

УДК 519.4

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ  
РЕКОНСТРУКЦИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В СХЕМЕ  
РУСАНОВА.  
II. УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ  
МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

© 2024 И. М. Куликов

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: kulikov@ssd.ssc.ru

Поступила в редакцию 10.06.2023 г.; после доработки 14.07.2023 г.;  
принята к публикации 07.02.2024 г.

Как известно, схема Русанова для решения гидродинамических уравнений является одной из самых робастных в классе численных схем решения задачи Римана. Ранее было показано, что схема Русанова с использованием кусочно-параболической реконструкции физических переменных даёт малодиссипативную схему, качественно и количественно соответствующую схемам типа Roe и семейству схем Хартена–Лакса–Ван Леера при использовании аналогичной реконструкции. При этом в отличие от этих схем численное решение свободно от артефактов. В случае уравнений специальной релятивистской магнитной гидродинамики спектральное разложение для разрешения задачи Римана является достаточно сложным и не имеет аналитического решения. В статье предлагается развитие схемы Русанова с использованием кусочно-параболического представления решения на уравнения специальной релятивистской магнитной гидродинамики. Проведена верификация разработанной схемы на восьми классических задачах о распаде произвольного разрыва, описывающих основные особенности релятивистских замагниченных течений.

**Ключевые слова:** вычислительная астрофизика, релятивистская магнитная гидродинамика, численные методы, метод Русанова, кусочно-параболический метод.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.103

## ВВЕДЕНИЕ

Объекты во Вселенной с наибольшей светимостью помимо течений с релятивистскими скоростями характеризуются наличием магнитных полей. К таким объектам относятся активные ядра галактик, квазары, гамма-всплески, рентгеновские источники и внегалактические струи различной природы [1]. На масштабах порядка парсека конфигурации магнитного поля релятивистской струи имеют тороидальную [2], продольную [3] и спиральную [4] структуры. На масштабах порядка килопарсека магнитное поле уже выравнивается вдоль струи [5] или ортогонально ей [6]. Такая картина магнитного поля требует решения уравнений специальной релятивистской магнитной гидродинамики. Важной частью численных методов типа Годунова для решения гиперболических уравнений является решение задачи Римана и спектральное разложение якобиана одномерной системы. В случае уравнений специальной релятивистской магнитной гидродинамики спектральное разложение в общем виде приходится разрешать численно [7]. Для схемы Русанова достаточно использовать только характеристики, соответствующие быстрым магнитным волнам, аналитический вид которых можно записать аналитически [8]. В настоящей работе будет использована запись уравнений и процедура восстановления

физических переменных, приведённых в статье [9]. Для верификации будет использована система тестов в одномерной постановке из статьи [10].

В настоящей статье предлагается развитие схемы Русанова, описанной в работе [11] (Статья I) на уравнения специальной релятивистской магнитной гидродинамики. Во втором разделе описаны решаемые уравнения, процедура восстановления физических переменных при наличии магнитного поля, а также выписаны явные формулы для нахождения быстрых магнитных волн, необходимых для конструирования схемы Русанова. Третий раздел посвящён верификации построенного численного метода. В четвёртом разделе обсуждается ряд дискуссионных вопросов, связанные с разработанной методикой. В пятом разделе сформулировано заключение. Для заинтересованных в использовании схемы Русанова для численного решения уравнений специальной релятивистской магнитной гидродинамики читателей исходный код метода размещён на ресурсе GitFlic: <https://gitflic.ru/project/igorkulikov/rusanovrmhd1d>.

## 1. УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Будем рассматривать физические переменные  $\rho$  — плотность,  $v_x, v_y, v_z$  — компоненты скорости,  $p$  — давление,  $B_x, B_y, B_z$  — компоненты магнитного поля. Введём безразмерную скорость света  $c \equiv 1$ . Определим Лоренц-фактор  $\Gamma$  по формуле

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

где  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Будем понимать, что Лоренц-фактор достигает малых значений при  $\Gamma \sim 1$ , средних значений при  $\Gamma \sim 10$  и больших значений при  $\Gamma \sim 100$  и выше. Это условные названия Лоренц-фактора, выработанные при исследовании задач эволюции релятивистских джетов.

Используя показатель адиабаты  $\gamma$ , введём понятия специфической энтальпии  $h$  и скорость звука  $c_s$  по формулам

$$h = 1 + \frac{\gamma p}{\gamma - 1 \rho}, \quad c_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho h}.$$

Используя физические переменные, введём консервативные переменные  $D$  — релятивистская плотность,  $S_x, S_y, S_z$  — релятивистский импульс и  $E$  — релятивистская полная энергия по формулам

$$\begin{aligned} D &= \rho \Gamma, \\ S_x &= (\rho h \Gamma^2 + B^2) v_x - (\vec{v}, \vec{B}) B_x, \\ S_y &= (\rho h \Gamma^2 + B^2) v_y - (\vec{v}, \vec{B}) B_y, \\ S_z &= (\rho h \Gamma^2 + B^2) v_z - (\vec{v}, \vec{B}) B_z, \\ E &= \rho h \Gamma^2 - p + \frac{B^2}{2} + \frac{v^2 B^2}{2} - \frac{(\vec{v}, \vec{B})^2}{2}, \end{aligned}$$

где  $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$  и  $(\vec{v}, \vec{B}) = v_x B_x + v_y B_y + v_z B_z$ .

Для консервативных величин запишем систему законов сохранения в векторной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0,$$

где вектор консервативных переменных  $U$  и вектора потоков  $F_x, F_y, F_z$  имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} D \\ S_x \\ S_y \\ S_z \\ E \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} Dv_x \\ S_x v_x + \left( p + \frac{B^2}{2\Gamma^2} + \frac{(\vec{v}, \vec{B})^2}{2} \right) - \left( \frac{B_x}{\Gamma^2} + (\vec{v}, \vec{B}) v_x \right) B_x \\ S_y v_x \\ S_z v_x \\ S_x \\ 0 \\ B_y v_x - v_y B_x \\ B_z v_x - v_z B_x \end{pmatrix},$$

$$F_y = \begin{pmatrix} Dv_y \\ S_x v_y \\ S_y v_y + \left( p + \frac{B^2}{2\Gamma^2} + \frac{(\vec{v}, \vec{B})^2}{2} \right) - \left( \frac{B_y}{\Gamma^2} + (\vec{v}, \vec{B}) v_y \right) B_y \\ S_z v_y \\ S_y \\ B_x v_y - v_x B_y \\ 0 \\ B_z v_y - v_z B_y \end{pmatrix},$$

$$F_z = \begin{pmatrix} Dv_z \\ S_x v_z \\ S_y v_z \\ S_z v_z + \left( p + \frac{B^2}{2\Gamma^2} + \frac{(\vec{v}, \vec{B})^2}{2} \right) - \left( \frac{B_z}{\Gamma^2} + (\vec{v}, \vec{B}) v_z \right) B_z \\ S_z \\ B_x v_z - v_x B_z \\ B_y v_z - v_y B_z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дополнительное уравнение описывает соленоидальность магнитного поля:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Как уже было отмечено ранее пересчёт физических переменных их консервативных не может в общем случае быть записан в аналитической форме. Для восстановления физических переменных необходимо численная процедура на основе метода Ньютона. Для этого мы введём искомую переменную  $X = Dh\Gamma$  и значение  $Y = S_x B_x + S_y B_y + S_z B_z$ . В этом случае, используя функцию энергии  $E$  и проведя некоторые тривиальные выкладки, можем записать уравнение

$$E = X - p + \frac{B^2}{2} + \frac{B^2 S^2 - Y^2}{2(B^2 + X)^2},$$

где  $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ . В этом случае метод Ньютона для переменной  $X$  может быть записан в виде

$$X^{k+1} = X^k - \frac{f(X)}{df(X)/dX},$$

где функция  $f(X)$  и её производная  $df/dX$  записываются в виде

$$f(X) = X - E - p + \frac{B^2}{2} + \frac{B^2 S^2 - Y^2}{2(B^2 + X)^2},$$

$$\frac{df}{dX} = \frac{dE}{dX} = 1 - \frac{dp}{dX} - \frac{B^2 S^2 - Y^2}{(B^2 + X)^3},$$

где, введя переменную  $Z = \rho(h - 1)$  и учитывая  $p = p(\rho, Z)$ , выражение  $dp/dX$  вычисляется по формуле

$$\frac{dp}{dX} = \frac{\partial p}{\partial Z} \frac{dZ}{dX} + \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dX}.$$

Перепишем переменную  $Z$  через  $X$ :

$$Z = \rho(h - 1) = \frac{\rho \Gamma^2}{\Gamma^2} (h - 1) = \frac{X - D\Gamma}{\Gamma^2}.$$

Опустим некоторые тривиальные, но громоздкие выкладки, получим:

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{\Gamma^2} + \frac{2}{X^3} \frac{\Gamma(D + 2Z\Gamma) Y^2 [3X(X + B^2) + B^4] + S^2 X^3}{(X + B^2)^3}.$$

Так как мы рассматриваем модель идеального газа, то  $p = \frac{\gamma-1}{\gamma} Z$ , а следовательно  $\partial p / \partial \rho = 0$ . После окончания итерационного процесса компоненты скорости вычисляются по формулам

$$v_x = \frac{1}{X + B^2} \left( S_x + \frac{Y}{X} B_x \right),$$

$$v_y = \frac{1}{X + B^2} \left( S_y + \frac{Y}{X} B_y \right), \quad v_z = \frac{1}{X + B^2} \left( S_z + \frac{Y}{X} B_z \right).$$

После пересчёта Лоренц-фактора  $\Gamma$  и переменной  $Z$  по формуле

$$Z = \frac{X - D\Gamma}{\Gamma^2}$$

пересчитывается значение давления  $p$  и плотности  $\rho$  по формулам

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} Z, \quad \rho = \frac{D}{\Gamma}.$$

Компоненты вектора магнитного поля являются консервативными переменными.

Численный метод на основе схемы Русанова подробно описан в работе [11]. При решении уравнений специальной релятивистской магнитной гидродинамики максимальный наклон характеристики соответствует быстрым магнитным волнам, которые вычисляются по формулам

$$\lambda_{FMW}^{\pm} = \frac{v_x (1 - \omega^2)}{1 - v^2 \omega^2 - R} \pm \frac{\sqrt{((v^2 - 1)\omega^2 + R)((v^2 - v_x^2)\omega^2 + v_x^2 - 1 + R)}}{1 - v^2 \omega^2 - R},$$

где величины  $R$  и  $\omega$  определяются по формулам

$$R = \frac{c_s^2 (\vec{v}, \vec{B})^2}{\rho \left( h + \frac{B^2 + (\vec{v}, \vec{B})^2}{\Gamma^2} \right) \Gamma^2}, \quad \omega = c_s^2 + c_a^2 - c_s^2 + c_a^2,$$

где  $c_a$  — альфвеновская скорость, определяемая уравнением

$$c_a^2 = \frac{\frac{B^2 + (\vec{v}, \vec{B})^2}{\Gamma^2} \rho}{h + \frac{B^2 + (\vec{v}, \vec{B})^2}{\Gamma^2} \rho}.$$

Шаг по времени вычисляется аналогично работе [11].

## 2. ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Верификацию численного метода будем производить на системе классических задач о распаде произвольного релятивистского магнитно гидродинамического разрыва из работ [12, 13] путём сравнения с аналитическим решением из работы [14]. На каждом рисунке изображены (a)  $\rho$  — плотность, (c)  $v_x$  — продольная и (d)  $v_y$  — поперечная скорости, (e)  $B_y$ , (f)  $B_z$  — поперечные компоненты магнитного поля, (b)  $P = p + \frac{B^2/\Gamma^2 + (\vec{v}, \vec{B})^2}{2}$  — полное давление. Во всех вычислительных экспериментах было использовано 800 ячеек и число Куранта  $CFL = 0.1$ . Начальный разрыв находится в точке  $x_0 = 0$ .

### 2.1. Тест Коммиссарова № 1

Будем рассматривать эволюцию замагниченного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 4/3$  на интервале  $[-2; 2]$  до момента времени  $t = 1$ . В начальный момент времени параметры газа выбраны слева:  $\rho^L = 1$  — плотность,  $p^L = 1000$  — давление,  $v_x^L = 0$ ,  $v_y^L = 0$ ,  $v_z^L = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^L = 1$ ,  $B_y^L = 0$ ,  $B_z^L = 0$  — компоненты магнитного поля, и справа:  $\rho^R = 0.1$  — плотность,  $p^R = 1$  — давление,  $v_x^R = 0$ ,  $v_y^R = 0$ ,  $v_z^R = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^R = 1$ ,  $B_y^R = 0$ ,  $B_z^R = 0$  — компоненты магнитного поля. На рис. 1 изображены результаты сравнения численного и аналитического решения.

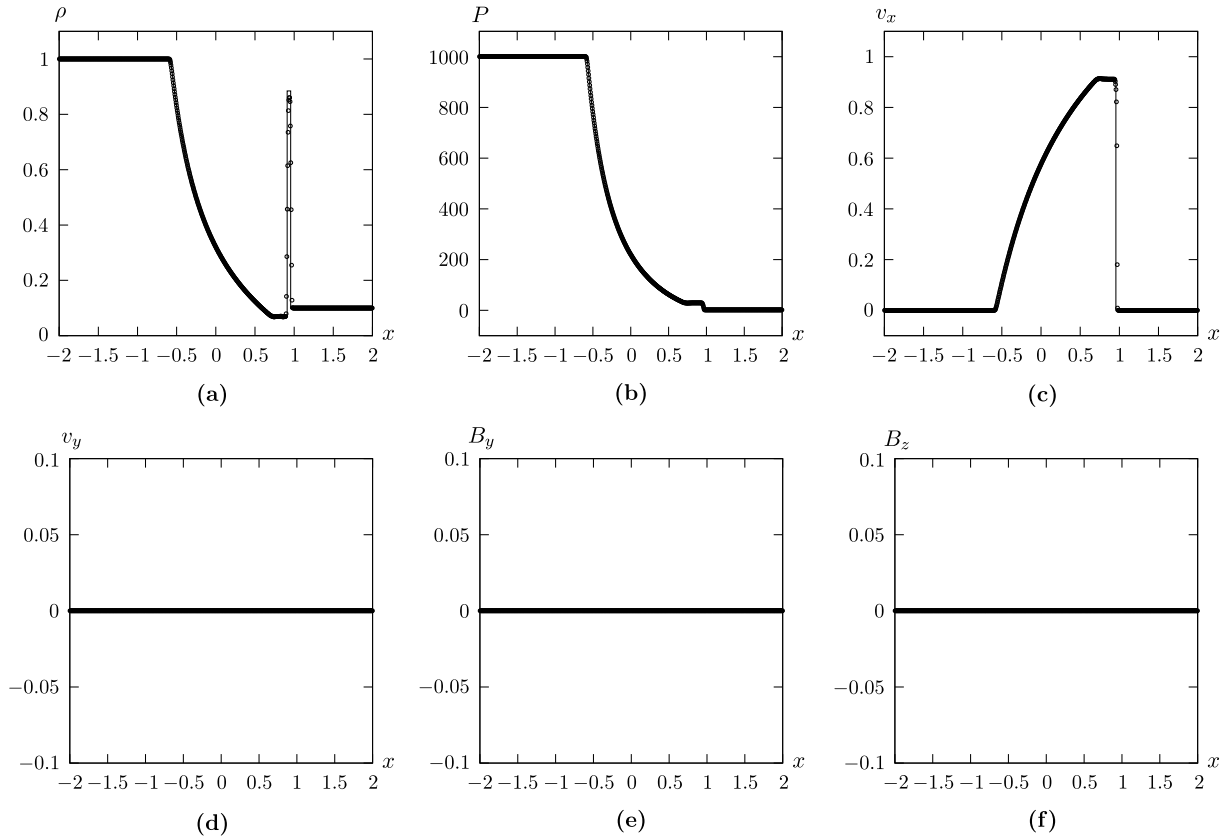


Рис. 1. Тест Коммиссарова № 1. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками

Особенность теста состоит в сильном перепаде давления (три порядка) при постоянном продольном магнитном поле. Влево от контактного разрыва движется волна разрежения, а вправо скачок плотности. Заметим, что на численное решение свободно от артефактов на контактном разрыве и в основании волны разрежения, а также достаточно хорошо воспроизводит скачок плотности как в части местоположения, так и в амплитуде. Дополнительная сложность

такого скачка заключается в том, что его скорость движения существенно релятивистская и формирует ударную волну. Поперечные компоненты магнитного поля и скорости равны нулю и не изменяются в ходе эволюции. Также отметим, что диссипация ударной волны происходит всего на три ячейки, одна из которых отличается от точного решения менее чем на 10 процентов.

## 2.2. Тест Коммиссарова № 2

Будем рассматривать эволюцию замагниченного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 4/3$  на интервале  $[-2; 2]$  до момента времени  $t = 1.22$ . В начальный момент времени параметры газа выбраны слева:  $\rho^L = 1$  — плотность,  $p^L = 1$  — давление,  $v_x^L = 5/\sqrt{26}$ ,  $v_y^L = 0$ ,  $v_z^L = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^L = 10$ ,  $B_y^L = 10$ ,  $B_z^L = 0$  — компоненты магнитного поля, и справа:  $\rho^R = 1$  — плотность,  $p^R = 1$  — давление,  $v_x^R = -5/\sqrt{26}$ ,  $v_y^R = 0$ ,  $v_z^R = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^R = 10$ ,  $B_y^R = -10$ ,  $B_z^R = 0$  — компоненты магнитного поля. На рис. 2 изображены результаты сравнения численного и аналитического решения.

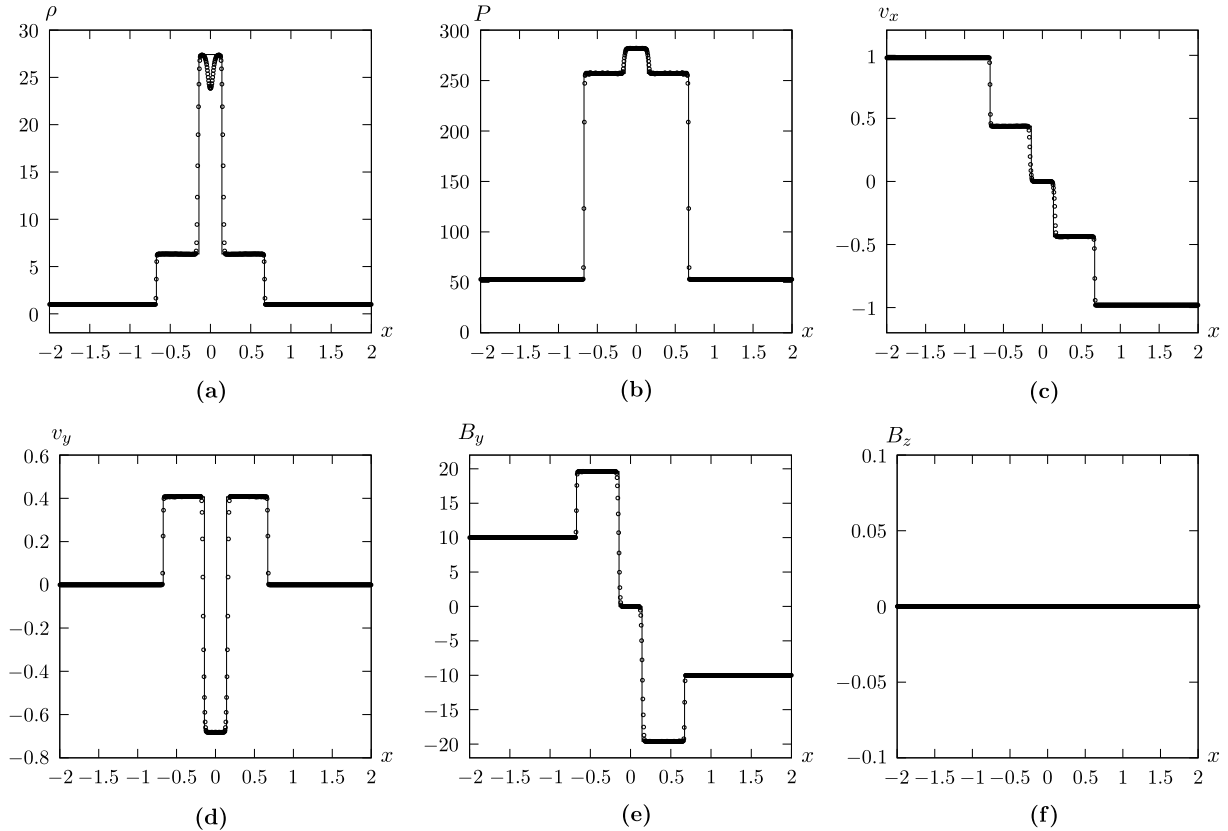


Рис. 2. Тест Коммиссарова № 2. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками

Особенностью теста является столкновение потоков на скорости  $v \simeq 0.98$ . Эволюция газа погружена в магнитное поле с постоянной продольной и разрывной тангенциальной компонентой. Столкновение потоков провоцирует образование энтропийного следа в плотности в области начального разрыва. Медленные и быстрые магнитные волны расходятся в разные стороны с одинаковыми скоростями. Заметим, что в отличие от ряда численных методов [10] численный метод свободен от нефизичных осцилляций, что говорит в пользу разработанного метода. Диссипация на быстрой магнитной волне происходит всего на две ячейки.

### 2.3. Тест Бальзары № 1

Будем рассматривать эволюцию замагниченного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$  на интервале  $[-0.5; 0.5]$  до момента времени  $t = 0.4$ . В начальный момент времени параметры газа выбраны слева:  $\rho^L = 1$  — плотность,  $p^L = 1$  — давление,  $v_x^L = 0$ ,  $v_y^L = 0$ ,  $v_z^L = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^L = 0.5$ ,  $B_y^L = 1$ ,  $B_z^L = 0$  — компоненты магнитного поля, и справа:  $\rho^R = 0.125$  — плотность,  $p^R = 0.1$  — давление,  $v_x^R = 0$ ,  $v_y^R = 0$ ,  $v_z^R = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^R = 0.5$ ,  $B_y^R = -1$ ,  $B_z^R = 0$  — компоненты магнитного поля. На рис. 3 изображены результаты сравнения численного и аналитического решения.

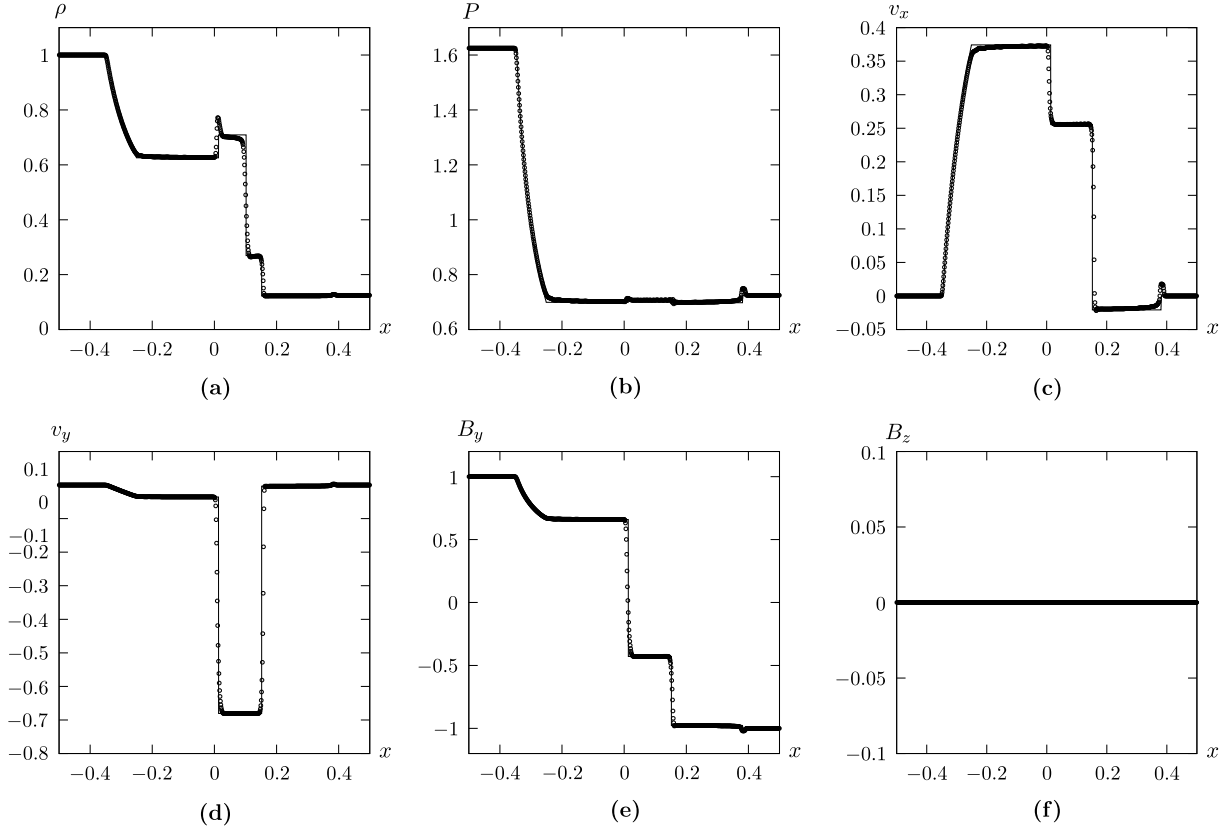


Рис. 3. Тест Бальзары № 1. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками

Данный тест является расширением задачи Брио–Ву [15]. В основании контактного разрыва имеет место небольшой артефакт в виде осцилляции из-за отражения волн от медленной составной волны в области  $x \sim 0.01$ . Медленная составная волна возникает в области доминирования давления магнитного поля над давлением газа и, как следствие, происходит наложение волн. При этом в точном решении в этой области существует только одна волна [14]. В связи с таким наложением волн образуется особенность в виде пика плотности. Его амплитуда соответствует результатам, полученным с помощью других реализаций [10]. Контактный разрыв, ударная волна и правая быстрая магнитная волна воспроизведены без особенностей.

### 2.4. Тест Бальзары № 2

Будем рассматривать эволюцию замагниченного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$  на интервале  $[-0.5; 0.5]$  до момента времени  $t = 0.4$ . В начальный момент времени параметры газа выбраны слева:  $\rho^L = 1$  — плотность,  $p^L = 30$  — давление,  $v_x^L = 0$ ,  $v_y^L = 0$ ,  $v_z^L = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^L = 5$ ,  $B_y^L = 6$ ,  $B_z^L = 6$  — компоненты магнитного поля, и справа:

$\rho^R = 1$  — плотность,  $p^R = 1$  — давление,  $v_x^R = 0$ ,  $v_y^R = 0$ ,  $v_z^R = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^R = 5$ ,  $B_y^R = 0.7$ ,  $B_z^R = 0.7$  — компоненты магнитного поля. На рис. 4 изображены результаты сравнения численного и аналитического решения.

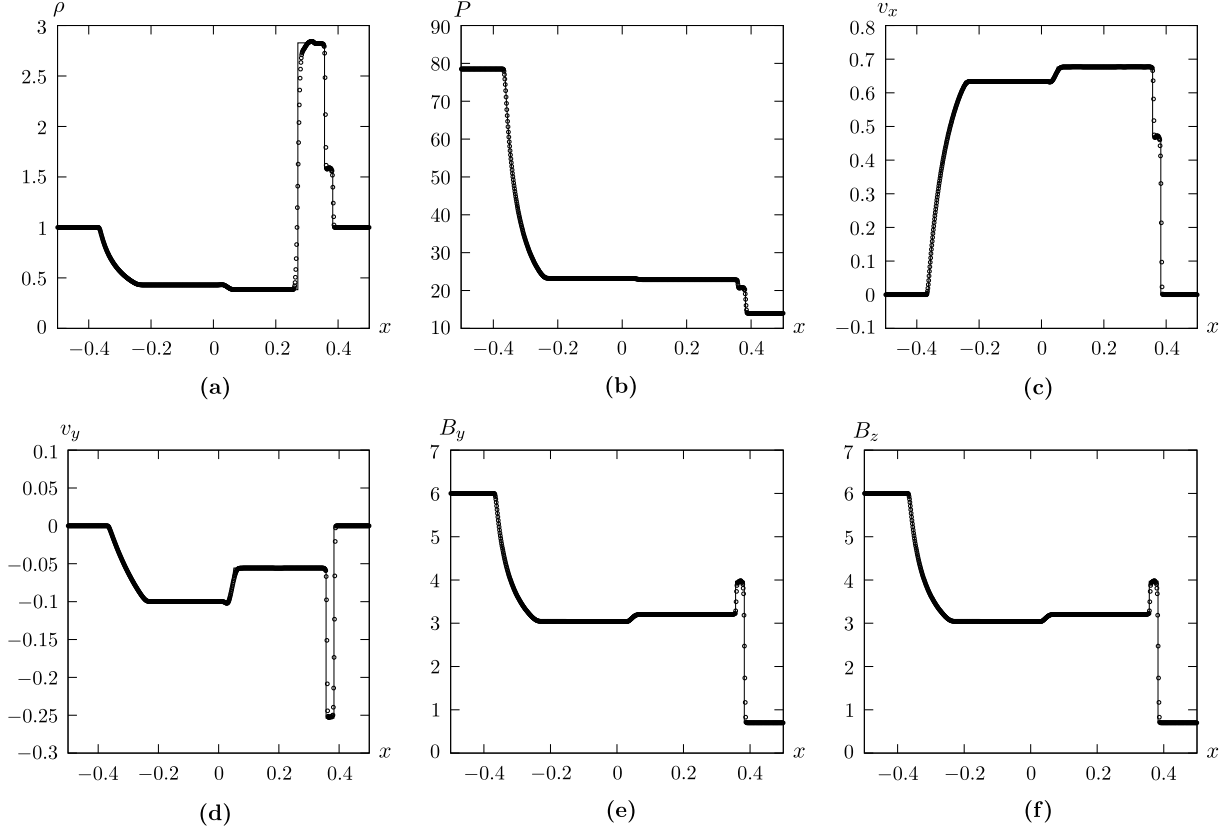


Рис. 4. Тест Бальзары № 2. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками

Тест направлен на моделирование слабой ударной волны в статичном газе постоянной плотности с разрывом в давлении  $p_L/p_R = 30$ . Вблизи контактного разрыва формируется медленная магнитная волна, распространяющаяся вдоль оси  $x$  с Лоренц-фактором  $\Gamma \sim 1.35$ . Отметим, что метод достаточно хорошо и без особенностей воспроизвёл все компоненты решения. Диссипация на быстрой магнитной волне происходит на пять ячеек (трёх для функции плотности) из-за того, что волна достаточно слабая, а также из-за соседства с медленной волной, которая ”забирает на себя” часть диссипации численного решения.

### 2.5. Тест Бальзары № 3

Будем рассматривать эволюцию замагниченного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$  на интервале  $[-0.5; 0.5]$  до момента времени  $t = 0.4$ . В начальный момент времени параметры газа выбраны слева:  $\rho^L = 1$  — плотность,  $p^L = 1000$  — давление,  $v_x^L = 0$ ,  $v_y^L = 0$ ,  $v_z^L = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^L = 10$ ,  $B_y^L = 7$ ,  $B_z^L = 7$  — компоненты магнитного поля, и справа:  $\rho^R = 1$  — плотность,  $p^R = 0.1$  — давление,  $v_x^R = 0$ ,  $v_y^R = 0$ ,  $v_z^R = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^R = 10$ ,  $B_y^R = 0.7$ ,  $B_z^R = 0.7$  — компоненты магнитного поля. На рис. 5 изображены результаты сравнения численного и аналитического решения.

Особенностью теста является формирование сильной ударной волны из-за начального скачка давления (на четыре порядка). Разрыв в магнитном поле осложняет задачу тем, что быстрые и медленные ударные волны распространяются близко друг к другу создавая ”тонкий” пик, воспроизводимый всего на пяти ячейках. Несмотря на ограничения расчётной сетки



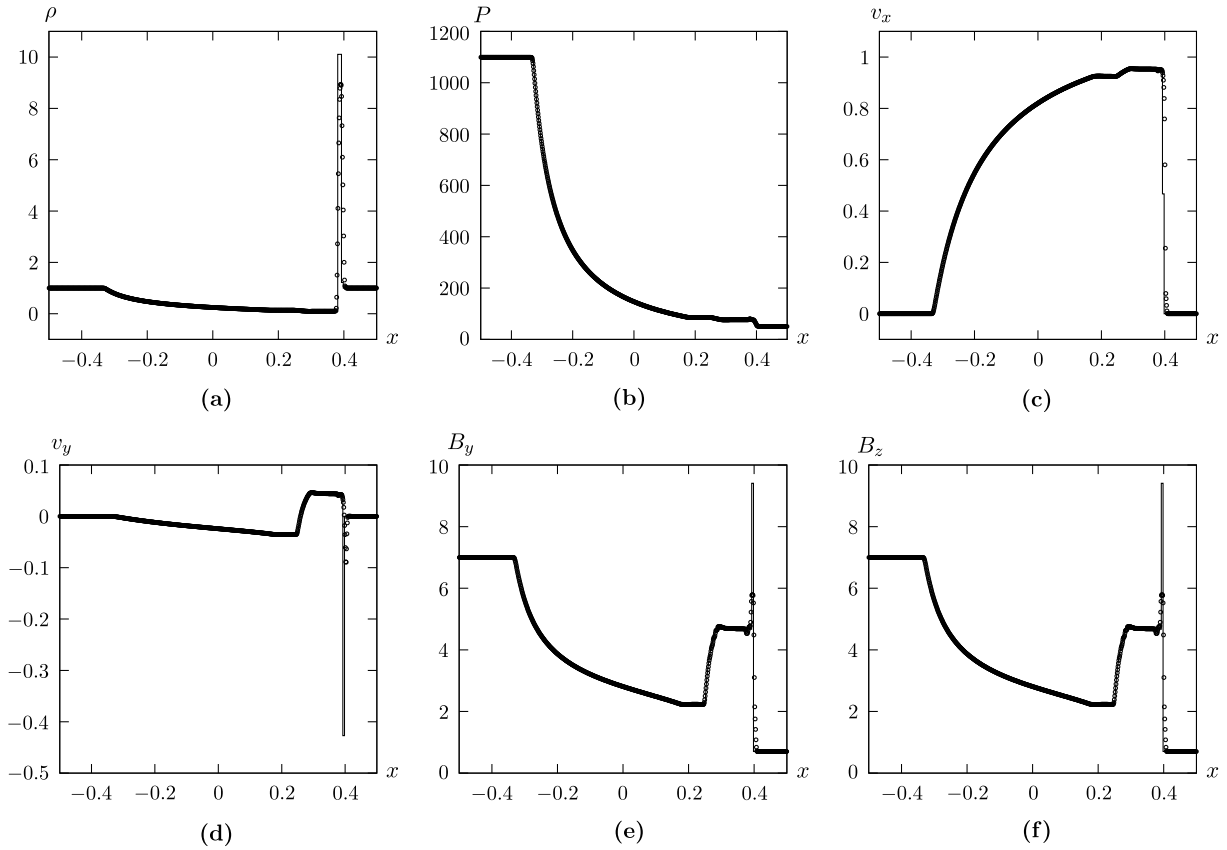


Рис. 5. Тест Бальзары № 3. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками

численный метод воспроизвёл пик плотности как в части местоположения, так и в части амплитуды, а также воспроизвёл обратное течение по оси  $y$ , что видно на графике поперечной скорости  $v_y$ . Из литературы известно [10], что методы с кусочно-параболической реконструкцией не воспроизводят такое обратное течение даже при более подробной сетке. Использование кусочно-кубической реконструкции для воспроизведения обратного поперечного течения требует минимум 3200 ячеек, что в четыре раза больше, чем используется в настоящей работе.

### 2.6. Тест Бальзары № 4

Будем рассматривать эволюцию замагниченного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$  на интервале  $[-0.5; 0.5]$  до момента времени  $t = 0.4$ . В начальный момент времени параметры газа выбраны слева:  $\rho^L = 1$  — плотность,  $p^L = 0.1$  — давление,  $v_x^L = 0.999$ ,  $v_y^L = 0$ ,  $v_z^L = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^L = 10$ ,  $B_y^L = 7$ ,  $B_z^L = 7$  — компоненты магнитного поля, и справа:  $\rho^R = 1$  — плотность,  $p^R = 0.1$  — давление,  $v_x^R = -0.999$ ,  $v_y^R = 0$ ,  $v_z^R = 0$  — компоненты скорости,  $B_x^R = 10$ ,  $B_y^R = -7$ ,  $B_z^R = -7$  — компоненты магнитного поля. На рис. 6 изображены результаты сравнения численного и аналитического решения.

Тест посвящён столкновению газа на ультрарелятивистских скоростях при  $\Gamma \sim 22$ . Столкновение осложнено наличием высокого давления магнитного поля. Помимо быстрых магнитных волн можно увидеть две медленные магнитные волны, движущиеся в разные стороны. Для теста характерны паразитические колебания на ударной волне, что имеет место при использовании других методов [10].

По результатам проведённых одномерных тестов можно сказать, что разработанный численный метод успешно с ними справился. Особенности, полученные в численных решениях, аналогичны при использовании других методик. Метод подтвердил возможность получения

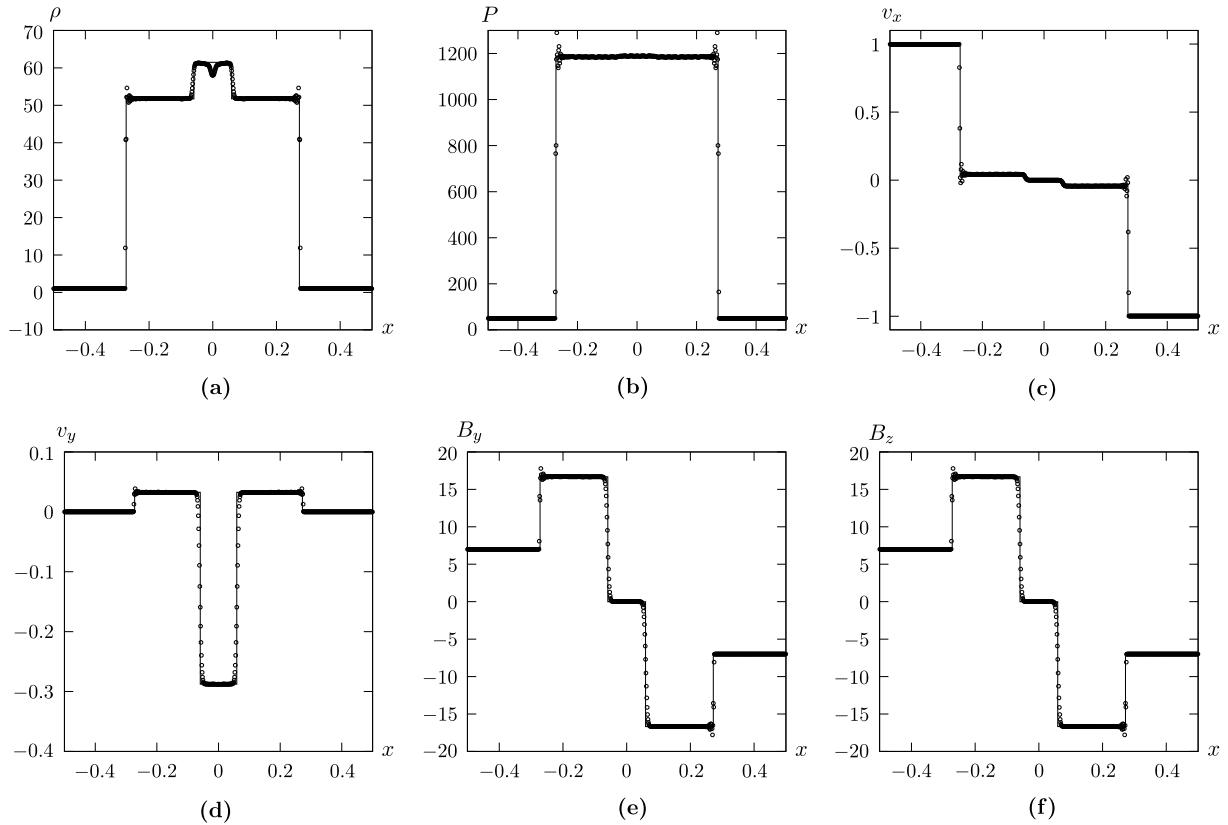


Рис. 6. Тест Бальзары № 4. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками

численного решения с малой диссипацией, а также воспроизвёл формирование обратных течений при образовании сильных ударных волн.

### 3. ДИСКУССИЯ

В этом разделе приведём некоторые замечания по построенной численной схеме и перспективам её применения:

1. В статье использовано уравнение энергии в форме полной энергии. В то же время, используя эквивалентность энергии и массы, мы можем переписать выражение для энергии в виде  $E = \rho h \Gamma^2 - p + \frac{B^2}{2} + \frac{v^2 B^2}{2} - \frac{(\vec{v}, \vec{B})^2}{2} - \rho \Gamma$ . Такой вид используется, например, в работе [8] и эффективен при описании нерелятивистских холодных течений газа. Возможность использования уравнения энергии в двух видах имеет место и в модели специальной релятивистской гидродинамики. В работе [16] было показано, что выбор системы физических переменных и использование уравнения для энтропии позволяет корректно воспроизводить такую область в случае уравнений ньютоновской гидродинамики. По всей видимости такой подход может быть распространён на учёт релятивистских скоростей и магнитного поля.
2. Проблема вырождения гиперболичности уравнений специальной релятивистской магнитной гидродинамики требует привлечения аппарата формулировки уравнений в виде симметрической гиперболической системы. Такой подход сформулирован и развивается С. К. Годуновым и его коллегами для решения задач механики сплошной среды [17–19] в том числе и для уравнений специальной релятивистской магнитной гидродинамики [20, 21]. Условие положительной определённости системы эквивалентно условию

гиперболичности, что позволяет корректно построить численный метод с условиями его применимости.

3. В статье предложена кусочно-параболическая реконструкция физических переменных. Перспективным направлением развития кусочно-полиномиальной реконструкции будет увеличение порядка полинома для кубических функций. В работе [22] на основе WENO схемы предлагается алгоритм построения такой реконструкции.

Разумеется приведенные выше моменты являются дискуссионными, отражают только личную позицию автора и являются планом возможного развития предложенной в работе численной методики.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен новый вариант схемы Русанова для решения уравнений специальной релятивистской магнитной гидродинамики на основе кусочно-параболического представления физических переменных для уменьшения диссипации численного метода. Проведена подробная верификация разработанной схемы на классических одномерных тестах.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00014; <https://rscf.ru/project/23-11-00014/>). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ferrari A. Modeling extragalactic jets // *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 1998. V. 36. P. 539–598.
2. Gabuzda D. C., Pushkarev A. B., Garnich N. N. Unusual radio properties of the BL Lac object 0820+225 // *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 2001. V. 327, N 1. P. 1–9.
3. Gabuzda D. C., Gomez J. L. VSOP polarization observations of the BL Lacertae object OJ 287 // *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 2001. V. 320, N 4. P. L49–L54.
4. Attridge J., Roberts D., Wardle J. Radio Jet-Ambient Medium Interactions on Parsec Scales in the Blazar 1055+018 // *Astrophys. J.* 1999. V. 518, N 2. P. L87–L90.
5. Krause M., Lohr A. The magnetic field along the jets of NGC 4258 // *Astron. Astrophys.* 2004. V. 420, N 1. P. 115–123.
6. Kigure H., Uchida Y., Nakamura M., Hirose S., Cameron R. Distribution of Faraday Rotation Measure in Jets from Active Galactic Nuclei. II. Prediction from Our Sweeping Magnetic Twist Model for the Wiggled Parts of Active Galactic Nucleus Jets and Tails // *Astrophys. J.* 2004. V. 608, N 1. P. 119–135.
7. Anton L., Miralles J., Marti J., Ibanez J., Aloy M., Mimica P. Relativistic magnetohydrodynamics: renormalized eigenvectors and full wave decomposition Riemann solver // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2010. V. 188, N 1. P. 1–31.
8. Leismann T., Anton L., Aloy M., Mueller E., Marti J., Miralles J., Ibanez J. Relativistic MHD simulations of extragalactic jets // *Astron. Astrophys.* 2005. V. 436, N 2. P. 503–526.
9. Nunez-de la Rosa J., Munz C.-D. XTROEM-FV: a new code for computational astrophysics based on very high order finite-volume methods – II. Relativistic hydro- and magnetohydrodynamics // *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 2016. V. 460, N 1. P. 535–559.
10. Lora-Clavijo F., Cruz-Osorio A., Guzman F. CAFE: a new relativistic MHD code // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2015. V. 218, N 2. Article 24.

11. *Kulikov I. M.* Using Piecewise Parabolic Reconstruction of Physical Variables in the Rusanov Solver. I. The Special Relativistic Hydrodynamics Equations // *J. Appl. Ind. Math.* 2023. V. 17, N 4. P. 737–749.
12. *Komissarov S. S.* A Godunov-type scheme for relativistic magnetohydrodynamics // *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 1999. V. 303, N 2. P. 343–366.
13. *Balsara D.* Total Variation Diminishing Scheme for Relativistic Magnetohydrodynamics // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2001. V. 132, N 1. P. 83–101.
14. *Giacomazzo B., Rezzolla L.* The exact solution of the Riemann problem in relativistic magnetohydrodynamics // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 562. P. 223–259.
15. *Brio M., Wu C.* An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics // *J. Comput. Phys.* 1988. V. 75, N 2. P. 400–422.
16. *Kriksin Y. A., Tishkin V. F.* Variational Entropic Regularization of the Discontinuous Galerkin Method for Gasdynamic Equations // *Math. Models Comput. Simul.* 2019. V. 11, N 6. P. 1032–1040.
17. *Godunov S. K.* Thermodynamic formalization of the fluid dynamics equations for a charged dielectric in an electromagnetic field // *Comput. Math. Math. Phys.* 2012. V. 52, N 5. P. 787–799.
18. *Godunov S. K.* About inclusion of Maxwell's equations in systems relativistic of the invariant equations // *Comput. Math. Math. Phys.* 2013. V. 53, N 8. P. 1179–1182.
19. *Godunov S. K., Kulikov I. M.* Computation of discontinuous solutions of fluid dynamics equations with entropy nondecrease guarantee // *Comput. Math. Math. Phys.* 2014. V. 54, N 6. P. 1012–1024.
20. *Freistuehler H., Trakhinin Yu.* Symmetrizations of RMHD equations and stability of relativistic current-vortex sheets // *Class. Quantum Gravity.* 2013. V. 30, N 8. Article 085012.
21. *Trakhinin Yu.* Local Existence of Contact Discontinuities in Relativistic Magnetohydrodynamics // *Siberian Adv. Math.* 2020. V. 30, N 2. P. 55–76.
22. *Lee D., Faller H., Reyes A.* The Piecewise Cubic Method (PCM) for computational fluid dynamics // *J. Comput. Phys.* 2017. V. 341, N 1. P. 230–257.

UDC 519.4

**USING PIECEWISE PARABOLIC RECONSTRUCTION OF PHYSICAL VARIABLES IN RUSANOV'S SOLVER. II. SPECIAL RELATIVISTIC MAGNETOHYDRODYNAMICS EQUATIONS**

© 2024 I. M. Kulikov

*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch,  
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mail: kulikov@ssd.sccc.ru

Received 10.06.2023, revised 14.07.2023, accepted 07.02.2024

**Abstract.** Rusanov's scheme for solving hydrodynamic equations is one of the most robust in the class of Riemann solvers. It was previously shown that Rusanov's scheme based on piecewise parabolic reconstruction of primitive variables gives a low-dissipative scheme relevant to Roe and Harten–Lax–Van Leer solvers when using a similar reconstruction. Moreover, unlike these solvers, the numerical solution is free from artifacts. In the case of equations of special relativistic magnetohydrodynamics, the spectral decomposition for solving the Riemann problem is quite complex and does not have an analytical solution. The present paper proposes the development of Rusanov's scheme using a piecewise parabolic reconstruction of primitive variables to use in the equations of special relativistic magnetohydrodynamics. The developed scheme was verified using eight classical problems on the decay of an arbitrary discontinuity that describe the main features of relativistic magnetized flows.

**Keywords:** computational astrophysics, relativistic magnetohydrodynamics, numerical method, Rusanov solver, piecewise parabolic reconstruction.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.103

## REFERENCES

1. A. Ferrari, "Modeling extragalactic jets," *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **36**, 539–598 (1998).
2. D. C. Gabuzda, A. B. Pushkarev, and N. N. Garnich, "Unusual radio properties of the BL Lac object 0820+225," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **327** (1), 1–9 (2001).
3. D. C. Gabuzda and J. L. Gomez, "VSOP polarization observations of the BL Lacertae object OJ 287," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **320** (4), L49–L54 (2001).
4. J. Attridge, D. Roberts, and J. Wardle, "Radio jet–ambient medium interactions on parsec scales in the Blazar 1055+018," *Astrophys. J.* **518** (2), L87–L90 (1999).
5. M. Krause and A. Lohr, "The magnetic field along the jets of NGC 4258," *Astron. Astrophys.* **420** (1), 115–123 (2004).
6. H. Kigure, Y. Uchida, M. Nakamura, S. Hirose, and R. Cameron, "Distribution of Faraday rotation measure in jets from active galactic nuclei. II. Prediction from our sweeping magnetic twist model for the wiggled parts of active galactic nucleus jets and tails," *Astrophys. J.* **608** (1), 119–135 (2004).
7. L. Anton, J. Miralles, J. Marti, J. Ibanez, M. Aloy, and P. Mimica, "Relativistic magnetohydrodynamics: renormalized eigenvectors and full wave decomposition Riemann solver," *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **188** (1), 1–31 (2010).
8. T. Leismann, L. Anton, M. Aloy, E. Mueller, J. Marti, J. Miralles, and J. Ibanez, "Relativistic MHD simulations of extragalactic jets," *Astron. Astrophys.* **436** (2), 503–526 (2005).

9. J. Nunez-de la Rosa and C.-D. Munz, “XTROEM-FV: A new code for computational astrophysics based on very high order finite-volume methods — II. Relativistic hydro- and magnetohydrodynamics,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **460** (1), 535–559 (2016).
10. F. Lora-Clavijo, A. Cruz-Osorio, and F. Guzman, “CAFE: A new relativistic MHD code,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **218** (2), 24 (2015).
11. I. M. Kulikov, “Using piecewise parabolic reconstruction of physical variables in the Rusanov solver. I. The special relativistic hydrodynamics equations,” *J. Appl. Ind. Math.* **17** (4), 737–749 (2023).
12. S. S. Komissarov, “A Godunov-type scheme for relativistic magnetohydrodynamics,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **303** (2), 343–366 (1999).
13. D. Balsara, “Total variation diminishing scheme for relativistic magnetohydrodynamics,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **132** (1), 83–101 (2001).
14. B. Giacomazzo and L. Rezzolla, “The exact solution of the Riemann problem in relativistic magnetohydrodynamics,” *J. Fluid Mech.* **562**, 223–259 (2006).
15. M. Brio and C. Wu, “An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics,” *J. Comput. Phys.* **75** (2), 400–422 (1988).
16. Y. A. Kriksin and V. F. Tishkin, “Variational entropic regularization of the discontinuous Galerkin method for gasdynamic equations,” *Math. Models Comput. Simul.* **11** (6), 1032–1040 (2019).
17. S. K. Godunov, “Thermodynamic formalization of the fluid dynamics equations for a charged dielectric in an electromagnetic field,” *Comput. Math. Math. Phys.* **52** (5), 787–799 (2012).
18. S. K. Godunov, “About inclusion of Maxwell’s equations in systems relativistic of the invariant equations,” *Comput. Math. Math. Phys.* **53** (8), 1179–1182 (2013).
19. S. K. Godunov and I. M. Kulikov, “Computation of discontinuous solutions of fluid dynamics equations with entropy nondecrease guarantee,” *Comput. Math. Math. Phys.* **54** (6), 1012–1024 (2014).
20. H. Freistuehler and Yu. Trakhinin, “Symmetrizations of RMHD equations and stability of relativistic current-vortex sheets,” *Class. Quantum Gravity* **30** (8), 085012 (2013).
21. Yu. Trakhinin, “Local existence of contact discontinuities in relativistic magnetohydrodynamics,” *Sib. Adv. Math.* **30** (2), 55–76 (2020).
22. D. Lee, H. Faller, and A. Reyes, “The Piecewise Cubic Method (PCM) for computational fluid dynamics,” *J. Comput. Phys.* **341** (1), 230–257 (2017).