: $t = 136$ ч (кривая *1*); $t = 272$ ч (кривая *2*); $t = 408$ ч (кривая *3*); $t = 544$ ч (кривая *4*)

На рис. 2 показано распределение напряжений σ по сечению балки. На рис. 2(а) в качестве иллюстраций приведены эпюры распределения напряжения в различные моменты времени

$t = 0$; 136; 410; 537; 547 ч (кривые *1–5* соответственно). Имеет место смещение нейтральной поверхности — красные круги. Штрих-пунктирной окружностью обозначена координата характеристической точки на высоте балки, в которой не происходит перераспределение напряжений [24].

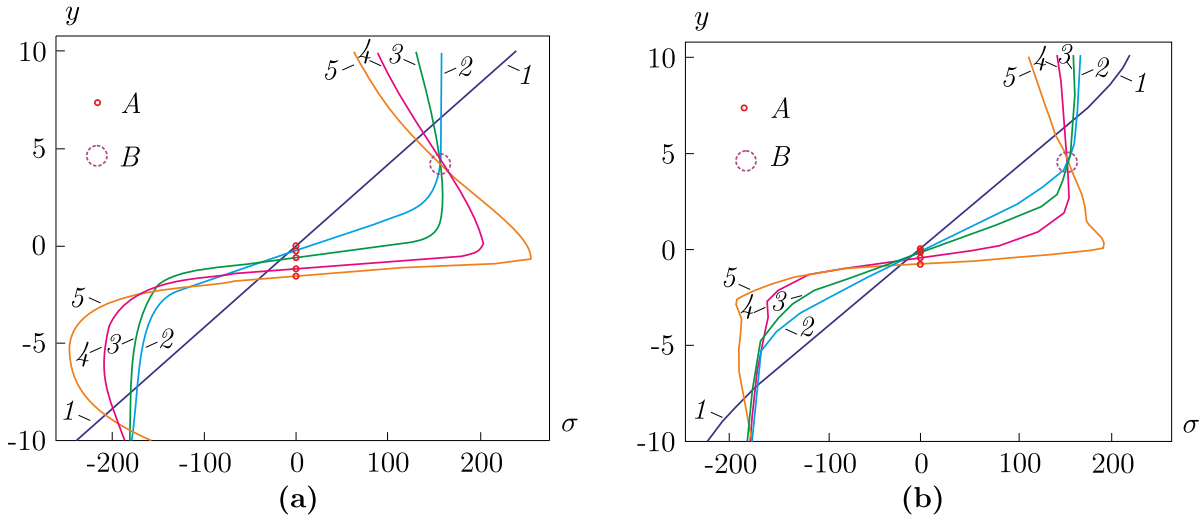

Рис. 2. Распределение напряжений σ по сечению балки в различные моменты времени;
(a): $t = 0$ ч (кривая *1*); $t = 136$ ч (кривая *2*); $t = 410$ ч (кривая *3*);
$t = 537$ ч (кривая *4*); $t = 547$ ч (кривая *5*);
(b): $t = 1$ ч (кривая *1*); $t = 49$ ч (кривая *2*); $t = 101$ ч (кривая *3*);
$t = 349$ ч (кривая *4*); $t = 564$ ч (кривая *5*);
A — координата нейтральной поверхности; B — характеристическая точка

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПАКЕТЕ MSC.MARC

2.1. Теория и алгоритмы решения

Для более полного анализа задачи о чистом изгибе балки рассматривается трёхмерная модель для формообразования балок прямоугольного сечения в процессе ползучести с использованием пакета MSC.Marc [25, 26].

При численном решении трёхмерных задач деформирования тел в режиме ползучести проводится пространственная дискретизация уравнений механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ) и их дискретизация по времени. Методом аппроксимации уравнений по пространственным координатам для произвольных форм является МКЭ, который основан на интегральной форме дифференциальных уравнений.

Вычисляя интегралы по областям, которые относятся к конечному элементу, необходимо определить компоненты тензора напряжений в точках интегрирования по квадратурным формулам Гаусса — Лежандра.

В данной работе представлены алгоритмы вычисления компонент тензора напряжений при развитии процесса во времени с использованием определяющих соотношений ползучести материалов, имеющих разные свойства при растяжении-сжатии [19] и с учётом повреждаемости материала. Все эти алгоритмы реализованы в пакете MSC.Marc в подпрограмме crplaw.f.

Для использования модели ползучести, где учитывается различие свойств материала на растяжение и сжатие, необходимо применять явную схему интегрирования уравнений ползучести, что влечёт ограничение на размер шага по времени [19].

Закон, связывающий компоненты приращения тензора деформаций ползучести e_{ij}^{cr} с компонентами тензора-девиатора напряжений $\Delta e_{ij}^{\mathrm{cr}} = [(3\Delta\bar{e}^{\mathrm{cr}}/2\sigma_e)]s_{ij}$, реализован в явной формулировке определения деформаций ползучести в пакете MSC.Marc при пошаговом интегрировании уравнений равновесия. Здесь $\sigma_e \equiv \sqrt{\frac{3}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{3} s_{kl}s_{kl}}$ — эффективное напряжение, $s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\left(\sum\limits_{i=1}^{3}\sigma_{ii}\right)\delta_{ij}$.

Требуется определить приращение эффективной деформации ползучести $\Delta\bar{e}^{\mathrm{cr}}$ через известное решение задачи в момент времени t в некоторой точке интегрирования конечного элемента.

Вводится функциональная зависимость вида $\Delta\bar{e}^{\mathrm{cr}} = f(\sigma_{ij})\Delta t$ [19, 27], где $f(\sigma_{ij})$ — заданная скалярная функция тензорного аргумента; Δt — шаг по времени.

В программе MSC.Marc в user subroutine crplaw.f [28] реализован следующий алгоритм [19]:

1) вводятся константы ползучести B_1, n_1, B_2, n_2;

2) определяется среднее напряжение $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$;

3) определяются компоненты тензора-девиатора напряжений s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{12}, s_{13}, s_{23};

4) вычисляется эффективное напряжение;

5) определяется наличие или отсутствие деформаций ползучести: если $\sigma_e \leqslant 10^{-16}$, то деформации ползучести отсутствуют $\Delta\bar{e}^{\mathrm{cr}} = 0$ и происходит выход из программы crplaw.f; если $\sigma_e > 10^{-16}$, то деформации ползучести присутствуют и продолжается вычисление $\Delta\bar{e}^{\mathrm{cr}}$;

6) вычисляется третий инвариант тензора-девиатора напряжений

$$J_3(s_{ij}) = \det(s_{ij}) = s_{11}s_{22}s_{33} + 2s_{12}s_{13}s_{23} - s_{22}s_{13}^2 - s_{11}s_{23}^2 - s_{33}s_{12}^2;$$

7) находится величина $\sin(3\theta) = -\frac{27}{2}J_2(s_{ij})/(\sigma_e^3(s_{ij}))$, где $J_2(s_{ij})$ — второй инвариант тензора-девиатора напряжений;

8) находится приращение эффективной деформации ползучести

$$\Delta\bar{e}^{\mathrm{cr}} = \frac{1}{2}\big[B_1\sigma_e^{n_1}(1 - \sin(3\theta)) + B_2\sigma_e^{n_2}(1 + \sin(3\theta))\big]\Delta t.$$

Для интегрирования уравнения равновесия по времени используется пошаговая процедура. Полагая решение в момент времени t известным, линеаризуется уравнение баланса виртуальных работ относительно этого момента времени с учётом кинематических и определяющих соотношений упругопластического материала, учитывающего деформации ползучести. Пространственная дискретизация линеаризованного уравнения проводится с использованием МКЭ. В результате на каждом шаге по времени решается система линейных алгебраических уравнений: ${}^{t}K\Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F$, где ${}^{t}K$ — матрица касательной жёсткости, определённая в момент времени t; $\Delta U = {}^{t+\Delta t}U - {}^{t}U$, ${}^{t+\Delta t}U$, ${}^{t}U$ — векторы перемещений ансамбля узловых точек в моменты времени $t + \Delta t$ и t соответственно; ${}^{t+\Delta t}R$ — вектор внешних сил в момент времени $t + \Delta t$; ${}^{t}F$ — вектор внутренних сил в момент времени t. Полученное решение ${}^{t+\Delta t}U = {}^{t}U + \Delta U$ на каждом шаге по времени уточняется методом Ньютона — Рафсона [19, 27, 29].

2.2. Результаты трёхмерного компьютерного моделирования

Для трёхмерного компьютерного моделирования процесса формообразования прямоугольной балки в конечно-элементном пакете MSC.Marc 2014 задаются свойства материала АК4-1, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$ и её геометрические размеры: $b = 10$ мм, $h = 20$ мм, $l = 100$ мм.

Проводилось моделирование чистого изгиба половины балки в условиях ползучести. Для однозначного позиционирования половины балки в пространстве были введены два линейных балочных элемента (truss element) из упругого материала с малой жёсткостью: $E_{\text{truss}} = 3\,\text{МПа}$, $\nu = 0.45$. Такой элемент имеет один общий узел с изгибаемой балкой, а второй узел элемента жёстко фиксируется в пространстве (все перемещения и повороты равны нулю). На левом торце половины балки были заданы условия симметрии: запрещено движение по оси Z и поворот вокруг оси X. На расстоянии от правого торца к поперечному сечению балки был приложен постоянный момент $M = (154.94, 0, 0)\,\text{Нм}$ параллельный оси X.

На рис. 3 показано изменение кривизны оси балки $\varkappa = 1/\rho$ по времени t. На рис. 3(a) показан график изменения кривизны балки в различные моменты времени. В условиях чистого изгиба кривизна в каждой точке балки одинакова. Точками обозначены экспериментальные значения для заданного момента времени [24]. Если проводить процесс моделирования деформирования балки с характеристиками ползучести на растяжение и поврежденностью (кривая *1*), на сжатие с поврежденностью (кривая *2*), то результат моделирования не согласуется с данными эксперимента. Кривая *3* — данные, полученные в работе [24]. Следует отметить, что по предложенной модели ползучести изгиба балки с учётом растяжения, сжатия и поврежденности материала (кривая *4*) достаточно точно описывается процесс повреждений в балке вплоть до разрушения.

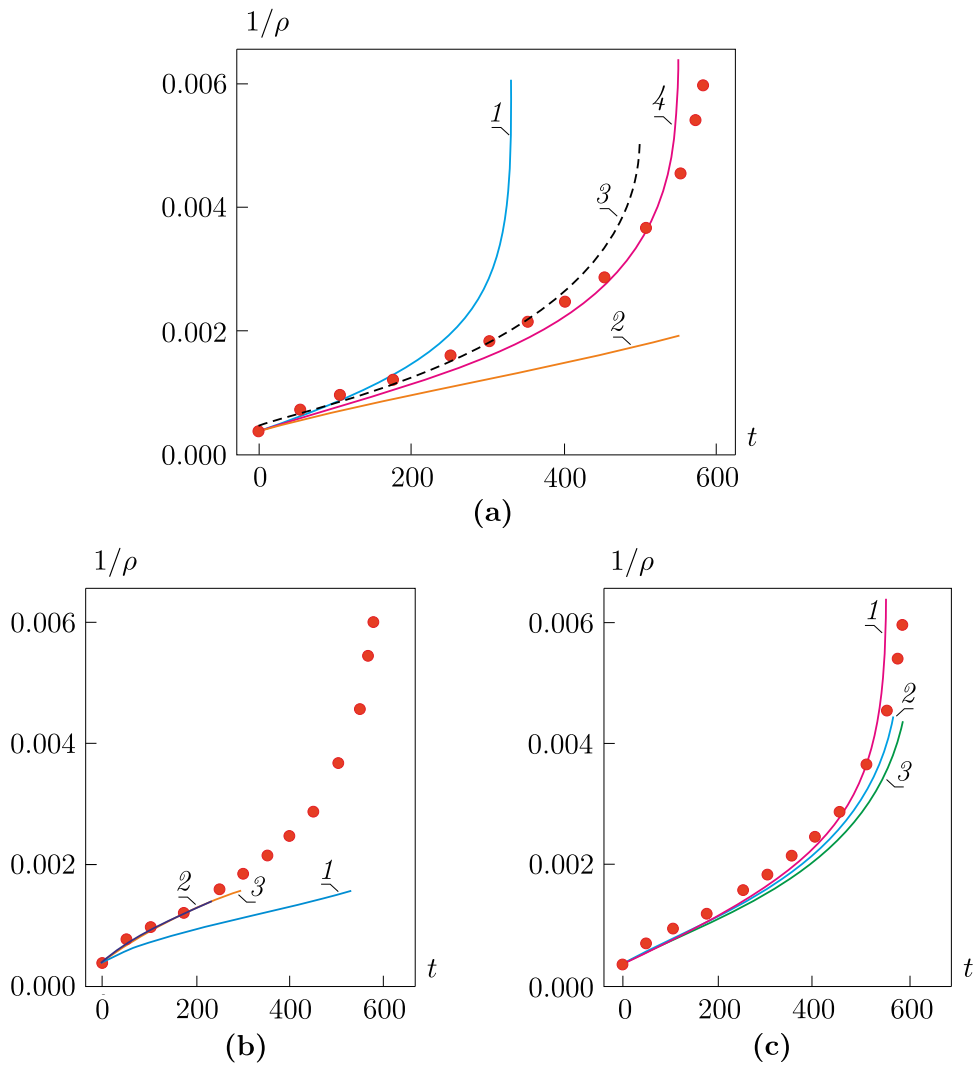

Рис. 3. Изменение кривизны оси балки $\varkappa = 1/\rho$ по времени t

На рис. 3(b) показаны линии кривизны от времени для разносопротивляющегося материала, полученные в расчётах с использованием равномерной сетки трёхмерных возьмиузловых гексогональных элементов (hex8) (кривая *1*), двадцатиузловых гексоганальных элементов (hex20) в общей лагранжевой формулировки (кривая *2*) и текущей формулировки механики деформируемого твёрдого тела (кривая *3*). Анализ показал, что для удовлетворительного описания процесса деформирования балки в процессе ползучести необходимо использовать в моделировании трёхмерные восьмиузловые гексогональные элементы и искать решение в текущей лагранжевой формулировке механики дефрмированного твёрдого тела [29, 30]. Однако учёт лишь одного различия свойств ползучести на растяжение и сжатие не даёт удовлетворительного описания процесса ползучести при изгибе балки, поскольку такой подход не улавливает увеличения скорости ползучести из-за роста поврежденности материала.

В данной работе для описания процесса деформирования балки вплоть до разрушения вводится скалярный параметр поврежденности $\omega = A/A_*$. Деформация в конечный момент времени $\varepsilon_* = 1/\sigma$, и в случае одноосных испытаний имеем, что $\omega = \bar{e}^{\mathrm{cr}} \cdot \sigma_e$. Таким образом, имеем следующий вид для определения приращения эффективной деформации ползучести:

$$\Delta\bar{e}^{cr} = \frac{1}{2}\big[B_1\sigma_e^{n_1}(1-\sin(3\theta))/(1-\bar{e}^{\mathrm{cr}}\cdot\sigma_e)^{m_1} + B_2\sigma_e^{n_2}(1+\sin(3\theta))/(1-\bar{e}^{\mathrm{cr}}\cdot\sigma_e)^{m_2}\big]\Delta t.$$

С введением скалярного параметра поврежденности в пользовательскую подпрограмму crplaw.f и проведения расчёта с адаптивным шагом по времени получены результаты с константами [24, 31], представленные на рис. 3(c). Кривая *1* получена в результате численного расчёта в программе Visual Studio, кривые *2* и *3* — результат компьютерного трёхмерного моделирования с учётом разносопротивляемости материала при ползучести при $n_1 \neq n_2$ [24] и $n_1 = n_2$ [31], а также с учётом поврежденности соответственно. Как видно, учёт разницы свойств ползучести-поврежденности даёт удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными. Также стоит отметить, что алгоритм учёта разносопротивляемости в пакете MSC.Marc чувствителен по времени расчёта процесса, что показано на рис. 39(b).

В результате конечно-элементного моделирования чистого изгиба балки в пакете MSC.Marc получено распределение деформаций ползучести (рис. 4(c)), распределение напряжений по высоте балке с учётом поврежденности материала (рис. 2(b)).

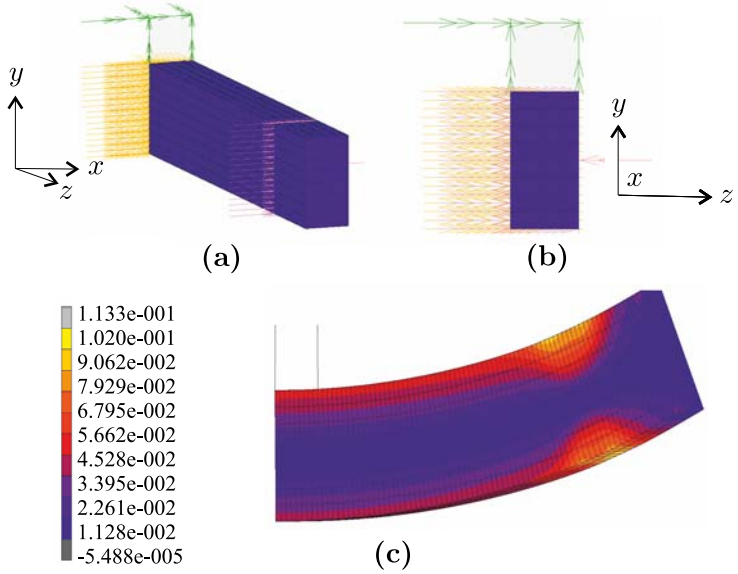

Рис. 4. Конечно-элементная модель заготовки

Видно, что так же происходит смещение нейтральной оси и алгоритм работает идентично реализованному численному методу в программе Visual Studio. Максимальное значение поврежденности в конечный момент времени достигло 0.86, что говорит о практическом разрушении материала в наиболее растянутом волокне при ползучести.

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

3.1. Постановка задачи

Перейдём к решению обратной задачи формообразования. Поиск момента, который необходимо приложить к балке в процессе деформирования для достижения целевой кривизны балки, проводится путём решения последовательности прямых задач чистого изгиба балок прямоугольного сечения. На каждом шаге производится сравнение полученных кривизн с целевым значением. Уточнение значений кривизн проводится с использованием метода оптимизации Нелдера — Мида [32, 33] с добавлением ограничений по времени формообразования элементов конструкций (рис. 5).

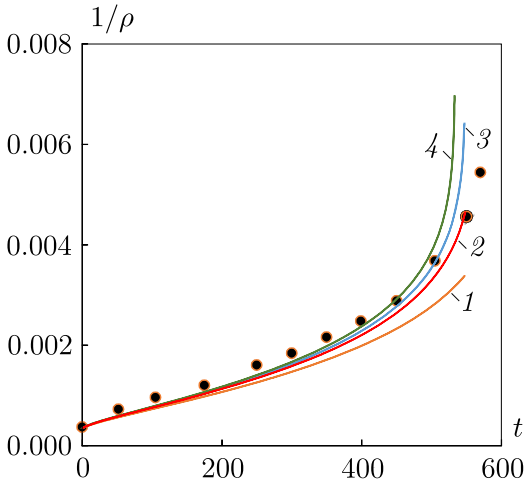

Рис. 5. Изменение кривизны балки $\varkappa = 1/\rho$ по времени t при различных изгибающих моментах M

Стоит отметить некоторые особенности реализованного метода. Метод Нелдера — Мида по сравнению с другими, более современными методами (например, алгоритм Левенберга — Марквардта, генетический алгоритм оптимизации) обладает следующими достоинствами: метод нулевого порядка — наиболее быстрый и надёжный из неградиентных методов оптимизации. Главный же его недостаток — отсутствие теории сходимости. Если рабочий симплекс находится далеко от оптимальной точки, а алгоритм производит большое число итераций, при этом мало изменяя значения функции, то решение этой проблемы заключается в запуске алгоритма несколько раз и ограничении числа итераций [32].

Рассмотрим этапы итераций алгоритма поиска значения изгибающего момента для достижения требуемой кривизны при формообразовании элементов конструкций. На первом этапе происходит подготовка данных: задаётся начальный симплекс метода Нелдера — Мида. Вершинами симплекса являются точки (M_i, χ_i), отобранные по значениям интегрального квадратичного критерия. На втором этапе происходит сортировка данных. Из начального симплекса сортируются вершины, которым соответствуют три изгибающих момента M_i, полученные в ходе решения прямых задач чистого изгиба балок в условиях ползучести: момент M_1 с максимальным значением, M_2 со следующим значением и третий уже с наименьшим M_3. Далее

определяется центр тяжести полученного многогранника. Затем проводится операция отражения: проектирование вершины симплекса с максимальным значением кривизны χ_i через центр тяжести. Далее проводится операция растяжения или сжатия многогранника. В случае сжатия добавляется новая точка. Итерационный процесс завершается после того, как получили требуемое значение кривизны χ прямоугольной балки. Алгоритм реализован в программном модуле на языке C++ в программе Visual Studio.

Рис. 5 представляет результаты действия алгоритма обратной задачи формообразования прямоугольной балки с учётом разницы свойств ползучести при растяжении и сжатии, а также поврежденности. Точками обозначены экспериментальные значения [24]. Кривая *1* отображает результаты при изгибающем моменте $M = 154.94$ Нм, кривая *2* — при $M = 156.41$ Нм, кривая *3* — при $M = 156.91$ Нм и кривая *4* — при $M = 158.87$ Нм. При решении данной задачи установлено, что для достижения требуемой целевой кривизны детали необходимо приложить изгибающий момент $M = 154.94$ Нм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено математическое моделирование прямой и обратной задач чистого изгиба балок из алюминиевого сплава АК4-1Т в процессе ползучести с учётом различия свойств при растяжении и сжатии и учётом поврежденности материла. Использовался скалярный параметр поврежденности, равный отношению текущей деформации к предельной при растяжении. Решение обратной задачи получено с использованием результатов решения последовательности прямых задач формообразования с применением метода оптимизации Нелдера — Мида. Учёт накопления повреждения в материале был добавлен в конечно-элементный пакет MSC.Marc, что позволило провести конечно-элементное моделирование чистого изгиба балок с удовлетворительной точностью. Предложенный подход можно применять не только для балок прямоугольного таврового сечения, но и для более сложных элементов конструкций, например для оребрённых панелей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ribeiro F.C., Marinho E.P., Inforzato D.J., Costa P.R., Batalha G.F.* Creep age forming: a short review of fundaments and applications // J. Achiev. Mater. Manufactur. Engrg. 2010. V. 43, N 1. P. 353–361.
2. *Luo H., Li W., Li Ch., Wan M.* Investigation of creep-age forming of aluminum lithium alloy stiffened panel with complex structures and variable curvature // J. Adv. Manufactur. Technol. 2017. V. 91, N 9–12. P. 3265–3271; https://doi.org/10.1007/s00170-017-0004-z
3. *Lam A.C.L., Shi Zh., Yang H., Li W., Davies C.M., Lin J., Zhou Sh.* Creep-age forming AA2219 plates with different stiffener designs and pre-form age conditions: experimental and finite element studies // J. Mater. Process Technol. 2015. V. 219. P. 155–163; https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2014.12.012
4. *Бормотин К.С., Белых С.В., Вин Аунг.* Математическое моделирование обратных задач многоточечного формообразования в режиме ползучести с помощью реконфигурируемого устройства // Вычисл. методы и программирование. 2016. Т. 17. С. 258–267; https://doi.org/10.26089/NumMet.v17r324
5. *Горев Б.В., Панамарев В.А.* Метод интегральных характеристик для расчёта изгиба элементов конструкции // Научно-техн. ведомости СПб. гос. политех. ун-та. Физ.-мат. науки. 2013. № 177. С. 201–211.
6. *Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С.* Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолёта // Прикл. математика и техн. физика. 2010. Т. 51, № 4. С. 155–165.
7. *Zolochevsky A., Sklepus S., Hyde T. H., Becker A. A., Peravali S.* Numerical modeling of creep and creep damage in thin plates of arbitrary shape from materials with different behavior in tension and compression under plane stress conditions // J. Numer. Meth. Engrg. 2009. V. 80, N 11. P. 1406–1436; https://doi.org/10.1002/nme.2663

8. *Naumenko K., Altenbach H.* Modeling High Temperature Materials Behavior for Structural Analysis. Part I: Continuum Mechanics Foundations and Constitutive Models. London: Springer-Verl., 2016.
9. *Агапов В.П.* Моделирование стержней таврового сечения в расчётах строительных конструкций методом конечных элементов // Строит. механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 2. С. 55–59
10. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
11. *Никитенко А.Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: изд. ИГиЛ СО РАН, 1997.
12. *Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф.* Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: изд. ИГиЛ СО РАН, 1986.
13. *Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В.* Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // Физ. мезомеханика. 2015. Т. 18, № 4. С. 68–87.
14. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016.
15. *Радченко В.П., Кичаев П.Е.* Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов. Самара: изд. Самар. гос. техн. ун-та, 2011.
16. *Brovman M.Ya.* Creep deformation of beams under compression and bending stresses // Mech. Solids. 2017. V. 52, N 1. P. 75–80; https://doi.org/10.3103/S0025654417010095
17. *Горев Б.В, Любашевская И.В., Панамарев В.А., Иявойнен С.В.* Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме // Прикл. математика и техн. физика. 2014. Т. 55, № 6. С. 132–144.
18. *Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.* Математическое моделирование чистого изгиба балки из разномодульного авиационного материала в условиях ползучести // Вестн. РУДН. Сер. Инж. исследования. 2015. № 1. С. 111–122.
19. *Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С.* Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и программирование. 2008. Т. 9. С. 346–365.
20. *Локощенко А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В.* Чистый изгиб балки в условиях ползучести из разносопротивляющегося материала // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 1(26). С. 66–73; https://doi.org/10.14498/vsgtu1042
21. *Sitar M., Kosel F., Brojan M.* Numerical and experimental analysis of elastic–plastic pure bending and spring back of beams of asymmetric cross-sections // J. Mech. Sci. 2015. V. 90. P. 77–88; https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.11.006
22. *Merson R.H.* An operational methods for integration processes // Proc. Symp. on Data Processing. Salisbur: Weapons Research Establishment. 1957. P. 239–240.
23. *Мудров А.Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: РАСКО, 1991.
24. *Горев Б.В.* К расчёту на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса из материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды. 1973. № 14. С. 44–51.
25. MSC.Software Corporation //MSC. Marc Vol. A: Theory and User Information. 2014; http://www.mscsoftware.com/product/marc
26. *Bathe K.J.* Finite Element Procedures in Engineering Analysis. N. Y.: Prentice-Hall, 1982.
27. *Бормотин К.С.* Итерационные численные методы компьютерного моделирования оптимальной формовки и клёпки тонкостенных панелей: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Комсомольск-на-Амуре. 2014.
28. MSC.Software Corporation // MSC. Marc Vol. D: User Subroutines and Special Routines. 2014; http://www.mscsoftware.com/product/marc
29. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твёрдых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
30. *Рудаков К.Н.* UGS Femap 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. Киев: КПИ. 2011.

31. *Соснин О.В., Горев Б.В., Рубанов В.В.* Кручение квадратной пластинки из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Расчёты прочности судовых конструкций и механизмов. 1976. № 117. С. 78–88.

32. *Nelder J. A., Mead R.* A simplex for function minimization // Comput. J. 1965. V. 7, N 4. P. 308–313.

33. *Городецкий С.Ю., Гришагин В.А.* Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 2007

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.376

INVERSE PROBLEM OF PURE BEAM BENDING IN CREEP CONDITIONS

© 2023 **S. V. Boyko[a], A. Yu. Larichkin[b]**

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]boykosv.hydro@gmail.com, [b]larichking@gmail.com

Received 03.05.2022, revised 27.10.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. The algorithm was proposed for solving the inverse problem of forming structural elements under creep conditions using the Nelder-Mead algorithm. The initial task of finding the forces that must be applied to obtain the required curvature of the part is reduced to a sequence of auxiliary direct problems of modeling the stress-strain state of pure bending of rectangular beams. This model, which takes into account the difference in the properties of the material in tension and compression, as well as the presence of accumulated damage in the material during creep, was verified by numerical methods and implemented in finite element program MSC Marc.

Keywords: rectangular beam, inverse problem, bending, creep, fracture, damage parameter, resistance to tension and compression.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.204

REFERENCES

1. Ribeiro F.C., Marinho E.P., Inforzato D.J., Costa P.R., Batalha G.F. Creep age forming: a short review of fundaments and applications. *J. Achiev. Mater. Manufactur. Engrg.*, 2010, Vol. 43, No. 1, pp. 353–361.
2. Luo H., Li W., Li Ch., Wan M. Investigation of creep-age forming of aluminum lithium alloy stiffened panel with complex structures and variable curvature. *J. Adv. Manufactur. Technol.*, 2017, Vol. 91, No. 9-12, pp. 3265–3271; https://doi.org/10.1007/s00170-017-0004-z
3. Lam A.C.L., Shi Zh., Yang H., Li W., Davies C.M., Lin J., Zhou Sh. Creep-age forming AA2219 plates with different stiffener designs and pre-form age conditions: experimental and finite element studies. *J. Mater. Process Technol.*, 2015, Vol. 219, pp. 155–163; https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2014.12.012
4. Bormotin K.S., Belykh S.V., Vin Aung. Matematicheskoe modelirovanie obratnykh zadach mnogotochechnogo formoobrazovaniya v rezhime polzuchesti s pomoshch'yu rekonfiguriruemogo ustroistva [Mathematical modeling of inverse multipoint forming problems in the creep mode using a reconfigurable tool]. *Vychisl. Metody i Program.*, 2016, Vol. 17, pp. 258–267 (in Russain); https://doi.org/10.26089/NumMet.v17r324
5. Gorev B. V., Panamarev V. A. The integrated characteristics method for calculation of a bend of design [The method of integral characteristics for calculating the bending of structural elements]. Nauchno-Tekh. Ved. St-Peterburg. Gos. Politekh. Univ. Fiz.-mat. nauki, 2013, No. 177, pp. 201–211 (in Russain).
6. Annin B. D., Oleinikov A. I., Bormotin K. S. Modeling of forming the wing panels the SSJ-100 aircraft. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2010, Vol. 51, No. 4, pp. 579–589.
7. Zolochevsky A., Sklepus S., Hyde T. H., Becker A. A., Peravali S. Numerical modeling of creep and creep damage in thin plates of arbitrary shape from materials with different behavior in tension and

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 2.

compression under plane stress conditions. *J. Numer. Meth. Engrg.*, 2009, Vol. 80, No. 11, pp. 1406–1436; https://doi.org/10.1002/nme.2663

8. Naumenko K., Altenbach H. Modeling High Temperature Materials Behavior for Structural Analysis. Part I: Continuum Mechanics Foundations and Constitutive Models. London: Springer-Verl., 2016.
9. Agapov V.P. Modelirovanie sterzhnei tavrovogo secheniya v raschetakh stroitel'nykh konstruktsii metodom konechnykh elementov [Modeling of T-section rods in calculations of building structures by the finite element method]. *Stroit. Mekh. Inzhener. Konstruk. i Sooruzh.*, 2016, No. 2, pp. 55–59 (in Russain).
10. Rabotnov Yu.N. Polzuchest' elementov konstruktsii. Moscow: Nauka, 1966 (in Russain).
11. Nikitenko A.F. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskikh materialov [Creep and long-term durability of metal materials]. Novosibirsk: Izd-vo Instituta Gidrodinamiki SO RAN, 1997 (in Russain).
12. Sosnin O.V., Gorev B.V., Nikitenko A.F. Energeticheskii variant teorii polzuchesti [Energy variant of the creep theory]. Novosibirsk: Izd-vo Instituta Gidrodinamiki SO RAN, 1986 (in Russain).
13. Volegov P.S., Gribov D.S., Trusov P.V. Povrezhdennost' i razrushenie: klassicheskie kontinual'nye teorii [Damage and destruction: classical continuum theories]. *Fiz. Mezomekh.*, 2015, Vol. 18, No. 4, pp. 68–87 (in Russain).
14. Lokoshchenko A.M. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov [Creep and long-term strength of metals]. M.: Fizmatlit, 2016 (in Russain).
15. Radchenko V.P., Kichaev P.E. Energeticheskaya kontseptsiya polzuchesti i vibropolzuchesti metallov [Energy concept of creep and vibration creep of metals]. Samara: Samar. Gos. Tekhn. Univ. Press, 2011 (in Russain).
16. Brovman M.Ya. Creep deformation of beams under compression and bending stresses. *Mech. Solids*, 2017, Vol. 52, No. 1, pp. 75–80; https://doi.org/10.3103/S0025654417010095
17. Gorev B.V, Lyubashevskaya I.V., Panamarev V.A., Iyavoynen S.V. Description of creep and fracture of modern construction materials using kinetic equations in energy form. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, Vol. 55, No. 6, pp. 1020–1030.
18. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Matematicheskoe modelirovanie chistogo izgiba balki iz raznomodul'nogo aviatsionnogo materiala v usloviyakh polzuchesti [Mathematical modeling of the net bending of a beam made of a multi-modulus aviation material under creep conditions]. *Vestn. RUDN. Ser. Inzh. Issled.*, 2015, No 1, pp. 111–122 (in Russain).
19. Korobeinikov S.N., Oleinikov A.I., Gorev B.V., Bormotin K.S. Matematicheskoe modelirovanie protsessov polzuchesti metallicheskikh izdelii iz materialov, imeyushchikh raznye svoistva pri rastyazhenii i szhatii [Mathematical modeling of creep processes of metal products made of materials having different properties under tension and compression]. *Vychisl. Metody i Program.*, 2008, Vol. 9, pp. 346–365 (in Russain).
20. Lokoshchenko A.M., Agakhi K.A., Fomin L.V. Chistyi izgib balki v usloviyakh polzuchesti iz raznosoprotivlyayushchegosya materiala [Net bending of a beam under creep conditions made of a highly resistant material]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, No. 1(26), pp. 66–73 (in Russain); https://doi.org/10.14498/vsgtu1042
21. Sitar M., Kosel F., Brojan M. Numerical and experimental analysis of elastic–plastic pure bending and spring back of beams of asymmetric cross-sections. *J. Mech. Sci.*, 2015, Vol. 90, pp. 77–88; https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.11.006
22. Merson R.H. An operational methods for integration processes. Proc. Symp. on Data Processing. *Weapons Research Establishment*, 1957, pp. 239–240
23. Mudrov A.E. Chislennye metody dlya PEVM na yazykakh Beisik,Fortran i Paskal' [Numerical methods for PCs in Basic, Fortran and Pascal languages.]. Tomsk: RASKO, 1991 (in Russain).
24. Gorev B.V. K raschetu na neustanovivshuyusya polzuchest' izgibaemogo brusa iz materiala s raznymi kharakteristikami na rastyazhenie i szhatie [To calculate the unsteady creep of a bent beam made of a material with different tensile and compression characteristics]. *Dinamika Sploshnoi Sredy*, 1973, No. 14, pp. 44–51 (in Russain).

25. MSC. Software Corporation. *MSC. Marc Vol. A: Theory and User Information*, 2014; http://www.mscsoftware.com/product/marc
26. Bathe K.J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. N. Y.: Prentice-Hall, 1982.
27. Bormotin K.S. Iteratsionnye chislennye metody komp'yuternogo modelirovaniya optimal'noi formovki i klepki tonkostennykh panelei: Dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk [Iterative numerical methods of computer modeling of optimal molding and riveting of thin-walled panels: Dis. ... doc. phys.-math. sci.]. Komsomol'sk-na-Amure, 2014 (in Russain).
28. MSC. Software Corporation. *MSC. Marc Vol. D: User Subroutines and Special Routines*, 2014; http://www.mscsoftware.com/product/marc
29. Korobeinikov S.N. Nelineinoe deformirovanie tverdykh tel [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2000 (in Russain).
30. Rudakov K.N. UGS Femap 10.2.0. Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruktsii [Geometric and finite element modeling of structures]. Kiev: KPI, 2011 (in Russain).
31. Sosnin O.V., Gorev B.V., Rubanov V.V. Kruchenie kvadratnoi plastinki iz materiala, raznosoprotivlyayushchegosya rastyazheniyu i szhatiyu pri polzuchesti [Torsion of a square plate made of a material that resists stretching and compression during creep]. *Raschety Prochnosti Sudovykh Konstruktsii i Mekhanizmov*, 1976, No. 117, pp. 78–88 (in Russain).
32. Nelder J. A., Mead R. A simplex for function minimization. *Comput. J.*, 1965, Vol. 7, No. 4, pp. 308–313.
33. Gorodetskii S.Yu., Grishagin V.A. Nelineinoe programmirovanie i mnogoekstremal'naya optimizatsiya [Nonlinear programming and multi-extreme optimization]. N. Novgorod: NNGU Press, 2007 (in Russain).