УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ГАЗОВОГО ПОТОКА НАД ВОЛНИСТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2023 **Ю. С. Апостол**[1,2a], **И. С. Вожаков**[1,2b]

[1] *Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]y.apostol@g.nsu.ru, [b]vozhakov@gmail.com

Поступила в редакцию 08.07.2022 г.; после доработки 14.11.2022 г.; принята к публикации 12.01.2023 г.

С помощью пакета OpenFoam проведено численное исследование турбулентного потока над волнистой поверхностью при различных значениях амплитуды и длины волны возмущения стенки канала. Для описания турбулентных характеристик использованы модели RANS и LES. Число Рейнольдса в потоке составляло 20000. Получены средние профили скоростей и касательных напряжений на стенке канала. Рассчитаны значения амплитуды и сдвига фаз для возмущений касательного напряжения при различных геометрических параметрах канала. Проведено сравнение с теоретической моделью и экспериментальными результатами.

Ключевые слова: численное моделирование, турбулентность, RANS и LES модели, волнистая стенка, касательные напряжения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.201

ВВЕДЕНИЕ

Турбулентные течения над волнистыми поверхностями распространены как в природе, так и в различных отраслях промышленности. Таковыми течениями, например, являются потоки воздуха над сложными поверхностями рельефа. Они интересны в контексте моделирования распространения загрязняющих атмосферу веществ. Другим примером могут послужить потоки воздуха над океаном, поверхность которого изменяется в пространстве и во времени. При рассмотрении совместных газожидкостных потоков зачастую полагают, что скорость течения жидкости много меньше скорости газового потока. В таком случае можно считать, что газ обтекает квазистационарную волнистую поверхность раздела. Хотя во многих экспериментах и расчётах учитывались твёрдые волнистые стенки, результаты всё же представляют определённый интерес для течений газа над волнистыми жидкостями, поскольку газ ведёт себя похожим образом и при обтекании поверхности жидкости [1]. Также существуют плёночные течения, которые образуются, например, в теплообменниках. Такие течения увеличивают трение в каналах.

В литературе представлено большое количество исследований, посвящённых неотрывному обтеканию волнистых поверхностей. Например, в работе [2] проведены экспериментальные исследования, чтобы проверить применимость линейной теории для описания возмущений в потоке. В [3, 4] измерены возмущения напряжения сдвига, изменения давления и профилей скорости вдоль твёрдой волны. Авторы работ заметили, что переменные отклика всё больше

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Института теплофизики СО РАН № 121031200084-2.

отличаются от гармонической формы с увеличением высоты волны и скорости потока, и пришли к выводу, что нелинейный отклик наблюдается для амплитуды волны обезразмеренной на толщину пограничного слоя больше 27.

В настоящей работе выполнено численное исследование турбулентного потока над волнистой поверхностью с использованием RANS (Reynolds Averaging Navier—Stocks) и LES (Large Eddy Simulation) методов. Метод RANS гораздо менее требователен к расчётной сетке. Кроме того, описание средних параметров течения позволяет упростить задачу до двумерной, что ещё больше уменьшает требования к вычислительным мощностям. Подход LES оказывается гораздо более требователен к расчётной сетке, особенно при высоких числах Рейнольдса, однако, как ожидается, он даёт более валидные результаты при моделировании турбулентных течений. Получены значения касательных напряжений на стенке и проведено сравнение с теоретическими и экспериментальными результатами. Результаты настоящей работы могут быть использованы для определения диапазона применимости существующих теоретических моделей, верификации результатов и их дальнейшей модификации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проведено моделирование турбулентного газового потока в плоском канале с волнистыми стенками. Схематичное изображение расчётной оболасти представлено на рис. 1.

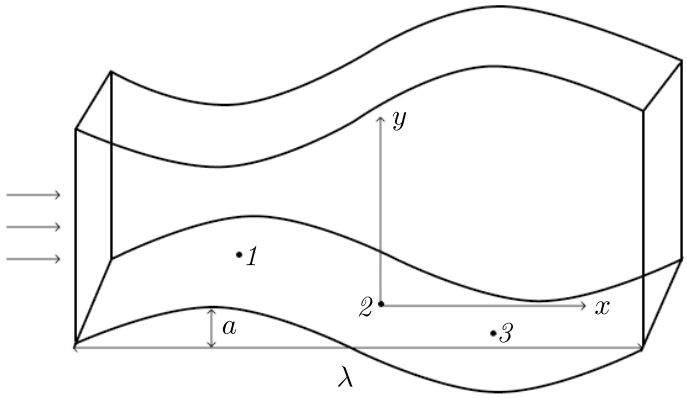

Рис. 1. Вид расчётной области

Моделирование выполнено с помощью уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости, имеющих вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[(\nu + \nu_T)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)\right] + g_i, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

где u_i — i-я компонента поля скорости, ν — коэффициент кинематической вязкости, ν_T — коэффициент турбулентной кинематической вязкости, ρ —- плотность, p — давление, g_i — i-я компонента внешней силы.

Расчёт проводился с использованием пакета с открытым исходным кодом OpenFOAM с помощью решателя для переходных процессов в несжимаемой жидкости PIMPLE. Моделирование турбулентных характеристик потока выполнено с использованием двух различных подходов: RANS и LES.

Расчётная сетка представляла собой канал поперечного сечения 10×10 см. На входе, выходе и боковых поверхностях поставлены циклические граничные условия. Верхние стенки представляли собой твёрдые поверхности, на которых выполнялось условие прилипания и непро-

текания. Движение потока в канале обеспечивалось постоянным градиентом давления, которое было выбрано таким, чтобы средняя скорость потока составляла 1 м/с. Число Рейнольдса, определяемое гидравлическим диаметром $D_h = 4S/P$ и средней скоростью потока $\bar{u}$, составляло $\mathrm{Re} = \bar{u} D_h \, \nu = 20000$. Здесь S — площадь сечения, P — периметр стенок в сечении. Расчёты выполнены для различных значений амплитуды возмущения и длины волны возмущения λ.

Размер расчётной сетки варьировался в зависимости от используемой модели турбулентности и параметров расчётной области. Так, для RANS использована более грубая сетка, чем для LES. В случае LES сетка подбиралась таким образом, чтобы пристеночная ячейка имела размер, примерно равный толщине линейного подслоя для заданных параметров течения. В случае RANS сетка выбрана путём последовательного сгущения до момента, когда результаты расчёта более не зависели от размеров ячеек.

1.1. Метод RANS

Метод RANS основывается на решении уравнений Рейнольдса: поле скорости раскладывается на среднее по времени значение и флуктуации

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + U(x,t). \tag{3}$$

Тогда уравнения приобретают вид

$$\nabla \bar{u}(x,t) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = \nu \Delta \bar{u}_i - \frac{\partial \overline{U}_i \overline{U}_k}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}. \tag{5}$$

Таким образом, получается система незамкнутых уравнений Рейнольдса. Замыкание уравнений Рейнольдса производится с использованием полуэмпирических моделей турбулентности. В данной работе реализуется гибридная модель $k-\omega$ SST [5]: в пристенной области используется $k-\omega$ модель, во внешнем потоке используется $k-\varepsilon$ модель.

Уравнение переноса кинетической энергии имеет вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu + \sigma_k \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j}. \tag{6}$$

Здесь k — кинетическая энергия турбулентности, ω — удельная скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, $P_k = \min\left(\tau_{ij} \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, 10\beta^* k \omega\right)$.

Удельная скорость диссипации рассчитывается с использованием следующего уравнения:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + 2(1-F_1)\sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \tag{7}$$

где $S_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)$.

Константы $[\alpha, \beta, \sigma] = \phi$ изменяются в зависимости от расстояния от стенки:

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_2), \tag{8}$$

где

$$F_1 = \tanh\left(\min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega}\right), \frac{4\sigma_{\omega_2} k}{CD_{k_\omega} y^2}\right]^4\right),$$

$$F_2 = \tanh\left(\left[\max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega}\right)\right]^2\right),$$

$$CD_{k_\omega} = \max\left(2\rho\sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10}\right).$$

Все значения констант взяты из работы [5]:

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}, \quad \alpha_2 = 0,44, \quad \beta_1 = \frac{3}{40}, \quad \beta_2 = 0,0828,$$
$$\sigma_{k_1} = 0,85, \quad \sigma_{k_2} = 1, \quad \sigma_{\omega_1} = 0,5, \quad \sigma_{\omega_2} = 0,856, \quad \beta^* = \frac{9}{100}.$$

В итоге турбулентная вязкость рассчитывается следующим образом:

$$\nu_T = \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} F_2)}. \tag{9}$$

1.2. Метод LES

Подход основан на решении отфильтрованных уравнений Навье — Стокса, замкнутых с помощью подсеточных моделей турбулентности. Сначала выполняется фильтрация: разделение вихрей по масштабам. Далее уравнения приводятся к такому виду, чтобы крупные вихри, удовлетворяющие граничным условиям, решались точно. После применяется подсеточная модель, описывающая мелкие вихри, считающиеся изотропными, и их взаимодействие с крупными. Применение этого подхода обосновано при наличии двух предположений: а) эффекты крупных и мелких масштабов можно разделить; б) описание взаимодействия вихрей происходит только на крупном масштабе.

В модели WALE [6] подсеточная вязкость задаётся соотношением

$$\nu_{\text{sgs}} = (C_w \Delta)^2 \frac{(S^d_{ij} S^d_{ij})^{3/2}}{(\overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij})^{5/2} + (S^d_{ij} S^d_{ij})^{5/4}}, \tag{10}$$

где

$$S^d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l}\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}, \quad C_w = 0.325.$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

В расчётах получены продольные и поперечные компоненты средней скорости в зависимости от поперечной координаты в волнистом канале. При этом использование RANS модели изначально предполагает расчёт средней скорости. В то же время LES моделирует движение крупных вихрей, а значит, и пульсаций скорости в канале. Поэтому для LES проведено осреднение мгновенных значений скорости на большом промежутке времени (приблизительно 50 с). Значения средней скорости вдоль линии, начинающейся в точке *2* (см. рис. 1), представлены на рис. 2. При увеличении амплитуды возмущения до 8 мм вблизи стенки возникают обратные потоки (продольная компонента скорости принимает отрицательные значения). Однако результаты по разным моделям турбулентности предсказывают существенно отличающиеся значения скорости. Так, при использовании LES наблюдается зона рециркуляции значительно большего размера. В модели RANS для амплитуды возмущения 8 мм и длины волны возмущения 16 см отрицательные значения скорости оказываются меньше на порядок. В то время как для длины возмущения 32 см зона рециркуляции отсутствует.

Одним из наиболее важных параметров, определяющих течение в волнистом канале, является касательное напряжение. Для его расчёта мы использовали полученные в расчёте осреднённые профили скорости:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial |\bar{u}|}{\partial \mathbf{n}}. \tag{11}$$

Здесь через $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ обозначена производная в нормальном направлении к стенке канала.

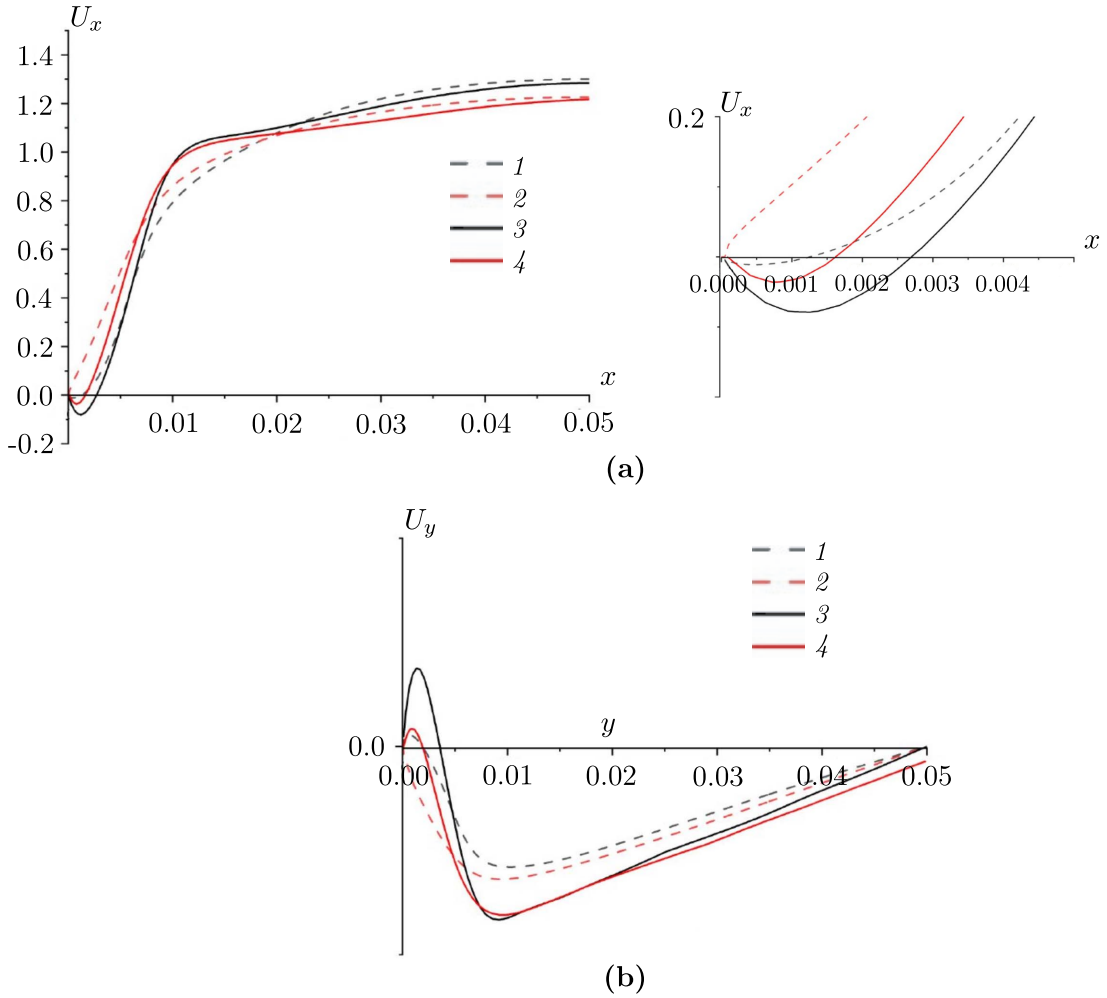

Рис. 2. Продольная (a) и поперечная (b) компоненты скорости в канале при различных значениях амплитуды и длины возмущения: RANS, $\lambda = 16$ см, $a = 8$ см (*1*); RANS, $\lambda = 32$ см, $a = 8$ см (*2*); LES, $\lambda = 16$ см, $a = 8$ см (*3*); LES, $\lambda = 32$ см, $a = 8$ см (*4*)

Далее напряжения на стенке обезразмеривали, а в качестве характерной величины использовано трение в плоском канале τ_0, которое также получено в результате расчётов

$$\tau_w = \tau_0(1 + \tau(k, x)). \tag{12}$$

На рис. 3 представлены распределения трения вдоль канала. Можно заметить, что кривые имеют форму, близкую к синусоиде. При этом увеличение отношения амплитуды волны возмущения к длине волны возмущения приводит к более значительному отклонению от гармонической формы. Кроме того, наблюдается сдвиг фаз в результате несовпадения максимумов касательного напряжения и возмущения стенки канала.

Полагая возмущение поверхности в канале малыми, можно считать, что его влияние на параметры течения будет линейным, в том числе и на возмущения трения:

$$\tau_w = \tau_0\left(1 + \frac{a}{\delta}\tau(k)\sin(kx + \phi)\right), \tag{13}$$

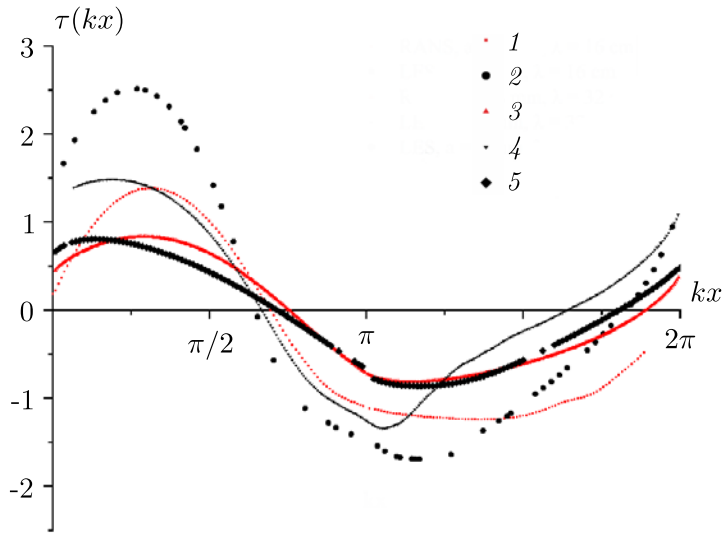

Рис. 3. Зависимость возмущения касательного напряжения от продольной координаты: RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (*1*); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (*2*); RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (*3*); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (*4*); LES, $a = 2$ мм, $\lambda = 16$ см (*5*)

где τ_0 — напряжение в канале без возмущений, a — амплитуда возмущения, δ — толщина вязкого подслоя, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, ϕ — сдвиг фазы относительно изначального возмущения.

Использование такого приближения позволило построить большое количество аналитических моделей для расчёта трения в волнистом канале. На рис. 4 представлены значения безразмерной амплитуды возмущения касательного напряжения $\tau(k)$ в сравнении с результатами, полученными по линейной модели [7]. Полученные результаты качественно согласуются с предсказаниями теоретической модели. При этом для значений, полученных с использованием модели LES, различия оказываются в два раза меньше в тех же условиях, что и для RANS модели.

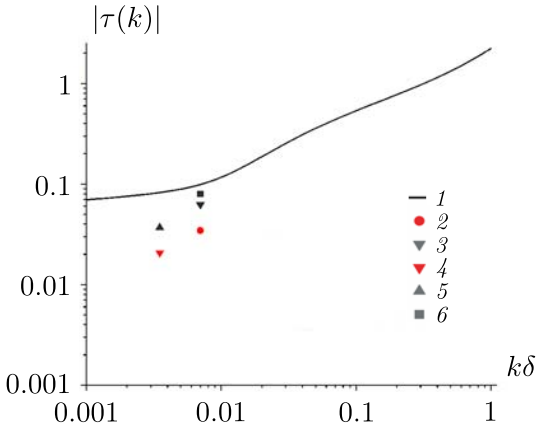

Рис. 4. Зависимость возмущения касательного напряжения от продольной координаты: см. [7] (*1*); RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (*2*); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (*3*); RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (*4*); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (*5*); LES, $a = 2$ мм, $\lambda = 16$ см (*6*)

На рис. 5 представлены значения сдвига фаз, рассчитанные по отклонению максимума возмущения трения относительно максимума возмущения поверхности. Также для сравнения приведены данные, полученные в экспериментальной работе [2].

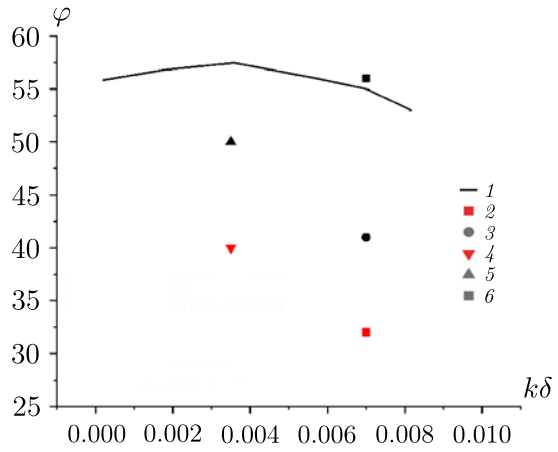

Рис. 5. Сдвиг фазы возмущения касательного напряжения:
см. [2] (*1*); RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (*2*); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (*3*);
RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (*4*); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (*5*);
LES, $a = 2$ мм, $\lambda = 16$ см (*6*)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено численное моделирование турбулентного газового потока в плоском канале с волнистыми стенками. Расчёты проведены с помощью пакета OpenFoam. На входе, выходе и боковых поверхностях поставлены периодические граничные условия. Описание турбулентных эффектов в потоке газа выполнено с помощью двух различных моделей турбулентности: RANS и LES. Получены осреднённые профили скоростей для различных соотношений амплитуды возмущения и длины волны возмущения стенок канала. Показано, что между моделями RANS и LES наблюдаются качественные различия между профилями скорости в области расширения канала. Так, модель LES предсказывает возникновение более выраженной зоны рециркуляции около стенки в более широком диапазоне соотношений амплитуды и длины волны возмущения. С использованием полученных профилей средней скорости рассчитаны значения касательных напряжений на стенке. Показано, что с увеличением отношения амплитуды и длины волны возмущения наблюдаются увеличивающиеся отклонения от линейной модели. Проведено сравнение расчётных значений амплитуды и сдвига фазы касательных напряжений с теоретической моделью. Показано, что результаты, полученные по модели LES, находятся в лучшем согласии с предсказаниями теоретической модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Angelis V., Lombardi P., Banerjee S.* Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall // Phys. Fluids. 1997. V. 9, N 8. P. 2429–2442.
2. *Thorsness C.B., Morrisroe P.E., Hanratty T.J.* A comparison of linear theory with measurements of the variation of shear stress along a solid wave // Chem. Engrg. Sci. 1978. V. 33, N 5. P. 579–592.
3. *Zilker D.P., Cook G. W., Hanratty T.J.* Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows // J. Fluid Mech. 1977. V. 82, N 1. P. 29–51.
4. *Zilker D.P., Hanratty T.J.* Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 2. Separated flows // J. Fluid Mech. 1979. V. 90, N 2. P. 257–271.
5. *Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.* Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbulence, Heat Mass Transfer. 2003. V. 4, N 1. P. 625–632.
6. *Weickert M., Teike G., Schmidt O., Sommerfeld M.* Investigation of the LES WALE turbulence model within the lattice Boltzmann framework // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59, N 7. P. 2200–2214.

7. *Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г., Вожаков И.С.* Исследование волн на поверхности тонкой плёнки жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком: моделирование вне рамок «квазиламинарного» приближения // Теплофизика и аэромеханика. 2021. Т. 28, № 2. С. 239–253.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.6

NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT GAS FLOW OVER A WAVY WALL

© 2023 **Yu. S. Apostol**[1,2a], **I. S. Vozhakov**[1,2b]

[1] *Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2] *Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: [a]y.apostol@g.nsu.ru, [b]vozhakov@gmail.com

Received 08.07.2022, revised 14.11.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. Using the OpenFOAM open source software, a numerical study of the turbulent flow over a wavy surface was carried out for various values of the amplitude and wavelength of the disturbance of the channel wall. The RANS and LES models were used to describe the turbulent characteristics. The Reynolds number in the flow was 20000. Average profiles of velocities and shear stresses on the channel wall were obtained. The values of the amplitude and phase shift for disturbance of the shear stress were calculated for various geometrical parameters of the channel. The comparison was made with the theoretical model and experimental results.

Keywords: numerical simulation, turbulence, RANS and LES models, wavy wall, shear stresses.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.201

REFERENCES

1. De Angelis V., Lombardi P., Banerjee S. Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall. *Phys. Fluids*, 1997, Vol. 9, No. 8, pp. 2429–2442.
2. Thorsness C.B., Morrisroe P.E., Hanratty T.J. A comparison of linear theory with measurements of the variation of shear stress along a solid wave. *Chem. Engrg. Sci.*, 1978, Vol. 33, No. 5, pp. 579–592.
3. Zilker D.P., Cook G. W., Hanratty T.J. Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows. *J. Fluid Mech.*, 1977, Vol. 82, No. 1, pp. 29–51.
4. Zilker D.P., Hanratty T.J. Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 2. Separated flows. *J. Fluid Mech.*, 1979, Vol. 90, No. 2, pp. 257–271.
5. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence, Heat Mass Transfer*, 2003, Vol. 4, No. 1, pp. 625–632.
6. Weickert M., Teike G., Schmidt O., Sommerfeld M. Investigation of the LES WALE turbulence model within the lattice Boltzmann framework. *Comput. Math. Appl.*, 2010, Vol. 59, No. 7, pp. 2200–2214.
7. Tsvelodub O. Y., Arkhipov D. G., Vozhakov I. S. Issledovanie voln na poverkhnosti tonkoi plenki zhidkosti, uvlekaemoi turbulentnym gazovym potokom: modelirovanie vne ramok «kvazilaminarnogo» priblizheniya [Investigation of waves on the surface of a thin film of liquid entrained by a turbulent gas flow: modeling outside the framework of the «quasi-laminar» approximation]. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2021, Vol. 28, No. 2, pp. 239–253.(in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 2.