

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВОЛЬФРАМОВОЙ ПЛАСТИНКЕ И ТОНКОМ СЛОЕ ЕГО ПАРОВ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРЕВЕ С УЧЁТОМ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ

© 2024 Г. Г. Лазарева^a, В. А. Попов^b, В. А. Окишев^c

*Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо–Маклая, 6, г. Москва 117198, Россия*

E-mails: ^alazareva-gg@rudn.ru, ^bv.a.popov94@gmail.com, ^cokishev-va@rudn.ru

Поступила в редакцию 26.04.2023 г.; после доработки 05.05.2023 г.;
принята к публикации 07.06.2023 г.

В работе впервые представлена новая модель распределения тока в образце вольфрама и испаряемом веществе при нагреве поверхности электронным пучком. Модель основана на решении уравнений электродинамики в цилиндрической системе координат с использованием модельного распределения температуры в образце и тонком слое испаряемого вольфрама. Проведён анализ модели в упрощённой постановке при постоянных значениях электрического сопротивления и термоэдс в газе и металле. Показана зависимость амплитуды и изолиний термотоков от распределения температуры на поверхности образца. Параметры модели взяты из экспериментов на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН.

Ключевые слова: математическое моделирование, термотоки, вольфрам, импульсный нагрев, метод верхней релаксации, стенд BETA, материал дивертора.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.104

ВВЕДЕНИЕ

На экспериментальном стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН [1], получены новые экспериментальные данные об эрозии поверхности вольфрамового образца при импульсном воздействии электронным пучком. Натурный эксперимент постоянно сопровождается численным [2]. Работа посвящена расчёту тока в образце, который рассматривается как возможный источник вращения вещества, который наблюдается в эксперименте. Влияние на возникновение тока оказывает разность электрического сопротивления и термоэдс в металле и его парах. В областях с перепадами параметров возникает электродвижущая сила. Важно, что в газе и в расплаве электродвижущая сила отличается. Поэтому возникает ненулевое ускоряющее напряжение на замкнутом контуре через газ и расплав, которое порождает ток по этому контуру. Без использования математического моделирования сложно предсказать, в каких областях может наблюдаться наибольший ток. Ток, взаимодействуя с магнитным полем, приводит к движению вещества в целом. Модель нагрева вольфрама основана на решении в области образца уравнений электродинамики [3]. Рассматривается случай, когда уравнения на поля и токи выписаны для образца вольфрама в цилиндрической системе координат с учётом электродвижущих сил, возникающих в газе над образцом [4]. Предполагается, что характерное время изменения велико по сравнению с временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи. Развитие модели предполагает уточнение расчёта удельной электропроводности газа и термоэдс. Планируется введение зависимости этих величин от температуры в металле, расплаве и газе.

В дальнейшем предполагается включение учёта зависимости этих параметров от плотности газа, получаемой из решения системы уравнений для теплопроводного газа. В таком случае можно дать оценки, в каких областях газа и расплава будет хорошая проводимость и высокое напряжение. На текущем этапе исследований процесс испарения вольфрама рассматривается без цепочки фазовых переходов «твёрдое состояние — жидкость — газ». Формулировка уравнения состояния от металла до газового состояния предложено в [5].

Процесс импульсного нагрева в течении долгого времени исследуется и используется в промышленности для лазерного спекания порошков, лазерной и электронной сварки [6]. Физические процессы, сопровождающие импульсный нагрев для целей производства материалов, сильно отличаются от моделируемых в этой работе. В представленной задаче мощности и длительности потока энергии существенно избыточны для промышленного применения. Например, наносекундный лазер не создаёт газового облака в процессе облучения, поскольку характерная дистанция разлёта паров будет порядка 1 мкм.

Постановка задачи и математическая модель являются новыми и представлены впервые. Практическая направленность работы требует, чтобы постановка модельной задачи как можно точно соответствовала условиям эксперимента. Результаты расчётов итоговой модели будут использоваться для сравнения с экспериментальными данными, полученными на экспериментальном стенде ВЕТА в ИЯФ СО РАН.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В экспериментах на установке ВЕТА образцы прокатанного вольфрама подвергались воздействию осесимметричного электронного пучка [7]. Электроны с энергией 80-90 кэВ нагревают материал в слое, который является тонким по сравнению с характерной глубиной нагрева материала. Тепло, поглощённое поверхностью, распространяется в материал. Образец имеет размеры 25 мм x 25 мм и типичную толщину 4 мм. Поскольку за такое короткое время образец нагревается на глубину нескольких сотен микрон, область моделирования представляла собой поперечное сечение образца (толщина образца 3 мм) и тонкого слоя паров (толщина слоя 3 мм): область 12 мм x 6 мм (см. рис. 1). Численная модель распределения тока пучка в нагреваемом образце и в парах вольфрама в упрощённом виде сводится к решению системы уравнений Максвелла.

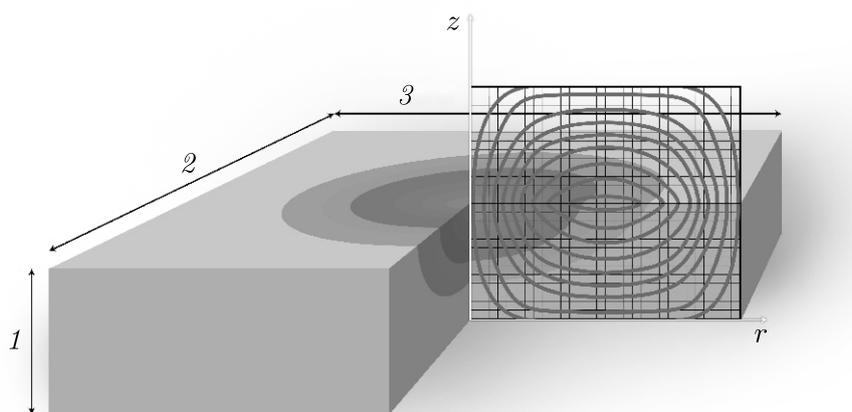


Рис. 1. Схема эксперимента: 1 — 3 мм, 2 — 25 мм, 3 — 25 мм

Процесс распространения тока можно считать стационарным, так как характерное время изменения велико по сравнению со временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи [8]. Учёт процесса испарения гарантирует ограничение роста

температуры в образце, что соответствует экспериментальным данным [2]. Система уравнений Максвелла для расчёта тока в образце модифицирована для стационарного случая в цилиндрической системе координат.

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{C} \vec{j}, \\ \nabla \times \vec{E} &= 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \cdot \vec{j} &= 0, \quad \vec{E} = \rho_e \vec{j}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_e — удельное сопротивление, \vec{B} — векторное магнитное поле, $\vec{E} = (E_r, E_\phi, E_z)$ — векторное электрическое поле, $\vec{j} = (j_r, j_\phi, j_z)$ — ток.

Введём векторный потенциал тока $F = (F_r, F_\phi, F_z)$:

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{F} \quad (2)$$

и запишем систему уравнений (1) в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) . Заметим, что производные по углу ϕ будут равны нулю в силу симметрии задачи относительно поворота [9, 10]. Выразим ток через векторный потенциал тока, учитывая нулевую производную по углу. Так как отсутствует вихревое электрическое поле, то ток течёт только по осевому и радиальному направлениям, и $E_\phi = 0$. Отсюда следует, что $j_\phi = 0$:

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\phi \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_\phi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для описания тока достаточно только одной функции F_ϕ , описывающей "завихрённость" тока. С учётом нулевой производной по углу ϕ и отсутствия вихревого электрического поля $j_\phi = 0$ из обобщённого закона Ома

$$\vec{j} = (\vec{E} - S\nabla T - \nabla\mu/e)/\rho_e. \quad (3)$$

Получено уравнение на "завихрённость" для одной нетривиальной компоненты. Здесь μ химический потенциал электронов, S — термоэдс и e заряд электрона. Для этого к левой и правой частям уравнения (2) применён векторный оператор rot:

$$\nabla \times (\rho_e \vec{j}) = \nabla \times (\vec{E} - S\nabla T - \nabla\mu/e) = \nabla S \times \nabla T.$$

В силу потенциальности электрического поля и химического потенциала выражение сильно упрощается. Аналогично ранее рассмотренному случаю для термотоков в образце [3] для (2) получено:

$$\frac{\partial^2 F_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial F_\phi}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} + F_\phi \left(\frac{1}{r\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

После введения полного тока $I(r, z) = 2\pi r F_\phi$ уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial r} + \frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z} = \frac{2\pi r}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (4)$$

Обозначив $\Phi = \ln(\rho_e/e)$ для ∇ — оператора дифференцирования в ортогональной системе координат (r, z) , можно записать задачу в виде:

$$\begin{aligned} \rho_e \nabla^2 I + \rho_e \nabla I \nabla \Phi &= 2\pi r \nabla S \nabla T, \quad 0 < r < r_{\max}, \quad 0 < z < z_{\max}, \\ \Phi &= \ln(\rho_e/r), \quad I|_{t=0} = 0, \quad I|_{(0,z)} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{(r_{\max}, z)} &= 0, \quad \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{(r, z_{\max})} = 0, \quad I|_{(r, 0)} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Характерные значения параметров приведены в таблице.

Параметр	Характерное значение	Размерность	Описание параметров
r_0	1	мм	Характерный радиус
t_0	10^2	мкс	Характерное время
T_0	10^3	К	Температура
W_0	10^3	Вт/мм ²	Удельный поток энергии
I_0	10^3	А	Ток
j_0	10^3	А/мм ²	Плотность тока
S_0	10^{-2}	Вт/К	Термоэдс
ρ_{e0}	10^{-2}	Ом · мм	Удельное сопротивление

Рассмотрим задачу (5) для случая, когда ρ_e, S постоянны в металле и в газе. В качестве значений выберем значения близкие к данным для температуры 6000 К:

$$\rho_e^{met} = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{мм}, \quad \rho_e^{gas} = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{мм}, \quad S^{met} = 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{К}}, \quad S^{gas} = 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{К}}.$$

В таком случае уравнение (4) упрощается, так как ρ_e, S постоянны во всей расчётной области за исключением границы раздела сред. В уравнении остаются два члена, зависящих от ρ_e, S :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{\partial I}{\partial z} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} + \frac{2\pi r}{\rho_e} \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Заметим, что последние два слагаемых не равны нулю только на поверхности металла. Таким образом, задача сводится к формированию возмущения на прямой линии $z = z_0$ внутри области и картины его распространения в подобласти, соответствующие металлу и газу. В рассматриваемой постановке задачи выявляется такая особенность модели, как необходимость определять амплитуду тока через производную функций сопротивления и термоэдс в точке разрыва. При расчёте токов без учёта испаряющегося газа [3] граничные условия являлись определяющей характеристикой для определения токов. В начально-краевой задаче (5) решение определяется правой частью уравнения, так как рассматриваемая область содержит источники тока за счёт учёта термоэмиссии. Однородные граничные условия для тока в образце и газе над образцом упрощают проведение численных расчётов. Безусловно, такой выбор граничных условий является не точным. Но точность такого приближения можно повысить, увеличивая расчётную область. Это не противоречит постановке задачи, так как в моделируемом эксперименте образец закреплён в установке большого внутреннего диаметра (10 см), заполненной техническим вакуумом. Постановка задачи (5) позволяет не определять ток на границе испаряемого газа. На первый план выходит расчёт термоэмиссии.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача только в области образца была решена ранее [3]. Решить задачу только в области паров в настоящее время невозможно, так как постановка граничных условия для термотоков в газе над поверхностью металла вызывает большие трудности. В рассматриваемой постановке проблема постановки граничных условий снята, но возникает ряд сложностей. Амплитуду тока нельзя определить точно для непрерывной задачи с любой степенью упрощения, так как производные в точке разрыва принимают бесконечное значение. Без регуляризации нельзя приступать к численному решению задачи, так как можно получить решение, зависящее от шага h расчётной сетки. Для использования схем сплошного счёта учёт условий на границе между материалом пластинки и парами необходимо преобразовать уравнение (5). В слагаемом

$\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z}$ оба множителя терпят разрыв на поверхности образца. Производная тока по нормали к поверхности меняет знак, так как на границе металл-газ токи имеют максимум. При этом решение уравнения (5) имеет положительные вторые производные всюду вне поверхности образца. Производная по нормали к поверхности удельной проводимости — это производная от разрывной функции, так как удельная проводимость металла на два порядка выше проводимости газа, не зависимо от способа её определения. Аналогично, слагаемое $\frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r}$ в правой части уравнения (5) содержит производную от разрывной функции термоэдс. Производные по z от разрывных функций вычисляются с использованием дельта-функции Дирака, которая для случая разрывных коэффициентов на границе сред реализуется [11] следующим образом:

$$\delta_h(z - z_0) = \frac{1}{h} f\left(\frac{z - z_0}{h}\right), \quad f\left(\frac{z - z_0}{h}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\pi \frac{z - z_0}{2h}\right)\right), & \left|\frac{z - z_0}{h}\right| \leq 2, \\ 0, & \left|\frac{z - z_0}{h}\right| > 2. \end{cases}$$

Предложенная [11] замена производной в точке разрыва на непрерывную функцию $\delta(z - z_0)$, умноженную на число, равное скачку термоэдс на промежутке $[z_0 - 2h, z_0 + 2h]$ адаптирована к рассматриваемой задаче. После регуляризации правой части уравнение (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial r} + \frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z} = \\ = \frac{2\pi r}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial r} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)_{z \neq z_0} + \delta(z - z_0) [S]_{z=z_0} \right\} \right). \end{aligned}$$

Так как производная $\frac{\partial I}{\partial z}$ терпит разрыв в точке максимума функции I на границе раздела сред, слагаемое $\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z}$ требует сглаживания $\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z}$. Использование дельта-функции в этом случае недостаточно. Это слагаемое следует преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z} = \frac{\partial I}{\partial z} \left(\left\{ \frac{\partial (\ln(\rho_e/r))}{\partial z} \right\}_{z \leq z_0 - \varepsilon, z \geq z_0 + \varepsilon} + \left\{ \frac{\partial P(\rho_e/r)}{\partial z} \right\}_{z_0 - \varepsilon < z < z_0 + \varepsilon} \right).$$

Здесь $P(\rho_e/r)$ — кубический полином такой, что $\left(\frac{\partial^2 P(\rho_e/r)}{\partial z^2} \right)_{z=z_0 \pm \varepsilon} = \left(\frac{\partial^2 \ln(\rho_e/r)}{\partial z^2} \right)_{z=z_0 \pm \varepsilon}$. В рассматриваемом случае постоянных параметров среды для сглаживания достаточно использовать сигмоиду вида $P(\rho_e/r) = \ln(\rho_e^{met}/r) \frac{1}{1 - e^{z-z_0}} + \ln(\rho_e^{gas}/r)$, $\varepsilon = 0.05$ мм. Тогда в результате такого сглаживания можно получить уравнение, дающее адекватное решение на границе раздела сред:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial r} + \frac{\partial I}{\partial z} \left\{ \frac{\partial (\ln(\rho_e/r))}{\partial z} \right\}_{z \leq z_0 - \varepsilon, z \geq z_0 + \varepsilon} + \frac{\partial I}{\partial z} \left\{ \frac{\partial P(\rho_e/r)}{\partial z} \right\}_{z_0 - \varepsilon < z < z_0 + \varepsilon} = \\ = \frac{2\pi r}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial r} \left\{ \frac{\partial S}{\partial z} \right\}_{z \neq z_0} - \frac{\partial T}{\partial r} \delta(z - z_0) [S]_{z=z_0} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Такая регуляризация будет служить отправной точкой для дальнейших методических исследований. Результаты расчётов подтверждают, что в случае увеличения разрыва между удельным сопротивлением в металле и в газе амплитуда тока возрастает. Для решения полной системы уравнений Максвелла (5) в многомерном случае известны [12, 13] численные методы решения задач электродинамики с учётом нелинейных эффектов, приводящих к значительному изменению характеристик электромагнитного поля. Для решения упрощённого варианта системы (5) вида (6) можно использовать как хорошо изученные итерационные методы [14, 15],

конечно-элементные и конечно-объёмные методы [16, 17], так и готовые библиотеки [18]. В дальнейшем планируется использовать для решения задачи обобщённый метод минимальных остатков (GMRES) [19]. Решение уравнения (3) методом верхней релаксации [20] на каждом шаге по времени позволяет построить экономичный алгоритм при параметре релаксации [21]. Увеличим расчётную область в два раза по осевому направлению. Зададим на сетке с узлами $r_i = ih$, $i = 1, \dots, N_r$, $z_k = kh$, $k = 1, \dots, 2N_z$ сеточные функции $T_{ik} = T(r_i, z_k)$, $I_{ik}^n = (I(r_i, z_k))^n$. На этом этапе решается стационарная задача, используется значение $T_{ik} = T_{ik}^n$ на заданном шаге по времени, на котором достигаются достаточно высокие значения температуры. Пусть сеточные функции, лежащие на прямой $z = z_0$, имеют индексы (i, k_0) . Тогда конечно-разностная схема для системы уравнений (6) имеет вид:

$$\begin{aligned}
ar_{i,k} &= \frac{1}{4} \left(\ln(\rho_e/r)_{i+1,k}^n - \ln(\rho_e/r)_{i-1,k}^n \right), \\
az_{i,k} &= \frac{1}{4} \left\{ \ln(\rho_e/r)_{i,k+1}^n - \ln(\rho_e/r)_{i,k-1}^{n+1} \right\}_{k < k_0-l, k > k_0+l} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \left\{ P(\rho_e/r)_{i,k+1}^n - P(\rho_e/r)_{i,k-1}^{n+1} \right\}_{k_0-l \leq k \leq k_0+l}, \\
F_{i,k}^n &= \frac{1}{4} \frac{2\pi r_i}{\rho_e(T_{i,k})} \left((S(T_{i+1,k}) - S(T_{i-1,k})) (T_{i,k+1} - T_{i,k-1}) - \right. \\
&\quad \left. - (T_{i+1,k} - T_{i-1,k}) (S(T_{i,k+1}) - S(T_{i,k-1})) \right)_{k < k_0-2, k > k_0+2} - \\
&\quad - h (T_{i+1,k} - T_{i-1,k}) \left(1 + \cos \left(\pi \frac{k - k_0}{2} \right) \right) (S(T_{i,k_0+1}) - S(T_{i,k_0}))_{k_0-2 \leq k \leq k_0+2}, \\
I_{i,k}^{n+1} &= (1 - \omega) I_{i,k}^n + \frac{\omega}{4} \left[I_{i-1,k}^{n+1} (1 - ar_{i,k}) + I_{i,k-1}^{n+1} (1 - az_{i,k}) + \right. \\
&\quad \left. + I_{i+1,k}^n (1 + ar_{i,k}) + I_{i,k+1}^n (1 + az_{i,k}) - F_{i,k}^n \right], \quad i = 2, \dots, N_r - 1, \quad k = 2, \dots, 2N_z - 1, \\
I_{i,1} &= I_{1,k} = 0, \quad I_{i,2N_z} = I_{i,2N_z-1}, \quad I_{N_r,k} = I_{N_r-1,k}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Наряду с другими преимуществами, метод верхней релаксации интересен удобством использования в цилиндрических координатах. Принцип выражения искомого элемента через соседние по схеме точек вида «крест» универсально и не зависит от выбора системы координат. Можно заметить, что задача (5) и схема (7) содержит деление на радиус только в аргументе функции логарифма в расчёте коэффициента $\Phi_{i,j}$. Так как функция логарифма при росте аргумента возрастает довольно медленно, то деление на величины порядка $h/2$ при расчётах в окрестности оси симметрии не приводит к возникновению особенностей решения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Для анализа и валидации представленной модели рассмотрена упрощённая постановка. Аксиально-симметричная постановка задачи не предполагает сведение к одномерному случаю даже при постоянной по радиусу температуре на поверхности образца. Поэтому расчёты проводились для постоянных параметров материала и модельного распределения температуры, различных в металле и парах над образцом. Использовано модельное распределение температуры испаряемого вольфрама в рассматриваемом тонком слое паров 3 мм над образцом, повторяющее температуру поверхности. В образце нагрев вглубь металла на 0.5 мм задаётся линейно, что соответствует расчётам температуры в образце на основе решения задачи Стефана. На поверхности пластинки заданы три типа радиального распределения (рис. 2(a)): линейное, нормальное и расчётное. Расчётное распределение температуры, полученное в результате решения задачи Стефана с нелинейными коэффициентами и краевым условием на поверхности нагрева, даёт график 3 решения с особенностями (рис. 2(b)). Основной вклад в вид решения вносит коэффициент теплопроводности, который входит в граничное условие и

под знак производных по пространству [22]. При этом зависимость коэффициента теплопроводности терпит разрыв в точке плавления и имеет разный характер в металле и расплаве. Распределения температуры на поверхности, а значит и в образце и парах, имеют близкие значения. Тем не менее, полученные амплитуды термотока (рис. 2(b)) существенно различаются. Это обусловлено тем, что радиальная производная температуры входит в правую часть уравнения (4). Следовательно, особенности распределения температуры задают ток. Сильный эффект усиления амплитуды тока наблюдается в результате учёта неоднородности расчётного распределения температуры, которое обусловлено влиянием свободной границы расплав-металл. Такие особенности полученного решения согласуются с физикой процесса.

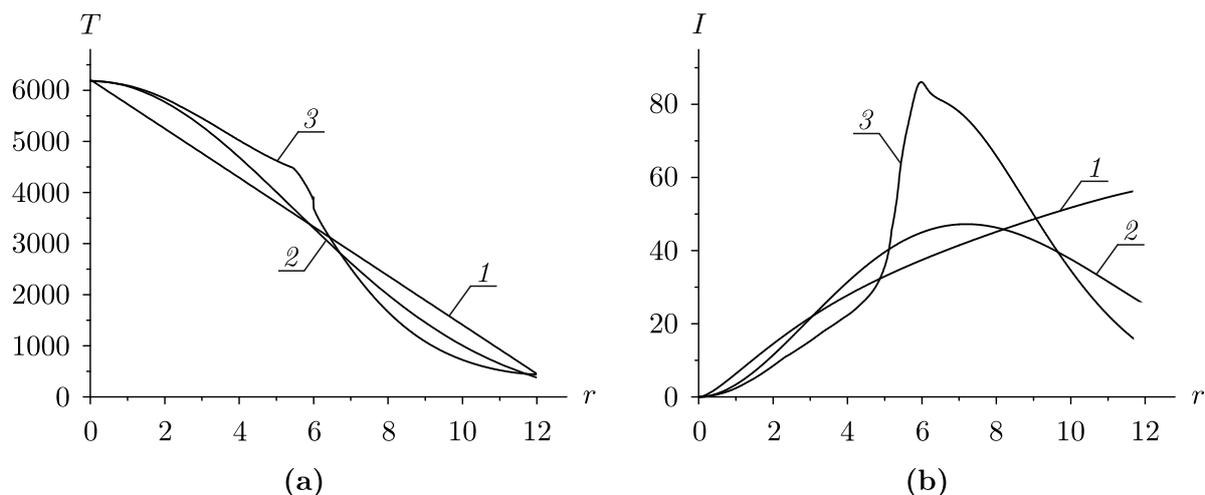


Рис. 2. Графики радиального распределения на поверхности пластинки температуры (а) и соответствующего тока (б). Линейное 1, нормальное 2 и расчётное 3 распределение

В результате расчётов получена картина замкнутых изолиний термотоков (рис. 3). Для линейного распределения температуры (рис. 3(a)) максимум лежит вне образца, поэтому изолинии замыкаются вне рассматриваемой области. В случае нормального распределения (рис. 3(b)) картина изолиний близка к ожидаемой, но симметрична относительно максимума тока. Для расчётного распределения температуры (рис. 3(c)) получена интересная картина изолиний, более соответствующая физике процесса. Левый и правый столбцы на рис. 3 показывают результаты расчётов для регуляризации уравнения (3). Левый столбец рис. 3 показывает, что расчёты уравнения без учёта особенностей приводят к недопустимому получению двух максимумов тока над и под поверхностью образца, чьи значения зависят от параметров сетки. Правый столбец демонстрирует существование только одного максимума. Для случая переменных электрического сопротивления и термоэдс подбор функции сглаживания потребует дополнительной работы.

Можно предположить, что термоэдс металла при высоких температурах выше рассматриваемых нами значений. Расчёты показывают, что с ростом термоэдс металла амплитуда тока будет прямо пропорционально убывать. На рис. 4(a) представлены распределения радиальной компоненты тока для значений термоэдс в металле S^{met} . Амплитуда тока будет убывать и в случае роста проводимости металла (рис. 4(b)), что показывают расчёты с изменяющимся значением электрического сопротивления ρ_e^{met} . В отличие от термоэдс, даже небольшое изменение разности электрического сопротивления в газе и металле приводит к большому изменению амплитуды тока. Поэтому наиболее важным является уточнение значений проводимости материала, которую можно определить как зависимость от температуры [4]. В дальнейшем проводимость паров можно будет выразить через температуру и плотность теплопроводного газа, течение которого зависит от возникающего в нём электрического поля. Таким образом,

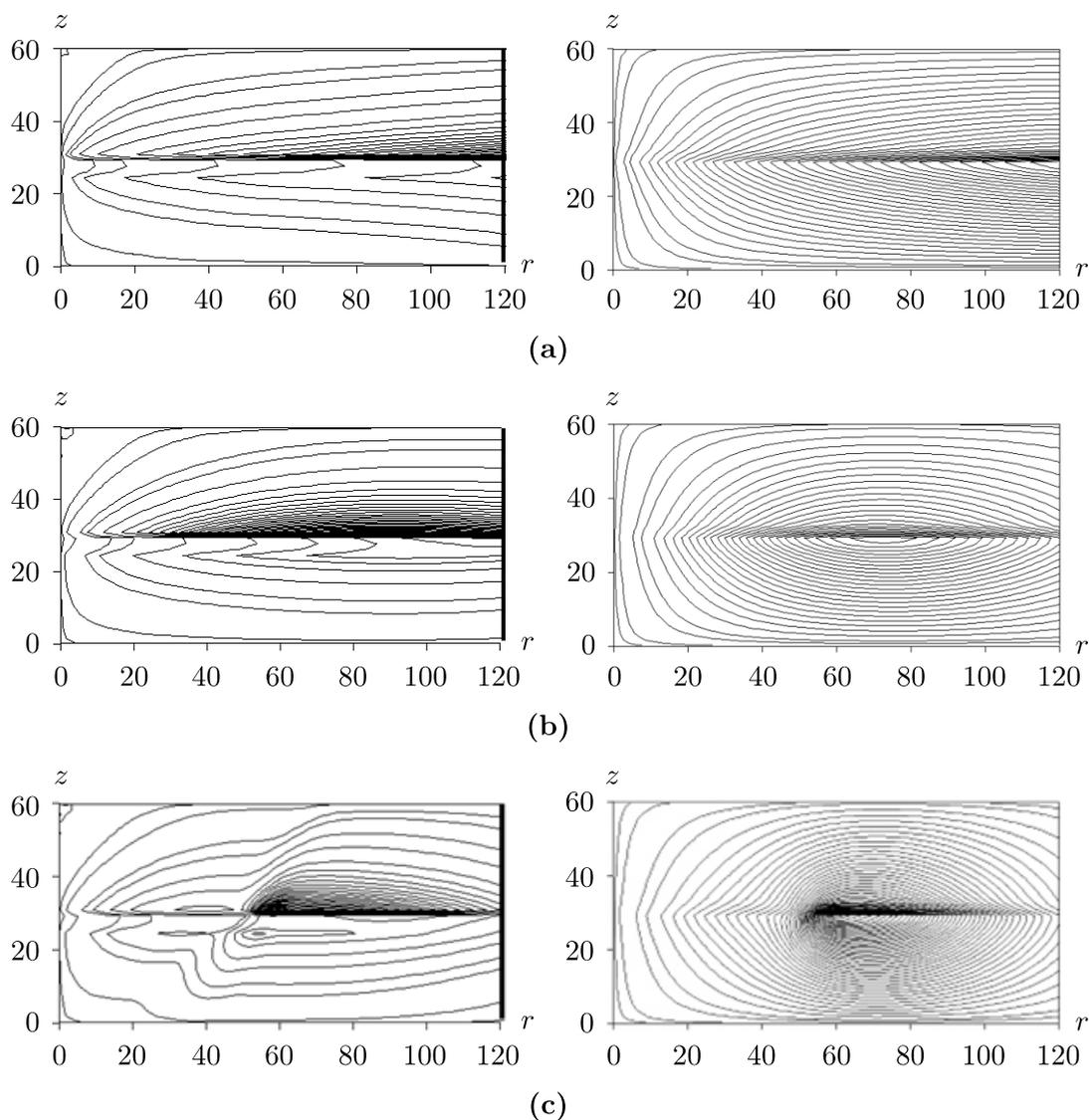


Рис. 3. Распределение радиальной компоненты тока на поперечном срезе пластинки и области над ней для линейного (а), нормального (b) и расчётного (с) распределения температуры на поверхности. Результаты расчётов для уравнения (левый столбец) и регуляризованного уравнения (правый столбец)

расчёты показали существенное влияние особенностей температуры, важность точности определения электрического сопротивления и термоэдс в газе и металле.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена новая постановка задачи и новая математическая модель распределения тока в образце вольфрама и испаряемом веществе при нагреве поверхности электронным пучком. Проведён анализ модели в упрощённой постановке при постоянных значениях электрического сопротивления и термоэдс в газе и металле. Показано влияние амплитуды и изолиний термотокков от распределения температуры на поверхности образца, значений электрического сопротивления и термоэдс. Использовано модельное распределение температуры испаряемого вольфрама, повторяющее температуру поверхности, что в рассматриваемом тонком слое паров соответствует физике процесса. В образце модельное распределение температуры линейно приближает расчётные значения нагрева вглубь металла. Результаты проведённого мо-

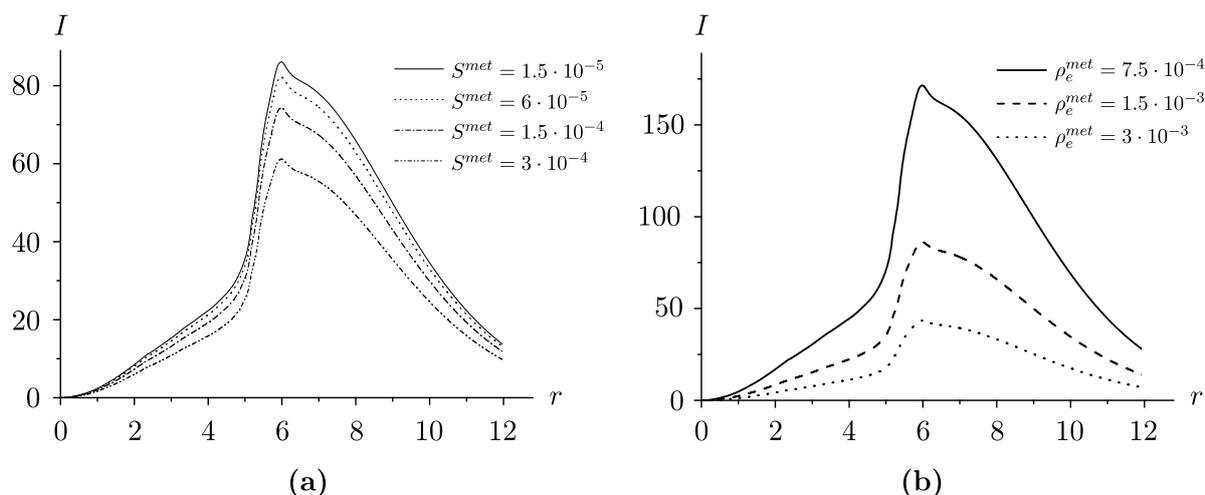


Рис. 4. Распределение радиальной компоненты тока на поперечном срезе пластинки и области над ней для расчётного распределения температуры на поверхности при различных значениях термоэдс (а) и электрического сопротивления металла (б)

делирования показывают, что выбор приближения параметров материала оказывают большое влияние на решение. В зависимости от профиля температуры на поверхности получены различные решения на границе сред. Показано, что с ростом термоэдс металла амплитуда тока будет прямо пропорционально убывать, с ростом электрического сопротивления металла ток тоже будет убывать. Дальнейшее развитие модели предполагает уточнение расчёта удельной электропроводности газа, термоэдс металла, включение численного расчёта температуры и плотности газа.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00134; <https://rscf.ru/project/23-21-00134/>). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunев Y., Vasilyev A. Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771. Article 060004.
2. Arakcheev A. S., Apushkinskaya D. E., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Lazareva G. G., Maksimova A. G., Popov V. A., Snytnikov A. V., Trunев Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam // Fusion Eng. Des. 2018. V. 132. P. 13–17.
3. Lazareva G. G., Popov V. A., Arakcheev A. S., Burdakov A. V., Shwab I. V., Vaskevich V. L., Maksimova A. G., Ivashin N. E., Oksogoeva I. P. Mathematical simulation of the distribution of the electron beam current during pulsed heating of a metal target // J. Appl. Ind. Math. 2021. V. 24, N 2. P. 97–108.
4. Popov V. A., Arakcheev A. S., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Trunев Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N. Theoretical simulation of the closed currents near non-uniformly strongly heated surface of tungsten due to thermo-emf // Phys. Plasmas. 2022. V. 29, N 3. Article 033503.

5. Годунов С. К., Киселев С. П., Куликов И. М., Мали В. И. Моделирование ударно-волновых процессов в упругопластических материалах на различных (атомный, мезо и термодинамический) структурных уровнях. Ижевск: ИКИ, 2014.
6. Li X., Guan Y. Theoretical fundamentals of short pulse laser–metal interaction: A review // *Nanotechnol. Precis. Eng.* 2020. V. 3, N 3. P. 105–125; DOI: 10.1016/j.npe.2020.08.001
7. Lazareva G. G., Arakcheev A. S., Vasilyev A. A., Maksimova A. G. Numerical simulation of tungsten melting under fusion reactor-relevant high-power pulsed heating // *Smart Innov. Syst. Technol.* 2019. V. 133. P. 41–51.
8. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
9. Бухгольц Г. Расчёт электрических и магнитных полей. М.: Иностранная литература, 1961.
10. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Иностранная литература, 1954.
11. Walden J. On the approximation of singular source terms in differential equations // *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* 1999. V. 15. N 4. P. 503–520.
12. Загонов В. П. Математическое моделирование электромагнитного воздействия импульсных полей на сложные технические системы // *Функционирование и развитие сложных народнохозяйственных, технических, энергетических, транспортных систем, систем связи и коммуникаций.* 1998. С. 392–394.
13. Жуковский М. Е. Самосогласованная квазитрёхмерная модель радиационного возбуждения электромагнитных полей // *Матем. моделирование.* 1996. Т. 8, № 4. С. 3–20.
14. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. Mathematical modeling of inhomogeneous electric field impact on a liquid crystal layer // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2022. V. 103, N 1. Article e202200248; DOI: 10.1002/zamm.202200248
15. Садовская О. В., Садовский В. М. Анализ неустойчивого состояния жидкого кристалла на основе модели Озеена–Франка // *Вестн. БашГУ.* Т. 27, № 3. С. 525–529.
16. Droniou J. Finite volume schemes for diffusion equations: introduction to and review of modern methods // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2014. V. 24, N 8. P. 1575–1619; DOI: 10.1142/S0218202514400041
17. Vassilevski Yu., Terekhov K., Nikitin K., Kapyrin I. *Parallel Finite Volume Computation on General Meshes*, 1st ed. Cham: Springer, 2020.
18. Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A. A New Hydrodynamic Code with Explicit Vectorization Instructions Optimizations that Is Dedicated to the Numerical Simulation of Astrophysical Gas Flow. I. Numerical Method, Tests, and Model Problems // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2019. V. 243, N 1. Article 4; DOI: 10.3847/1538-4365/ab2237
19. Eisenstat S. C., Elman H. C., Schultz M. H. Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations // *SIAM J. Numer. Anal.* 1983. V. 20, N 2. P. 345–357.
20. Самарский А. А., Николаев Е. С. *Методы решения сеточных уравнений.* М.: Наука, 1978.
21. Стронгин Р. Г., Гергель В. П., Гришагин В. А., Баркалов К. А. *Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации.* М.: МГУ, 2013.
22. Lazareva G. G., Arakcheev A. S., Vasilyev A. A., Maksimova A. G. Numerical simulation of tungsten melting under fusion reactor-relevant high-power pulsed heating // *Smart Innov. Syst. Technol.* 2019. V. 133. P. 41–51.

UDC 519.63

**MATHEMATICAL MODEL OF CURRENT DISTRIBUTION IN A
TUNGSTEN PLATE DURING PULSED HEATING**© 2024 G. G. Lazareva^a, V. A. Popov^b, V. A. Okishev^c*RUDN University, Moscow, 117198 Russia*E-mails: ^alazareva-gg@rudn.ru, ^bv.a.popov94@gmail.com, ^cokishev-va@rudn.ru

Received 26.04.2023, revised 05.05.2023, accepted 07.06.2023

Abstract. In this paper, for the first time, we present a new model of current distribution in a tungsten sample and of substance evaporation when the surface is heated by an electron beam. The model is based on solving electrodynamic equations in a cylindrical coordinate system using a model temperature distribution in the sample and a thin layer of evaporated tungsten. The model is analyzed in a simplified formulation at constant values of electrical resistance and thermoelectric power in gas and metal. The dependence of the amplitude and isolines of thermal currents on the distribution of temperature at the sample surface is shown. The model parameters are taken from experiments at the Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA) facility, created at the Budker Institute of Nuclear Physics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Keywords: mathematical modeling, thermal current, tungsten, pulsed heating, upper relaxation method, BETA stand, divertor material.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.104

REFERENCES

1. L. Vyacheslavov, A. Arakcheev, A. Burdakov, I. Kandaurov, A. Kasatov, V. Kurkuchekov, K. Mekler, V. Popov, A. Shoshin, D. Skovorodin, Y. Trunev, and A. Vasilyev, “Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads,” *AIP Conf. Proc.* **1771**, 060004 (2016).
2. A. S. Arakcheev, D. E. Apushkinskaya, I. V. Kandaurov, A. A. Kasatov, V. V. Kurkuchekov, G. G. Lazareva, A. G. Maksimova, V. A. Popov, A. V. Snytnikov, Yu. A. Trunev, A. A. Vasilyev, and L. N. Vyacheslavov, “Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam,” *Fusion Eng. Des.* **132**, 13–17 (2018).
3. G. G. Lazareva, V. A. Popov, A. S. Arakcheev, A. V. Burdakov, I. V. Shwab, V. L. Vaskevich, A. G. Maksimova, N. E. Ivashin, and I. P. Oksogoeva, “Mathematical simulation of the distribution of the electron beam current during pulsed heating of a metal target,” *J. Appl. Ind. Math.* **24** (2), 97–108 (2021).
4. V. A. Popov, A. S. Arakcheev, I. V. Kandaurov, A. A. Kasatov, V. V. Kurkuchekov, Yu. A. Trunev, A. A. Vasilyev, and L. N. Vyacheslavov, “Theoretical simulation of the closed currents near non-uniformly strongly heated surface of tungsten due to thermo-emf,” *Phys. Plasmas* **29** (3), 033503 (2022).
5. S. K. Godunov, S. P. Kiselev, I. M. Kulikov, and V. I. Mali, *Modeling of Shock Wave Processes in Elastoplastic Materials at Various (Atomic, Meso, and Thermodynamic) Structural Levels* (IKI, Izhevsk, 2014) [in Russian].
6. X. Li and Y. Guan, “Theoretical fundamentals of short pulse laser–metal interaction: A review,” *Nanotechnol. Precis. Eng.* **3** (3), 105–125 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.npe.2020.08.001>

7. G. G. Lazareva, A. S. Arakcheev, A. A. Vasilyev, and A. G. Maksimova, “Numerical simulation of tungsten melting under fusion reactor-relevant high-power pulsed heating,” *Smart Innovation Syst. Technol.* **133**, 41–51 (2019).
8. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York—London, 1962; Mir, Moscow, 1965).
9. H. Buchholz, *Elektrische und magnetische Potentialfelder* (Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957; Inostr. Lit., Moscow, 1961).
10. W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity* (McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1950; Inostr. Lit., Moscow, 1954).
11. J. Walden, “On the approximation of singular source terms in differential equations,” *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* **15** (4), 503–520 (1999).
12. V. P. Zagonov, “Mathematical modeling of the electromagnetic impact of pulsed fields on complex technical systems,” in *Functioning and Development of Complex National Economic, Technical, Energy, Transport Systems, Communication Systems* (1998), 392–394 [in Russian].
13. M. E. Zhukovsky, “Self-consistent quasi-three-dimensional model of radiative excitation of electromagnetic fields,” *Mat. Model.* **8** (4), 3–20 (1996) [in Russian].
14. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Mathematical modeling of inhomogeneous electric field impact on a liquid crystal layer,” *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* **103** (1), e202200248 (2022). <https://doi.org/10.1002/zamm.202200248>
15. O. V. Sadovskaya, and V. M. Sadovskii, “Analysis of the unstable state of a liquid crystal based on the Oseen—Frank model,” *Vestn. BashGU* **27** (3), 525–529 (2022) [in Russian].
16. J. Droniou, “Finite volume schemes for diffusion equations: Introduction to and review of modern methods,” *Math. Models Methods Appl. Sci.* **24** (8), 1575–1619 (2014). <https://doi.org/10.1142/S0218202514400041>
17. Yu. Vassilevski, K. Terekhov, K. Nikitin, and I. Kapyrin, *Parallel Finite Volume Computation on General Meshes* (Springer, Cham, 2020).
18. I. Kulikov, I. Chernykh, and A. Tutukov, “A new hydrodynamic code with explicit vectorization instructions optimizations that is dedicated to the numerical simulation of astrophysical gas flow. I. Numerical method, tests, and model problems,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **243** (1), 4 (2019). <https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab2237>
19. S. C. Eisenstat, H. C. Elman, and M. H. Schultz, “Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations,” *SIAM J. Numer. Anal.* **20** (2), 345–357 (1983).
20. A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Methods for Solving Grid Equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
21. R. G. Strongin, V. P. Gergel’, V. A. Grishagin, and K. A. Barkalov, *Parallel Calculations in Global Optimization Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
22. G. G. Lazareva, A. S. Arakcheev, A. A. Vasilyev, and A. G. Maksimova, “Numerical simulation of tungsten melting under fusion reactor-relevant high-power pulsed heating,” *Smart Innovation Syst. Technol.* **133**, 41–51 (2019).