

УДК 532.517.4

МИГРАЦИОННЫЙ СКОРОСТНОЙ АНАЛИЗ ПО ЛУЧЕВОЙ АСИМПТОТИКЕ УРАВНЕНИЯ ДВОЙНОГО КОРНЯ

© 2024 Н. Н. Шилов^{1a}, А. А. Дучков^{2b}¹Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,²Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 3, г. Новосибирск 630090, РоссияE-mails: ^an.shilov@g.nsu.ru, ^bDuchkovAA@ipgg.sbras.ruПоступила в редакцию 17.04.2023 г.; после доработки 02.05.2023 г.;
принята к публикации 07.06.2023 г.

Сейсмические изображения геологической среды являются основным результатом обработки полевых данных сейсморазведки. Качество изображений зависит от точности имеющейся скоростной модели. В данной работе строится градиентный алгоритм уточнения скоростной модели, основанный на высокочастотной лучевой асимптотике уравнения двойного корня — особой аппроксимации волнового уравнения, описывающей однократно-отражённые волны. Следуя принципам оценки точности скоростной модели, принятым в сейсмической миграции, мы построили целевой функционал и вывели систему уравнений для нахождения его градиента относительно параметров скоростной модели. Метод протестирован на незашумлённых модельных данных в двумерной постановке задачи.

Ключевые слова: обратная задача сейсморазведки, скоростной анализ, уравнение двойного корня, лучевой метод, теория возмущений.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.108

ВВЕДЕНИЕ

Сейсморазведка активно используется для изучения внутреннего строения Земли по данным регистрации отражённых волн [1]. Исторически сложились две группы методов восстановления скоростной модели среды: одни нацелены на восстановление гладких распределений скорости (скоростной анализ), а другие — на восстановление разрывов (миграция). Эти методы занимают разное место в графе обработки данных, и, в частности, точность сейсмической миграции определяется точностью построения гладкой скоростной модели [2].

Среди методов скоростного анализа выделяются два подхода, отличающиеся друг от друга выбором критерия оптимизации: сейсмическая томография (подбор скоростной модели, удовлетворяющей зарегистрированным данным [3]) и миграционный скоростной анализ (подбор скоростной модели, удовлетворяющей физике отражения: лучи падающих и отражённых волн сходятся в точках отражения, а положение этих точек не зависит от углов падения [4,5]). Соответственно, отличаются прямые задачи, которые решаются в процессе подбора. В томографических подходах на каждом шаге решаются задачи моделирования, а в миграционном скоростном анализе — задачи продолжения данных.

Продолжение данных в нижнее полупространство играет ключевую роль в сейсмической миграции. Оно реализуется как решение волнового уравнения или его аппроксимаций в обратном времени — конечно-разностным [4,6] или асимптотическим методом [7,8]. В данной статье разрабатывается алгоритм миграционного скоростного анализа на основе высокочастотной асимптотики одной из аппроксимаций волнового уравнения.

1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

1.1. Характеристическое уравнение DSR

Рассмотрим двумерное полупространство $z \geq 0$, в котором задано гладкое распределение скорости упругих волн $v(x, z)$. Пусть на верхней границе этого полупространства в координатах x_s и x_r соответственно расставлены источники и приёмники сейсмических волн. Пусть также известно время пробега однократно-отражённой волны как функция горизонтальных координат источника и приёмника, а также — формально — глубины системы наблюдений: $\tau(x_s, x_r, z = 0)$. Эта функция удовлетворяет принципу взаимности

$$\tau(x_s, x_r, z) = \tau(x_r, x_s, z)$$

и особой форме уравнения эйконала:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\sqrt{\frac{1}{v(x_s, z)^2} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_s}\right)^2} - \sqrt{\frac{1}{v(x_r, z)^2} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_r}\right)^2}, \quad (1)$$

впервые полученной в работе [7]. При выводе этого уравнения предполагалось, что оба подкоренных выражения положительны. Физически это означает, что лучи падающих и отражённых волн нигде не становятся горизонтальными. В нашей работе мы будем придерживаться того же предположения, но в дальнейшем вместо полной записи $v(x_s, z)$ и $v(x_r, z)$ будем пользоваться короткими обозначениями:

$$v_s = v(x_s, z), \quad v_r = v(x_r, z).$$

Уравнение (1) описывает кинематику сейсмических волн в пространстве данных (x_s, x_r, z) . Его решение задаёт время пробега волны из точки $(x_s, z)^T$ вниз до отражающей границы и обратно в точку $(x_r, z)^T$ (верхний индекс T указывает на транспонирование). Оно нашло применение в области сейсмической миграции, где ему ставится в соответствие то или иное псевдодифференциальное уравнение (уравнение двойного корня, англ. Double Square Root Equation), позволяющее пересчитывать записанное волновое поле в нижнее полупространство и строить изображения отражающих границ [4]. Как и для ряда других уравнений, описывающих волновые процессы, для уравнения двойного корня можно построить лучевую асимптотику и использовать её для решения прямых и обратных задач.

1.2. Лучи уравнения DSR

Следуя обозначениям лучевого метода, введём вектор координат и вектор медленности:

$$\vec{x} = (x_s, x_r, z)^T,$$

$$\vec{p} = (p_s, p_r, p_z)^T = \nabla_{\vec{x}} \tau = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_s}, \frac{\partial \tau}{\partial x_r}, \frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^T.$$

Здесь и далее оператор ∇ будет использоваться для обозначения градиента, а нижний индекс около него будет указывать, по каким координатам берутся частные производные. В отличие от вектора координат и медленности в физическом пространстве, в пространстве данных векторы \vec{x} и \vec{p} не соответствуют какой-то одной физической точке и направлению — они задают положение пары “источник-приёмник” на некоторой глубине и скорость изменения времени пробега отражённой волны при независимых горизонтальных перемещениях источника и приёмника или при одновременном их погружении в вертикальном направлении.

По уравнению эйконала (1) можно построить несколько разных гамильтонианов [8], причём разные формы гамильтониана будут соответствовать разным параметризациям лучей. В

нашей работе потребуется трассировать лучи в обратном времени, и поэтому мы будем пользоваться гамильтонианом, предложенным в [9]:

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = C_\tau(\vec{x}, \vec{p})H_0(\vec{x}, \vec{p}), \quad (2)$$

где

$$C_\tau(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{\frac{1}{v_s^2 \sqrt{\frac{1}{v_s^2} - p_s^2}} + \frac{1}{v_r^2 \sqrt{\frac{1}{v_r^2} - p_r^2}}}, \quad (3)$$

$$H_0(\vec{x}, \vec{p}) = - \left(p_z + \sqrt{\frac{1}{v_s^2} - p_s^2} + \sqrt{\frac{1}{v_r^2} - p_r^2} \right).$$

Такой гамильтониан задаёт систему уравнений луча, параметризованного временем пробега отражённой волны:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{d\tau} &= \nabla_{\vec{p}} H, \\ \frac{d\vec{p}}{d\tau} &= -\nabla_{\vec{x}} H. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения для производных гамильтониана мы вынесли в приложение.

Решения этой системы — пары $(\vec{x}(\tau), \vec{p}(\tau))$ — мы будем называть лучами. Начальные условия мы будем задавать на поверхности измерений $z = 0$. Зафиксировав источник x_s^{obs} , приёмник x_r^{obs} , время пробега $\tau_{obs} = \tau(x_s^{obs}, x_r^{obs}, 0)$ и его производные по горизонтальным координатам, можно выразить неизвестную вертикальную компоненту медленности из уравнения эйконала (1) и получить начальные условия в следующей форме:

$$\vec{x}|_{\tau=\tau_{obs}} = \begin{pmatrix} x_s^{obs} \\ x_r^{obs} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}|_{\tau=\tau_{obs}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{obs}}{\partial x_s} \\ \frac{\partial \tau_{obs}}{\partial x_r} \\ -\sqrt{\frac{1}{v_s^2} - p_s^2} \Big|_{\tau=\tau_{obs}} - \sqrt{\frac{1}{v_r^2} - p_r^2} \Big|_{\tau=\tau_{obs}} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

По построению, при таких начальных значениях \vec{x} и \vec{p} выполнено уравнение эйконала, и гамильтониан равен нулю. Эти свойства будут сохраняться вдоль всего луча как вдоль решения гамильтоновой системы.

1.3. Постановка обратной задачи

Мы будем решать систему уравнений луча (4) с начальными условиями (5) в обратном времени, от $\tau = \tau_{obs}$ до $\tau = 0$. Нулевое время пробега отражённой волны означает, что волна мгновенно прошла весь путь от источника до приёмника. Физически это реализуется, только когда источник и приёмник совмещены и находятся непосредственно в точке отражения, на самой поверхности раздела сред. Такие соображения можно использовать как критерий точности скоростной модели [5]. В терминах лучей уравнения двойного корня мы будем считать, что скоростная модель некорректна, если $x_s|_{\tau=0} \neq x_r|_{\tau=0}$. Этот принцип проиллюстрирован на рис. 1.

Пусть система наблюдений состоит из K пар источников и приёмников в координатах x_s^k и x_r^k соответственно, $k = \overline{1, K}$. Обозначим для каждой пары измеренное время пробега волны за τ_{obs}^k , а его производные по горизонтальным координатам — за $\frac{\partial \tau_{obs}^k}{\partial x_s}$ и $\frac{\partial \tau_{obs}^k}{\partial x_r}$. Построим по

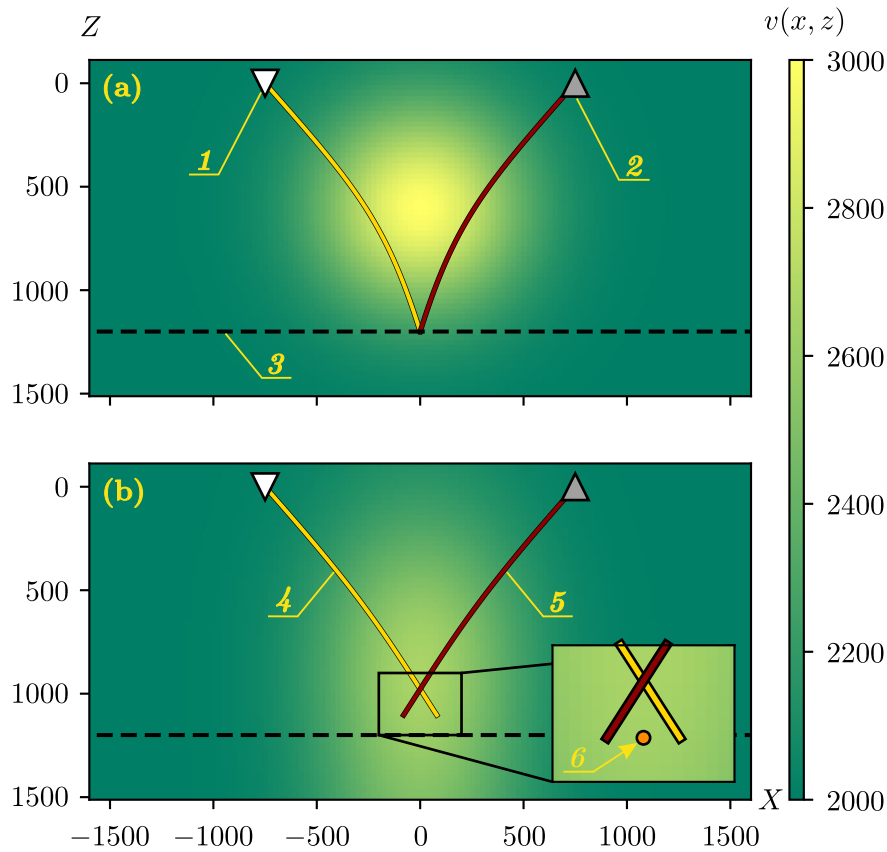


Рис. 1. Принцип оптимизации: (а) корректная скоростная модель $(v(x, z)[\text{м/с}], Z[\text{м}], X[\text{м}])$, (б) некорректная скоростная модель. Условные обозначения: 1 — источник, 2 — приёмник, 3 — истинное положение отражающей границы, 4 — падающий луч $(x_s, z)^T$, 5 — отражённый луч $(x_r, z)^T$, 6 — средняя точка, приблизительное положение точки отражения

этим данным лучи уравнения двойного корня, используя систему (4) и начальные условия (5). Обозначим за h_k расстояния между $x_s^k|_{\tau=0}$ и $x_r^k|_{\tau=0}$:

$$h_k = (x_r^k - x_s^k)|_{\tau=0}. \quad (6)$$

Величины h_k зависят от скоростной модели $v(x, z)$. Составим функционал невязки:

$$L(v) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K h_k^2(v). \quad (7)$$

Этот функционал неотрицателен и в истинной скоростной модели принимает нулевое значение. Сформулируем обратную задачу:

Обратная задача DSR. Построить скоростную модель $\tilde{v}(x, z)$, в которой функционал (7) примет минимальное значение.

Мы будем искать её решение методом градиентного спуска в некотором классе скоростных моделей $v(x, z; \vec{c})$, параметризованных набором чисел $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_M)^T$. Заметим, что в случае произвольно сложного строения среды решение может и не существовать из-за условия на нигде-не-горизонтальное распространение волн, необходимого для использования уравнения эйконала (1). Единственность решения в случае умеренно-неоднородных сред, по-видимому,

зависит от количества отражающих границ в модели. В следующем разделе мы построим систему уравнений, позволяющую оценить чувствительность лучей к возмущениям скоростной модели, уточним выбор параметризации решения и, наконец, составим формулу для расчёта градиента целевого функционала.

Замечание

Даже если скоростная модель не совсем верна, но близка к истинной, то координаты средней точки

$$m_x^k = \frac{x_r^k + x_s^k}{2} \Big|_{\tau=0}, \quad m_z^k = z^k \Big|_{\tau=0} \quad (8)$$

будут указывать на приблизительные положение точки отражения. Таким образом, построив все K лучей уравнения двойного корня, можно оценить форму отражающей границы. Тем не менее, если модель плохо приближает истинное распределение скоростей, то “видимая” лучами форма границы может исказиться. Пример одной средней точки изображён в нижней части рис. 1.

2. ГРАДИЕНТ ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА

2.1. Система возмущений луча DSR

Рассмотрим луч уравнения двойного корня $(\vec{x}(\tau), \vec{p}(\tau))$, построенный в модели $v(x, z)$. Внесём в скоростную модель малое возмущение $\delta v(x, z)$. Оно повлечёт малые возмущения в гамильтониане $H(\vec{x}, \vec{p})$, траектории луча $\vec{x}(\tau)$ и медленности $\vec{p}(\tau)$:

$$\begin{aligned} H &\rightarrow H + \delta H, \\ v \rightarrow v + \delta v &\implies \begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \vec{x} + \delta \vec{x}, \\ \vec{p} &\rightarrow \vec{p} + \delta \vec{p}, \end{aligned} \end{aligned}$$

причём δH линейно зависит от возмущений луча и скоростной модели:

$$\delta H(\vec{x}, \vec{p}; \delta \vec{x}, \delta \vec{p}, \delta v_s, \delta v_r) = \nabla_{\vec{x}} H \cdot \delta \vec{x} + \nabla_{\vec{p}} H \cdot \delta \vec{p} + \frac{\partial H}{\partial v_s} \delta v_s + \frac{\partial H}{\partial v_r} \delta v_r, \quad (9)$$

где δv_s и δv_r определяются аналогично v_s и v_r , а производные гамильтониана по скоростям находятся путём символического дифференцирования (2) по v_s и v_r как по независимым переменным.

Запишем систему уравнений возмущённого луча:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\vec{x} + \delta \vec{x}) &= \nabla_{\vec{p}}(H + \delta H), \\ \frac{d}{d\tau}(\vec{p} + \delta \vec{p}) &= -\nabla_{\vec{x}}(H + \delta H). \end{aligned}$$

Напомним, что на исходном луче (\vec{x}, \vec{p}) выполнена система (4) с невозмущённым гамильтонианом в правой части. Сократив соответствующие слагаемые, мы получим систему возмущений луча:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \delta \vec{x} &= \nabla_{\vec{p}} \delta H = \nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{x}} H \cdot \delta \vec{x} + \nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{p}} H \cdot \delta \vec{p} + \nabla_{\vec{p}} \frac{\partial H}{\partial v_s} \delta v_s + \nabla_{\vec{p}} \frac{\partial H}{\partial v_r} \delta v_r, \\ \frac{d}{d\tau} \delta \vec{p} &= -\nabla_{\vec{x}} \delta H = -\nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{x}} H \cdot \delta \vec{x} - \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{p}} H \cdot \delta \vec{p} - \nabla_{\vec{x}} \frac{\partial H}{\partial v_s} \delta v_s - \nabla_{\vec{x}} \frac{\partial H}{\partial v_r} \delta v_r, \end{aligned} \quad (10)$$

в которой операторы $\nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{x}}$, $\nabla_{\vec{p}}\nabla_{\vec{p}}$ и $\nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{p}} = \nabla_{\vec{p}}\nabla_{\vec{x}}^T$ действуют как

$$\nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_r} & \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} & \frac{\partial^2}{\partial x_r^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x_s} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x_r} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\vec{p}}\nabla_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial p_s^2} & \frac{\partial^2}{\partial p_s \partial p_r} & \frac{\partial^2}{\partial p_s \partial p_z} \\ \frac{\partial^2}{\partial p_r \partial p_s} & \frac{\partial^2}{\partial p_r^2} & \frac{\partial^2}{\partial p_r \partial p_z} \\ \frac{\partial^2}{\partial p_z \partial p_s} & \frac{\partial^2}{\partial p_z \partial p_r} & \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \end{pmatrix},$$

$$\nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{p}} = \nabla_{\vec{p}}\nabla_{\vec{x}}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial p_s} & \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial p_r} & \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial p_z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial p_s} & \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial p_r} & \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial p_z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial p_s} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial p_r} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial p_z} \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнения (10) в матричной форме:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \delta\vec{x} \\ \delta\vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\vec{p}}\nabla_{\vec{x}}H & \nabla_{\vec{p}}\nabla_{\vec{p}}H \\ -\nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{x}}H & -\nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{p}}H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\vec{x} \\ \delta\vec{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\vec{v}_s \\ \delta\vec{v}_r \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где за $\delta\vec{v}_s$ и $\delta\vec{v}_r$ обозначены векторы

$$\delta\vec{v}_s = \begin{pmatrix} \delta v_s \\ \frac{\partial}{\partial x_s} \delta v_s \\ \frac{\partial}{\partial z} \delta v_s \end{pmatrix}, \quad \delta\vec{v}_r = \begin{pmatrix} \delta v_r \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \delta v_r \\ \frac{\partial}{\partial z} \delta v_r \end{pmatrix},$$

а матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} имеют следующую структуру:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial v_s} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial v_s} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial p_z} \frac{\partial H}{\partial v_s} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial v_r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial v_r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial p_z} \frac{\partial H}{\partial v_r} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial H}{\partial v_s} & \frac{\partial H}{\partial v_s} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial H}{\partial v_s} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial v_s} & 0 & \frac{\partial H}{\partial v_s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial H}{\partial v_r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial H}{\partial v_r} & \frac{\partial H}{\partial v_r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial v_r} & 0 & \frac{\partial H}{\partial v_r} \end{pmatrix}.$$

Система (11) — линейная неоднородная; обозначим за $\mathbf{P}(\tau)$ фундаментальную матрицу её однородной части. Выразим через неё возмущение луча в нулевой момент времени:

$$\begin{pmatrix} \delta\vec{x} \\ \delta\vec{p} \end{pmatrix} \Big|_{\tau=0} = \mathbf{P}^{-1}(\tau_{obs}) \cdot \begin{pmatrix} \delta\vec{x} \\ \delta\vec{p} \end{pmatrix} \Big|_{\tau=\tau_{obs}} - \int_0^{\tau_{obs}} \mathbf{P}^{-1}(\tau') \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\vec{v}_s \\ \delta\vec{v}_r \end{pmatrix} d\tau'. \quad (12)$$

Для постановки условий в точке $\tau = \tau_{obs}$ мы будем считать, что положения источника и приёмника зафиксированы, а измерения на поверхности не зависят от возмущений скоростной модели:

$$\delta\vec{x} \Big|_{\tau=\tau_{obs}} = \vec{0}, \quad \delta p_s \Big|_{\tau=\tau_{obs}} = \delta \frac{\partial \tau_{obs}}{\partial x_s} = 0, \quad \delta p_r \Big|_{\tau=\tau_{obs}} = \delta \frac{\partial \tau_{obs}}{\partial x_r} = 0. \quad (13)$$

Кроме того, мы будем искать решения системы (10), на которых равен нулю возмущённый гамильтониан:

$$H(\vec{x}, \vec{p}) + \delta H(\vec{x}, \vec{p}; \delta \vec{x}, \delta \vec{p}) = 0.$$

Подставим сюда δH из (9) и выразим δp_z , учитывая, что $H(\vec{x}, \vec{p}) \equiv 0$ на невозмущённом луче:

$$\delta p_z = - \left(\nabla_{\vec{x}} H \cdot \delta \vec{x} + \frac{\partial H}{\partial p_s} \delta p_s + \frac{\partial H}{\partial p_r} \delta p_r + \frac{\partial H}{\partial v_s} \delta v_s + \frac{\partial H}{\partial v_r} \delta v_r \right) \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right)^{-1}.$$

Наконец, подставляя возмущения координат и медленности из (13), получим условие на $\delta p_z|_{\tau=\tau_{obs}}$:

$$\delta p_z|_{\tau=\tau_{obs}} = - \left(\frac{\partial H}{\partial v_s} \delta v_s + \frac{\partial H}{\partial v_r} \delta v_r \right) \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_{obs}}. \quad (14)$$

Система (10) с условиями (13) и (14) позволяет протрассировать возмущения луча от поверхности наблюдений до нулевого времени отражения при заданных возмущениях скоростной модели. В частности, решив её для k -го луча, можно рассчитать возмущение h_k из функционала невязки (7) как разницу возмущений x_r^k и x_s^k при нулевом времени отражения.

2.2. Параметризация модели

Введём некоторые ограничения на скоростную модель. Сузим её область определения до прямоугольника, симметричного относительно некоторой точки $(\bar{x}, \bar{z})^T$:

$$x \in [\bar{x} - d_x, \bar{x} + d_x], \quad z \in [\bar{z} - d_z, \bar{z} + d_z],$$

где числа $d_x > 0$ и $d_z > 0$ задают размеры прямоугольника. Введём замену координат:

$$\tilde{x} = \frac{x - \bar{x}}{d_x}, \quad \tilde{z} = \frac{z - \bar{z}}{d_z}.$$

Аналогичную замену мы будем использовать для координат источника и приёмника: \tilde{x}_s и \tilde{x}_r . Заметим, что преобразованные координаты безразмерны, а их значения лежат в диапазоне от -1 до 1 .

Как уже отмечалось выше, мы будем минимизировать функционал (7) в классе скоростных моделей, параметризованных некоторым набором чисел. Более конкретно, мы будем искать решение задачи оптимизации в виде

$$v(x, z; \vec{c}) = v_0(x, z) + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_{ij} T_i(\tilde{x}) T_j(\tilde{z}), \quad (15)$$

где за $v_0(x, z)$ обозначено фиксированное начальное приближение, за T_n — полиномы Чебышёва 1-го рода степени n , а за c_{ij} — неизвестные коэффициенты разложения (мы будем обозначать весь набор этих коэффициентов за \vec{c} , хотя в данном случае ими можно заполнить двумерный массив).

2.3. Градиент целевого функционала

Пусть возмущение скоростной модели $\delta v(x, z)$ вызвано малым приращением коэффициента c_{ij} . Тогда:

$$\delta v(x, z) = \frac{\partial v}{\partial c_{ij}} \delta c_{ij} = T_i(\tilde{x}) T_j(\tilde{z}) \delta c_{ij}.$$

Начальные условия (13), (14) преобразуются к виду

$$\delta \vec{x}|_{\tau=\tau_{obs}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial c_{ij}} \Big|_{\tau=\tau_{obs}} \delta c_{ij}, \quad \delta \vec{p}|_{\tau=\tau_{obs}} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial c_{ij}} \Big|_{\tau=\tau_{obs}} \delta c_{ij}$$

с частными производными

$$\left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial c_{ij}} \right|_{\tau=\tau_{obs}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \frac{\partial \vec{p}}{\partial c_{ij}} \right|_{\tau=\tau_{obs}} = - \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v_s} T_i(\tilde{x}_s) T_j(\tilde{z}) + \frac{\partial H}{\partial v_r} T_i(\tilde{x}_r) T_j(\tilde{z}) \end{array} \right) \Bigg|_{\tau=\tau_{obs}},$$

а векторы $\delta \vec{v}_s$ и $\delta \vec{v}_r$ — к виду

$$\delta \vec{v}_s = \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial c_{ij}} \delta c_{ij} = \begin{pmatrix} T_i(\tilde{x}_s) T_j(\tilde{z}) \\ \frac{1}{d_x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_s} T_i(\tilde{x}_s) T_j(\tilde{z}) \\ \frac{1}{d_z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} T_i(\tilde{x}_s) T_j(\tilde{z}) \end{pmatrix} \delta c_{ij}, \quad \delta \vec{v}_r = \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial c_{ij}} \delta c_{ij} = \begin{pmatrix} T_i(\tilde{x}_r) T_j(\tilde{z}) \\ \frac{1}{d_x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_r} T_i(\tilde{x}_r) T_j(\tilde{z}) \\ \frac{1}{d_z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} T_i(\tilde{x}_r) T_j(\tilde{z}) \end{pmatrix} \delta c_{ij}.$$

Подставляя эти выражения в (12) и сокращая δc_{ij} , можно рассчитать производные $\frac{\partial \vec{x}}{\partial c_{ij}}$ и $\frac{\partial \vec{p}}{\partial c_{ij}}$ в нулевой момент времени:

$$\left. \frac{\partial}{\partial c_{ij}} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \right|_{\tau=0} = \mathbf{P}^{-1}(\tau_{obs}) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial c_{ij}} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \right|_{\tau=\tau_{obs}} - \int_0^{\tau_{obs}} \mathbf{P}^{-1}(\tau') \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial c_{ij}} \begin{pmatrix} \vec{v}_s \\ \vec{v}_r \end{pmatrix} d\tau'.$$

Наконец, отсюда без труда находится производная целевого функционала (7) относительно возмущения коэффициента c_{ij} :

$$\frac{\partial L}{\partial c_{ij}} = \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial c_{ij}} \sum_{k=1}^K h_k^2 = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K h_k \frac{\partial h_k}{\partial c_{ij}},$$

в котором

$$\frac{\partial h_k}{\partial c_{ij}} = \left. \frac{\partial x_r^k}{\partial c_{ij}} \right|_{\tau=0} - \left. \frac{\partial x_s^k}{\partial c_{ij}} \right|_{\tau=0}.$$

По этим формулам можно рассчитать производные для всех c_{ij} . Причём отметим, что матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} и \mathbf{P} не зависят от выбора конкретного коэффициента и что этот расчёт можно производить параллельно.

Замечание

Наш выбор базисных функций не является результатом оптимизации; мы руководствовались тремя простыми соображениями:

- полиномы Чебышёва образуют ортогональный базис,
- полиномы Чебышёва являются дважды гладкими функциями,
- разложение по полиномам Чебышёва легко программно реализовать.

Поэтому вместо полиномиального разложения в (15) могут стоять и другие параметрические модели. Для применения нашего формализма необходимо лишь уметь вычислять их производные по пространственным координатам и по вектору параметров \vec{c} (в частности, смешанные производные вроде $\frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\partial v}{\partial x}$).

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

3.1. Выбор численных алгоритмов

В рамках нашей работы можно выделить три основные вычислительные задачи:

1. представление априорной скоростной модели $v_0(x, z)$,
2. лучевое трассирование и решение системы возмущений луча,
3. обновление параметров модели в направлении антиградиента.

Для их решения мы пользовались библиотеками NumPy [10] и SciPy [11] языка программирования Python. Для визуализации результатов мы пользовались библиотекой Matplotlib [12].

Априорная скоростная модель задавалась на прямоугольной сетке с шагом 25 м с последующей бикубической интерполяцией [13]. Для решения систем ОДУ (4) и (10) на стадии лучевого трассирования и трассирования возмущений луча мы использовали метод Рунге—Кутты четвёртого порядка с постоянным шагом [14]. Для реализации градиентного спуска мы воспользовались специализированной функцией из библиотеки SciPy. Среди доступных ей методов оптимизации мы выбрали метод “BFGS” [15].

3.2. Выбор моделей, системы наблюдений и начальных приближений

При тестировании нашего метода мы ограничились синтетическими данными с известными истинными распределениями скоростей. Для их расчёта мы воспользовались самостоятельно реализованным двухточечным лучевым трассированием [16, 17]. Мы рассмотрели две модели: одну с гладкой аномалией и единственной отражающей границей, а другую — разделённую тремя границами на контрастные однородные слои:

$$v_I(x, z) = 2000 + 1000e^{-\left(\frac{x}{500}\right)^2 - \left(\frac{z-600}{500}\right)^2} \text{ [м/с]},$$

$$v_{II}(x, z) = \begin{cases} 2000, & z \leq 400, \\ 1500, & 400 < z \leq 800, \\ 2500, & 800 < z \leq 1200, \\ 2000, & 1200 < z, \end{cases} \text{ [м/с].}$$

Обе скоростные модели изображены в верхних частях рис. 2 и 3. Отметим, что граница в первой модели — фиктивная — и была помещена на глубину 1200 м. Вторая модель явно разбита на четыре слоя с плоскими горизонтальными границами на глубинах 400, 800 и 1200 м.

В обеих моделях мы использовали одинаковые системы наблюдений. Источники были расставлены в координатах от -750 до 750 м с шагом 50 м, а приёмники расставлялись с тем же шагом в диапазоне полутора километров по обе стороны от каждого источника. В качестве начальных приближений $v_0(x, z)$ мы использовали модели предельных эффективных скоростей, посчитанные по формулам из [1]; априорные значения коэффициентов разложения (15) были взяты нулевыми. Начальные приближения изображены в нижних частях рис. 2 и 3. Кроме самих моделей и положений границ на этих рисунках изображены облака средних точек — приблизительных положений точек отражения, рассчитанных в начальных скоростных моделях (см. формулу (8) и замечание в первом разделе). Видно, что в первой модели форма границы искажена, а во второй модели одна из границ размыта и смещена по глубине. Кроме того, на отдельные цветовые шкалы вынесены абсолютные значения расстояний $h_k(v_0)$ (6), из которых ясно, что в обеих моделях есть существенно не сходящиеся в нулевом времени лучи.

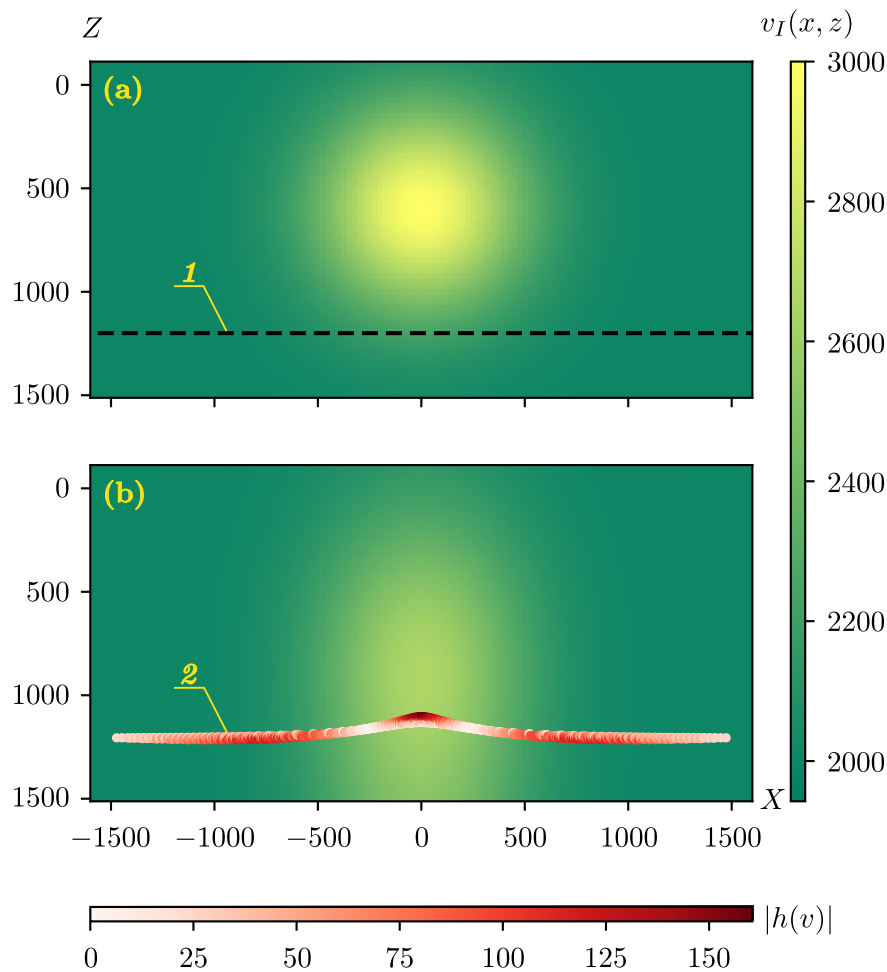


Рис. 2. (а) модель $v_I(x, z)$ [м/с], Z [м], X [м] и (б) начальное приближение ($|h(v)|$ [м] — расхождение источника и приёмника). 1 — истинное положение границы, 2 — облако средних точек, приблизительные положения точек отражения

3.3. Результаты численных экспериментов

Точность восстановления скоростной модели во многом зависит от удачного выбора параметризации (15): слишком низкие степени разложения не позволяют хорошо представить искомые аномалии, а высокие приводят к переобучению — скоростная модель подстраивается под отдельные лучи, и единая структура не вырисовывается, несмотря на низкие значения невязки. Нам не удалось выработать каких-то рекомендаций по оптимальному выбору сложности полиномиального разложения, и поэтому мы ограничились эмпирическим поиском.

Модели $v_I(x, z)$ и $v_{II}(x, z)$ отличаются по латеральной и глубинной изменчивости. Непрерывная модель $v_I(x, z)$ симметрична относительно центра аномалии, и для её представления естественно взять равное число членов разложения по горизонтали и вертикали с поправкой на соотношение сторон модели. С другой стороны, горизонтально-слоистая модель $v_{II}(x, z)$ совсем не изменяется по горизонтали, но включает три точки разрыва в вертикальном направлении, поэтому логично взять высокую степень разложения по оси z и низкую — по оси x . Кроме того, для наглядности эксперимента хотелось исследовать модели одинаковой сложности. В процессе поиска мы остановились на следующих параметрах:

- в модели $v_I(x, z)$: 26 членов разложения по горизонтали и 9 по вертикали,

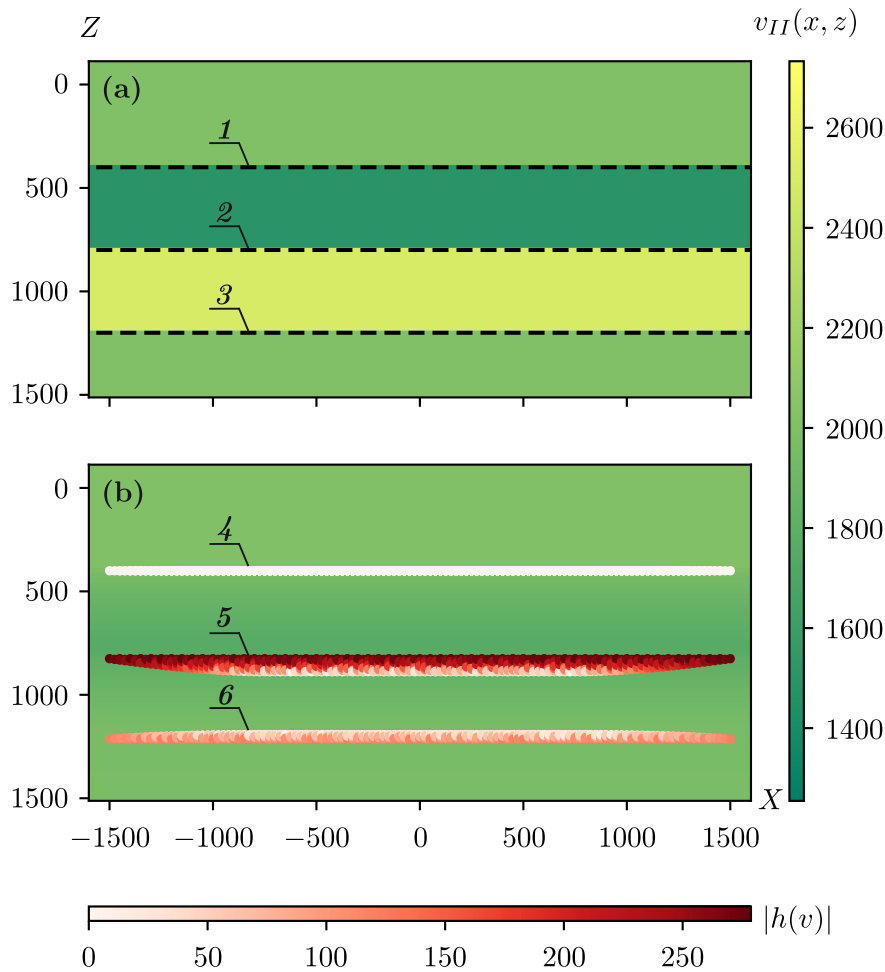


Рис. 3. (а) модель $v_{II}(x, z)$ [м/с], Z [м], X [м] и (б) начальное приближение ($|h(v)|$ [м] — расхождение источника и приёмника). 1, 2, 3 — истинные положения границ, 4, 5, 6 — облака средних точек, приблизительные положения точек отражения

- в модели $v_{II}(x, z)$: 9 членов разложения по горизонтали и 26 по вертикали.

Мы минимизировали функционал (7) до тех пор, пока невязка не становилась меньше 0.1 м^2 , что соответствовало максимальным значениям $h_k(v)$ на уровне 1 м. Это условный выбор, но мы считаем его оправданным: характерные длины волн в сейсморазведке составляют десятки метров, и дальнейшая оптимизация в более реалистичных условиях не будет добавлять информации об истинном строении среды, а только подстроит модель под ошибки в данных. Результаты оптимизации представлены на рис. 4 и 5 в нижних частях рисунков; в верхних частях для сравнения изображены истинные скоростные модели. Аналогично рис. 2 и 3, на дополнительных цветовых шкалах изображены расстояния между источниками и приёмниками в нулевом времени отражения. Видно, что в обоих случаях были восстановлены форма и глубина границ, но в первой модели восстановленная аномалия скорости растянута по вертикали, а её амплитуда занижена. В то же время, во второй модели удалось восстановить три контрастных слоя, не изменив их мощности и довольно точно восстановив скорости. Мы связываем это с большим объёмом входных данных, включающим отражения с разных глубин. Локальные экстремумы внутри однородных слоёв можно объяснить неравномерной сходимостью полиномиальных рядов к разрывным функциям.

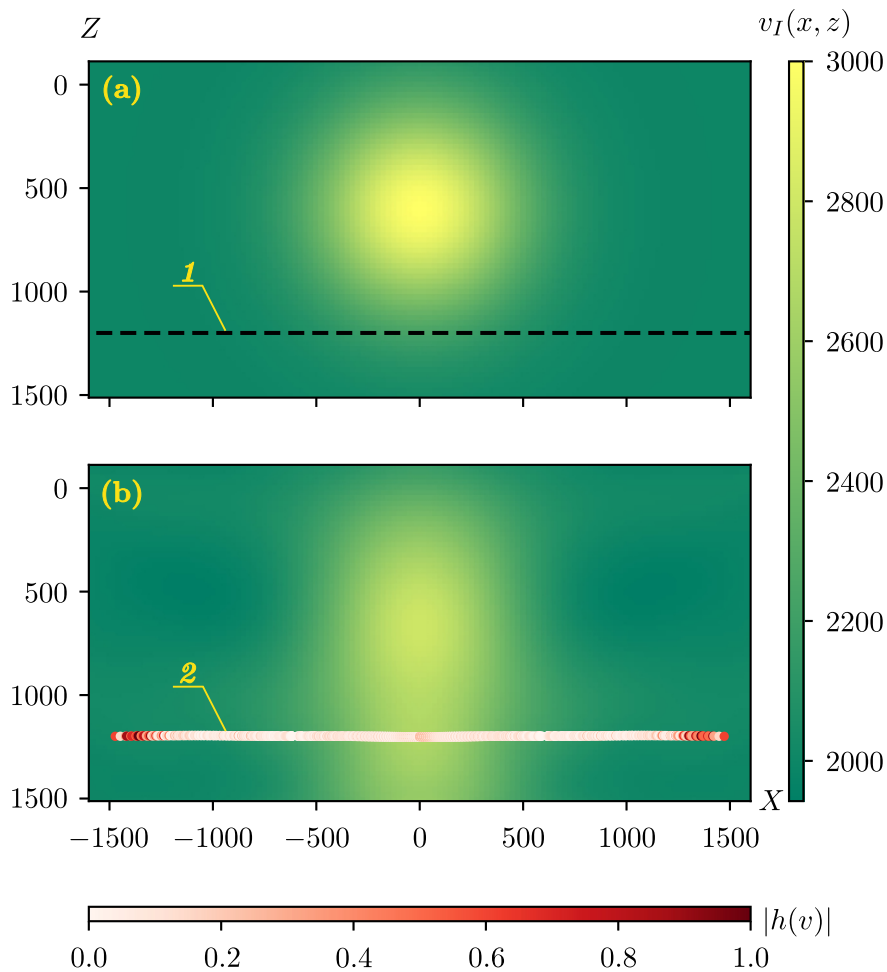


Рис. 4. (а) модель $v_I(x, z)$ [м/с], Z [м], X [м] и (б) результат оптимизации ($|h(v)|$ [м] — расхождение источника и приёмника). 1 — истинное положение границы, 2 — положение границы, восстановленное по лучам уравнения двойного корня

3.4. Поведение функционала невязки в окрестности решения

Для прикладной оценки единственности полученных решений мы исследовали поведение целевого функционала (7) в их окрестности. Используя конечно-разностные формулы, мы оценили матрицы вторых производных невязки в точках минимума, нашли их собственные числа и векторы. Затем мы построили срезы целевого функционала в трёх координатных осях Q_1 , Q_2 и Q_3 , задаваемых собственными векторами, соответствующими наибольшим собственным числам. Вдоль этих направлений можно ожидать самый быстрый рост функционала невязки вблизи точки минимума.

Срезы функционала невязки приведены на рис. 6. В левом столбце приведены срезы для первой модели, в правом — для второй. Вдоль осей отложены амплитуды смещений от найденных решений вдоль соответствующих собственных векторов. Незаполненные области в правом столбце означают, что во многих пробных скоростных моделях какие-то лучи становились горизонтальными, и функционал невязки был не определён. Тем не менее, видно, что в трёх выбранных направлениях наблюдается быстрый рост невязки без локальных минимумов и ярко выраженной овражности. При этом следует помнить, что числа обусловленности матриц вторых производных оказались на уровне 10^{13} , и помимо выделенных главных направлений

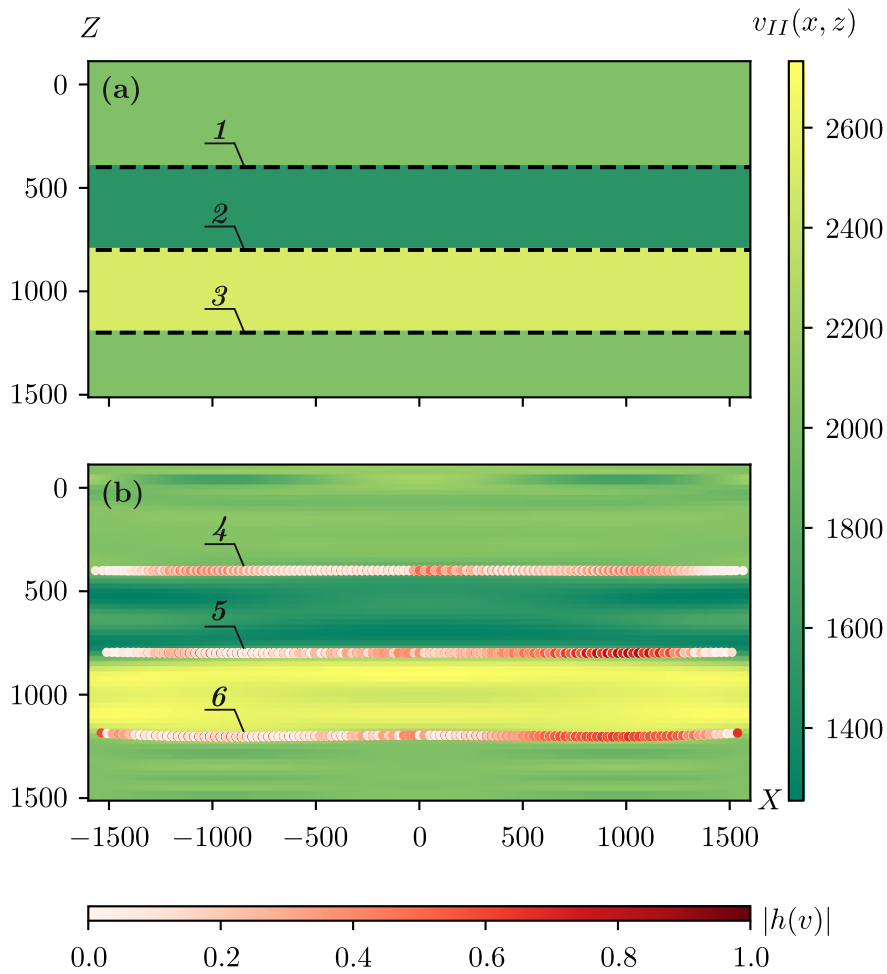


Рис. 5. (а) модель $v_{II}(x, z)$ [м/с], Z [м], X [м] и (б) результат оптимизации ($|h(v)|$ [м] — расхождение источника и приёмника). 1, 2, 3 — истинные положения границ, 4, 5, 6 — положения границ, восстановленные по лучам уравнения двойного корня

в пространстве моделей (в нашем случае 234-мерном) есть и другие, вдоль которых целевой функционал фактически не меняется, и при наличии шума в данных решение может быть неоднозначным.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Представленный в данной работе метод принимает на вход координаты источников и приёмников, времена пробега однократно-отражённых волн и их производные, позволяя одновременно восстанавливать гладкую скоростную модель и положения точек отражения. Среди известных авторов методов скоростного анализа он больше всего похож на стереотомографию [18]. Новизна предложенного подхода заключается в следующем:

- мы используем характеристическое уравнение двойного корня (1), а не классическое уравнение эйконала [16, 17],
- мы используем “физический” критерий оптимизации (падающий и отражённый лучи сходятся в точке отражения), а не критерий удовлетворения данным.

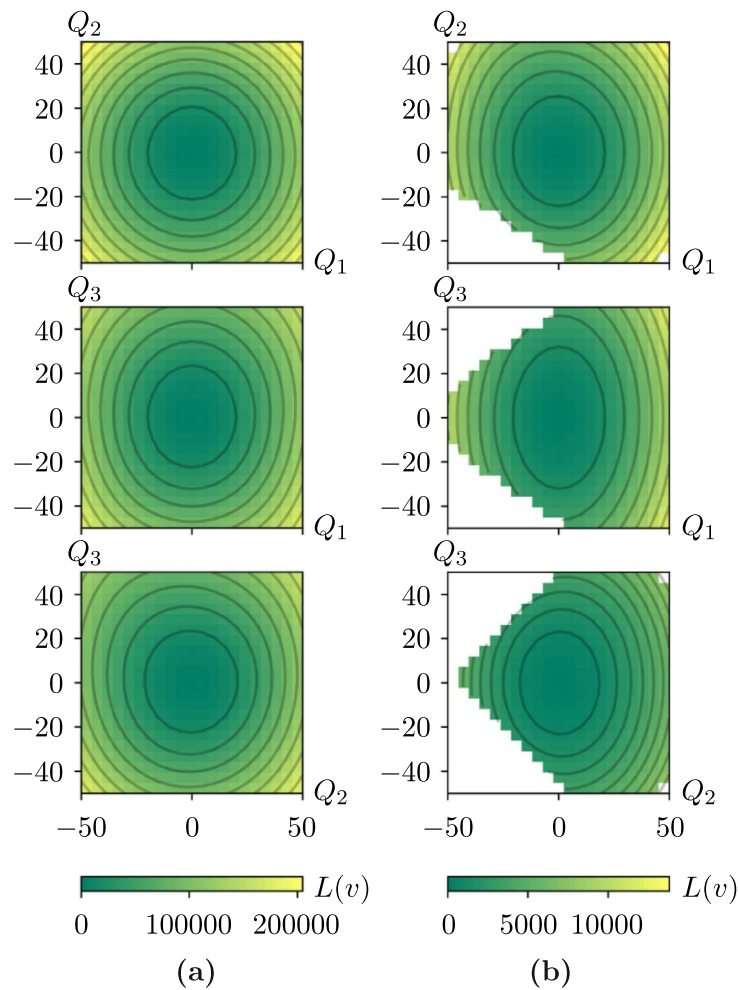


Рис. 6. Срезы функционала невязки $L(v)[\text{м}^2]$, $Q_1[\text{м/с}]$, $Q_2[\text{м/с}]$, $Q_3[\text{м/с}]$ в окрестности найденных решений (а) модели 1 и (б) модели 2. Незаполненные области означают, что в соответствующих моделях лучи становились горизонтальными, и функционал невязки не был определён

Главным преимуществом нашего метода является меньшее число неизвестных: в стереотомографии, кроме параметров скоростной модели, подбираются точки отражения, углы отражения и углы падения границ. В нашем подходе особая форма уравнения эйконала позволяет трассировать лучи в обратном времени и однозначно устанавливать момент отражения, а выбранный принцип оптимизации включает только параметры скоростной модели. Координаты точек отражения могут быть оценены после оптимизации скоростной модели по формуле (8), а углы отражения волн и углы падения границ легко находятся из траекторий лучей уравнения двойного корня [9].

Основным недостатком представленного подхода является ограничение на нигде-негоризонтальное распространение волн, что не позволяет восстанавливать круто падающие участки отражающих границ и высокоамплитудные аномалии скоростных моделей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нашей работе мы представили метод скоростного анализа, основанный на одновременной инверсии данных о временах пробега отражённых волн и об их производных по координатам источников и приёмников. В основе предложенного метода лежит развитая нами

высокочастотная асимптотика уравнения двойного корня — особой аппроксимации волнового уравнения, описывающей однократно-отражённые волны в пространстве данных. В работе сформулирована обратная задача и построен целевой функционал, который мы минимизируем градиентным методом в некотором классе параметрических скоростных моделей. Уравнения, позволяющие вычислить градиент целевого функционала, выведены в тексте статьи. Главным преимуществом предложенного подхода является меньшее, по сравнению с ближайшим известным нам аналогом, количество оптимизируемых параметров, а главным недостатком — ограничение на сложность восстанавливаемой модели. Алгоритм протестирован на двух наборах синтетических данных. Все построения производились в двумерной постановке задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения в тексте статьи часто включали производные гамильтониана (2). В этом приложении будут даны явные формулы для их вычисления. При их записи мы будем учитывать, что все производные вычисляются на луче, на котором сам гамильтониан равен нулю.

Введём некоторые обозначения:

$$S_m = \frac{1}{v_s^2} - mp_s^2, \quad R_m = \frac{1}{v_r^2} - mp_r^2, \quad m = \overline{1, 3}.$$

Перепишем множители (3), составляющие гамильтониан (2):

$$C_\tau(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{\frac{1}{v_s^2 \sqrt{S_1}} + \frac{1}{v_r^2 \sqrt{R_1}}}, \quad H_0(\vec{x}, \vec{p}) = -\left(p_z + \sqrt{S_1} + \sqrt{R_1}\right).$$

Выпишем их первые производные:

$$\nabla_{\vec{x}} C_\tau = C_\tau^2 \begin{pmatrix} \frac{S_2}{v_s^3 S_1^{3/2}} \frac{\partial v_s}{\partial x_s}, \\ \frac{R_2}{v_r^3 R_1^{3/2}} \frac{\partial v_r}{\partial x_r}, \\ \frac{S_2}{v_s^3 S_1^{3/2}} \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{R_2}{v_r^3 R_1^{3/2}} \frac{\partial v_r}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\vec{p}} C_\tau = -C_\tau^2 \begin{pmatrix} \frac{p_s}{v_s^2 S_1^{3/2}}, \\ \frac{p_r}{v_r^2 R_1^{3/2}}, \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla_{\vec{x}} H_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_s^3 S_1^{1/2}} \frac{\partial v_s}{\partial x_s}, \\ \frac{1}{v_r^3 R_1^{1/2}} \frac{\partial v_r}{\partial x_r}, \\ \frac{1}{v_s^3 S_1^{1/2}} \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{1}{v_r^3 R_1^{1/2}} \frac{\partial v_r}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\vec{p}} H_0 = \begin{pmatrix} \frac{p_s}{S_1^{1/2}}, \\ \frac{p_r}{R_1^{1/2}}, \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial C_\tau}{\partial v_s} = C_\tau^2 \frac{S_2}{v_s^3 S_1^{3/2}}, \quad \frac{\partial C_\tau}{\partial v_r} = C_\tau^2 \frac{R_2}{v_r^3 R_1^{3/2}}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial v_s} = \frac{1}{v_s^3 S_1^{1/2}}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial v_r} = \frac{1}{v_r^3 R_1^{1/2}}.$$

Т. к. на лучах $H_0 \equiv 0$, вычисление вторых производных C_τ необязательно: они будут появляться исключительно в произведениях с H_0 . Выпишем матрицы вторых производных последнего:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{x}} H_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{v_s^3 S_1^{1/2}} \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_s^2} & 0 & \frac{1}{v_s^3 S_1^{1/2}} \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_s \partial z} \\ 0 & \frac{1}{v_r^3 R_1^{1/2}} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_r^2} & \frac{1}{v_r^3 R_1^{1/2}} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_r \partial z} \\ \frac{1}{v_s^3 S_1^{1/2}} \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_s \partial z} & \frac{1}{v_r^3 R_1^{1/2}} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_r \partial z} & \frac{1}{v_s^3 S_1^{1/2}} \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} + \frac{1}{v_r^3 R_1^{1/2}} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \end{pmatrix} - \\ &\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial v_s}{\partial x_s} \right)^2 \frac{1}{v_s^4 S_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_s^2} + S_3 \right) & 0 & \frac{\partial v_s}{\partial x_s} \frac{\partial v_s}{\partial z} \frac{1}{v_s^4 S_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_s^2} + S_3 \right) \\ 0 & \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_r} \right)^2 \frac{1}{v_r^4 R_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_r^2} + R_3 \right) & \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \frac{\partial v_r}{\partial z} \frac{1}{v_r^4 R_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_r^2} + R_3 \right) \\ \frac{\partial v_s}{\partial x_s} \frac{\partial v_s}{\partial z} \frac{1}{v_s^4 S_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_s^2} + S_3 \right) & \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \frac{\partial v_r}{\partial z} \frac{1}{v_r^4 R_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_r^2} + R_3 \right) & \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} \right)^2 \frac{1}{v_s^4 S_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_s^2} + S_3 \right) + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \frac{1}{v_r^4 R_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_r^2} + R_3 \right) \end{pmatrix}, \\ \nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{p}} H_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{v_s^2 S_1^{3/2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_r^2 R_1^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{p}} H_0 = \nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{x}}^T H_0 = \begin{pmatrix} \frac{p_s}{v_s^3 S_1^{3/2}} \frac{\partial v_s}{\partial x_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_r}{v_r^3 R_1^{3/2}} \frac{\partial v_r}{\partial x_r} & 0 \\ \frac{p_s}{v_s^3 S_1^{3/2}} \frac{\partial v_s}{\partial z} & \frac{p_r}{v_r^3 R_1^{3/2}} \frac{\partial v_r}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}, \\ \nabla_{\vec{x}} \frac{\partial H_0}{\partial v_s} &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial v_s}{\partial x_s} \frac{1}{v_s^4 S_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_s^2} + S_3 \right) \\ 0 \\ \frac{\partial v_s}{\partial z} \frac{1}{v_s^4 S_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_s^2} + S_3 \right) \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\vec{x}} \frac{\partial H_0}{\partial v_r} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \frac{1}{v_r^4 R_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_r^2} + R_3 \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} \frac{1}{v_r^4 R_1^{3/2}} \left(\frac{1}{v_r^2} + R_3 \right) \end{pmatrix}, \\ \nabla_{\vec{p}} \frac{\partial H_0}{\partial v_s} &= \begin{pmatrix} \frac{p_s}{v_s^3 S_1^{3/2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\vec{p}} \frac{\partial H_0}{\partial v_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_r}{v_r^3 R_1^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Наконец, выразим производные гамильтониана (2) на луче:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{x}} H &= C_\tau \nabla_{\vec{x}} H_0, \quad \nabla_{\vec{p}} H = C_\tau \nabla_{\vec{p}} H_0, \\ \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{x}} H &= C_\tau \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{x}} H_0 + \nabla_{\vec{x}} C_\tau \otimes \nabla_{\vec{x}} H_0 + \nabla_{\vec{x}} H_0 \otimes \nabla_{\vec{x}} C_\tau, \\ \nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{p}} H &= C_\tau \nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{p}} H_0 + \nabla_{\vec{p}} C_\tau \otimes \nabla_{\vec{p}} H_0 + \nabla_{\vec{p}} H_0 \otimes \nabla_{\vec{p}} C_\tau, \\ \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{p}} H &= \nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{x}}^T H = C_\tau \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{p}} H_0 + \nabla_{\vec{x}} C_\tau \otimes \nabla_{\vec{p}} H_0 + \nabla_{\vec{x}} H_0 \otimes \nabla_{\vec{p}} C_\tau, \\ \nabla_{\vec{x}} \frac{\partial H}{\partial v_s} &= C_\tau \nabla_{\vec{x}} \frac{\partial H_0}{\partial v_s} + \frac{\partial H_0}{\partial v_s} \nabla_{\vec{x}} C_\tau + \frac{\partial C_\tau}{\partial v_s} \nabla_{\vec{x}} H_0, \quad \nabla_{\vec{x}} \frac{\partial H}{\partial v_r} = C_\tau \nabla_{\vec{x}} \frac{\partial H_0}{\partial v_r} + \frac{\partial H_0}{\partial v_r} \nabla_{\vec{x}} C_\tau + \frac{\partial C_\tau}{\partial v_r} \nabla_{\vec{x}} H_0, \end{aligned}$$

$$\nabla_{\vec{p}} \frac{\partial H}{\partial v_s} = C_\tau \nabla_{\vec{p}} \frac{\partial H_0}{\partial v_s} + \frac{\partial H_0}{\partial v_s} \nabla_{\vec{p}} C_\tau + \frac{\partial C_\tau}{\partial v_s} \nabla_{\vec{p}} H_0, \quad \nabla_{\vec{p}} \frac{\partial H}{\partial v_r} = C_\tau \nabla_{\vec{p}} \frac{\partial H_0}{\partial v_r} + \frac{\partial H_0}{\partial v_r} \nabla_{\vec{p}} C_\tau + \frac{\partial C_\tau}{\partial v_r} \nabla_{\vec{p}} H_0.$$

Здесь знаком \otimes обозначено внешнее произведение векторов. Если $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M)^T$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T$, оно вычисляется следующим образом:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_N \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_M b_1 & a_M b_2 & \cdots & a_M b_N \end{pmatrix}.$$

Все формулы были проверены в системе символьной математики Wolfram Mathematica 13.2 [19].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследования проводились в рамках государственных заданий FSUS-2022-0019 и FWZZ-2022-0017. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурвич И. И., Боганик Г. Н. Сейсморазведка: Учебник для вузов. Тверь: АИС, 2006.
2. Bleistein N., Cohen J. K., Stockwell W. Jr. Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion. N. Y.: Springer, 2001; DOI: 10.1007/978-1-4613-0001-4
3. Lo T., Inderwiesen P. L. Fundamentals of Seismic Tomography. Tulsa: SEG Books, 1994; DOI: 10.1190/1.9781560802334
4. Claerbout J. F. Imaging the earth's interior. Oxford: Blackwell scientific publication, 1985.
5. Sava P. C., Fomel S. Angle-domain common-image gathers by wavefield continuation methods // Geophysics. 2003. V. 68, N 3. P. 1065–1074; DOI: 10.1190/1.1581078
6. Zhang Y., Xu S., Bleistein N., Zhang G. True-amplitude, angle-domain, common-image gathers from one-way wave-equation migrations // Geophysics. 2007. V. 72, N 1. P. S49–S58; DOI: 10.1190/1.2399371
7. Белоносова А. В., Алексеев А. С. Об одной постановке обратной кинематической задачи сейсмологии для двумерной неоднородной среды // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. 1967. С. 137–154.
8. Duchkov A. A., de Hoop M. V. Extended isochron rays in prestack depth migration // Geophysics. 2010. V. 75, N 4. P. S139–S150; DOI: 10.1190/1.3459955
9. Шилов Н. Н. Система динамического лучевого трассирования для уравнения двойного корня. Выпускная квалификационная работа магистра. Новосибирск: ММФ НГУ, 2021.
10. Harris C. R., Millman K. J., van der Walt S. J., Gommers R., Virtanen P., Cournapeau D., Wieser E., Taylor J., Berg S., Smith N. J., Kern R., Picus M., Hoyer S., van Kerkwijk M. H., Brett M., Haldane A., del Rio J. F., Wiebe M., Peterson P., Gérard-Marchant P., Sheppard K., Reddy T., Weckesser W., Abbasi H., Gohlke Ch., Oliphant T. E. Array programming with NumPy // Nature. 2020. V. 585, N 7825. P. 357–362; DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2
11. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T. E., Haberland M., Reddy T., Cournapeau D., Burovski E., Peterson P., Weckesser W., Bright J., van der Walt S. J., Brett M., Wilson J., Millman K. J., Mayorov N., Nelson A. R. J., Jones E., Kern R., Larson E., Carey C. J., Polat I., Feng Y., Moore E. W., VanderPlas J., Laxalde D., Perktold J., Cimrman R., Henriksen I., Quintero E. A., Harris Ch. R., Archibald A. M., Ribeiro A. H., Pedregosa F., van Mulbregt P., SciPy 1.0 Contributors SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python // Nat. Methods. 2020. V. 17, N 3. P. 261–272; DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2

12. *Hunter J. D.* Matplotlib: A 2D graphics environment // *Comput. Sci. Eng.* 2007. V. 9, N 3. P. 90–95; DOI: 10.1109/MCSE.2007.55
13. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М: Наука, 1980.
14. *Ильин В. П.* Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017.
15. *Nocedal J., Wright S. J.* Numerical Optimization. Second Edition. N. Y.: Springer, 2006.
16. *Červený V.* Seismic ray theory. Cambridge: Cambridge university press, 2001.
17. *Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов // *Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.* 1961. Т. 5. С. 3–24.
18. *Gilles L.* Stereotomography // *Geophysics.* 2008. V. 73, N 5. P. VE25-VE34; DOI: 10.1190/1.2952039
19. *Wolfram Research, Inc.* Mathematica, Version 13.2. Champaign, IL, 2022.

UDC 532.517.4

**MIGRATION VELOCITY ANALYSIS USING A RAY METHOD
ASYMPTOTICS OF THE DOUBLE SQUARE ROOT EQUATION**© 2024 N. N. Shilov^{1a}, A. A. Duchkov^{2b}¹*Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*²*Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*E-mails: ^an.shilov@g.nsu.ru, ^bDuchkovAA@ipgg.sbras.ru

Received 17.04.2023, revised 02.05.2023, accepted 07.06.2023

Abstract. Seismic images of subsurface structures are the most valuable outcome of seismic data processing. The image quality is strongly affected by the accuracy of background velocity model. In this paper, we develop a gradient-descent velocity update algorithm based on our original high-frequency asymptotics of the double square root equation, i. e., a special one-way approximation of the wave equation describing single-scattered wave field only. We propose a loss function consistent with widely adopted imaging condition and derive equations for its gradient computation. We test our method on noise-free synthetic datasets in 2D settings.

Keywords: seismic inverse problem, velocity analysis, double square root equation, ray method, perturbation theory.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.108

REFERENCES

1. I. I. Gurvich and G. N. Boganik, *Seismic Exploration: A Textbook for Universities* (AIS, Tver, 2006) [in Russian].
2. N. Bleistein, J. K. Cohen, and W. Stockwell, Jr., *Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion* (Springer, New York, 2001). <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0001-4>
3. T. Lo and P. L. Inderwiesen, *Fundamentals of Seismic Tomography* (SEG Books, Tulsa, 1994). <https://doi.org/10.1190/1.9781560802334>
4. J. F. Claerbout, *Imaging the Earth's Interior* (Blackwell, Oxford, 1985).
5. P. C. Sava and S. Fomel, “Angle-domain common-image gathers by wavefield continuation methods,” *Geophysics* **68** (3), 1065–1074 (2003). <https://doi.org/10.1190/1.1581078>
6. Y. Zhang, S. Xu, N. Bleistein, and G. Zhang, “True-amplitude, angle-domain, common-image gathers from one-way wave-equation migrations,” *Geophysics* **72** (1), S49–S58 (2007). <https://doi.org/10.1190/1.2399371>
7. A. V. Belonosova and A. S. Alekseev, “On one formulation of the inverse kinematic seismic problem for a two-dimensional inhomogeneous medium,” in *Some Methods and Algorithms for Interpreting Geophysical Data* (Nauka, Moscow, 1967), 137–154 [in Russian].
8. A. A. Duchkov and M. V. de Hoop, “Extended isochron rays in prestack depth migration,” *Geophysics* **75** (4), S139–S150 (2010). <https://doi.org/10.1190/1.3459955>
9. N. N. Shilov, “Dynamic ray tracing system for the double square root equation,” *Master's Final Qualifying Thesis* (MMF NGU, Novosibirsk, 2021) [in Russian].

10. C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, R. Gommers, P. Virtanen, D. Cournapeau, E. Wieser, J. Taylor, S. Berg, N. J. Smith, R. Kern, M. Picus, S. Hoyer, M. H. van Kerkwijk, M. Brett, A. Haldane, J. F. del Rio, M. Wiebe, P. Peterson, P. G'erard-Marchant, K. Sheppard, T. Reddy, W. Weckesser, H. Abbasi, Ch. Gohlke, and T. E. Oliphant, "Array programming with NumPy," *Nature* **585** (7825), 357–362 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
11. P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. J. Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. J. Carey, I. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, Ch. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors, "SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python," *Nature Methods* **17** (3), 261–272 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
12. J. D. Hunter, "Matplotlib: A 2D graphics environment," *Comput. Sci. Eng.* **9** (3), 90–95 (2007). <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>
13. G. I. Marchuk, *Methods of Computational Mathematics* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
14. V. P. Il'in, *Methods for Solving Ordinary Differential Equations* (IPTs NGU, Novosibirsk, 2017) [in Russian].
15. J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization* (Springer, New York, 2006).
16. V. Červený, *Seismic Ray Theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001).
17. A. S. Alekseev, V. M. Babich, and B. Ya. Gelchinskii, "Ray method for calculating the intensity of wave fronts," in *Questions of the Dynamic Theory of Seismic Wave Propagation* (1961), **5**, 3–24 [in Russian].
18. L. Gilles, "Stereotomography," *Geophysics* **73** (5), VE25–VE34 (2008). <https://doi.org/10.1190/1.2952039>
19. Wolfram Research, Inc., *Mathematica. Version 13.2* (Champaign, IL, 2022).