УДК 517.928.4:517.929.5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И МНОГОПИКОВЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

© **2024 Г. А. Чумаков[1,3a], Н. А. Чумакова[2,3b]**

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,
[2]*Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН,*
просп. Акад. Лаврентьева, 5, г. Новосибирск 630090, Россия,
[3]*Новосибирский государственный университет,*
ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]chumakov@math.nsc.ru, [b]chum@catalysis.ru

Поступила в редакцию 25.09.2023 г.; после доработки 21.01.2024 г.;
принята к публикации 07.02.2024 г.

Работа посвящена изучению нелинейной динамической системы, состоящей из автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя быстрыми переменными x и y, и одной медленной z. Уравнение для переменной z содержит малый параметр μ, причём при $\mu = 0$ система *быстрых движений* входит в однопараметрическое семейство двумерных подсистем с параметром z. Предполагается, что у каждой подсистемы существует грубое периодическое решение l_z. Кроме того, в полной системе существует грубое периодическое решение L, которое при стремлении μ к нулю стремится к периодическому решению l_{z_0} при некотором $z = z_0$. В данной работе на трансверсальной площадке к L в плоскости (y, z) построено двумерное точечное отображение Пуанкаре, для которого доказана теорема существования инвариантного многообразия для стационарной точки, соответствующей периодическому решению L. Это периодическое решение имеет инвариантное многообразие на гарантированном интервале по переменной y и этот интервал отделён от нуля при стремлении μ к нулю. Доказанная теорема позволяет сформулировать достаточные условия существования и отсутствия многопиковых автоколебаний в рассмотренной динамической системе. В качестве примера приложения полученных результатов в работе рассмотрена кинетическая модель каталитической реакции окисления водорода на никеле.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, малый параметр, предельный цикл, инвариантное многообразие, отображение Пуанкаре, кинетическая модель, многопиковые автоколебания.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.107

ВВЕДЕНИЕ

Критические явления — такие как гистерезис стационарных состояний, кинетические и термокинетические автоколебания скорости химических превращений, регулярные и хаотические автоколебания — наблюдаются в различных гомогенных и гетерогенных каталитических системах (например, см. [1–7]). Интенсивные исследования нелинейных эффектов в динамике гетерогенных каталитических реакций проводились в последней трети XX века. В кинетических экспериментах наблюдались сложные автоколебания скорости в гетерогенных каталитических реакциях окисления водорода на металлах платиновой группы или оксида углерода на металлических или цеолитных катализаторах [8–10]. Позднее обнаружены автоколебания скорости реакции окисления углеводородов на никеле и исследованы возможные механизмы изменения структуры и активности катализатора в условиях реакции [11–13].

Развитие качественных методов исследования динамических систем [14–20], асимптотических методов [21, 22] и методов вычислительной математики [23–25] расширило возможности изучения сложных процессов с сосредоточенными и распределёнными параметрами.

В работах [26, 27] показано, что сложные автоколебания и хаос могут определяться кинетическими моделями малой размерности, которые учитывают основные черты процесса — нелинейные стадии реакции и влияние реакционной среды на активность катализатора. Был предложен *принцип генерирования сложной динамики* для динамических систем с одной медленной и двумя быстрыми переменными. В данной работе проводится обоснование принципа генерирования многопиковых автоколебаний.

Рассмотренные в [28–32] кинетические модели автоколебаний скорости гетерогенных каталитических реакций и, в частности, модель Слинько—Чумакова [2, 26, 27, 33] основываются на автономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений разной размерности. При качественном исследовании принципиально важным является сведение математических моделей к динамическим системам в фазовом пространстве с двумя быстрыми и одной медленной переменными:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z), \\ \dot{y} = g(x, y, z), \\ \dot{z} = \mu h(x, y, z), \end{cases} \tag{1}$$

где функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z) \in C^2(R^3)$, а μ — положительный малый параметр.

Следуя принципу генерирования сложной динамики, рассмотрим при $\mu = 0$ *вырожденную* систему (или систему *быстрых движений*), которая представляет собой однопараметрическое семейство двумерных динамических подсистем *полной* системы (1) с параметром z:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z), \\ \dot{y} = g(x, y, z), \end{cases} \qquad z = \text{const}, \tag{2}$$

и предположим, что известна глобальная динамика системы (2) при каждом фиксированном z.

Допустим, что при z из некоторого интервала (z^-, z^+) существует однопараметрическое семейство грубых периодических решений системы (2), а именно: при каждом значении параметра z в двумерном фазовом пространстве системы быстрых движений существует грубое периодическое решение $l_z = l_z(t)$ с периодом $p(z)$ такое, что для любого t

$$l_z(t) = l_z\big(t + p(z)\big).$$

Требуется найти периодическое решение $L = L(t)$ полной системы (1), которое при $\mu \to 0$ сходится к одному из периодических решений $l_z(t)$ для некоторого $z = z_0$, т. е. имеет место топологический предел

$$L \xrightarrow[\mu \to 0]{} l_{z_0}.$$

Введём функцию ν переменной z

$$\nu(z) = \int\limits_0^{p(z)} h(l_z(t), z)dt.$$

Верна следующая теорема Понтрягина—Родыгина [34].

Теорема 1. *Пусть при каждом z периодическое решение $l_z(t)$ системы быстрых движений (2) является грубым, и пусть при $z = z_0$ выполняются условия*

$$\nu(z_0) = 0, \qquad \nu'_z(z_0) \neq 0. \tag{3}$$

Тогда существуют $\mu_0 > 0$ и $\rho > 0$ такие, что при любом $\mu \leqslant \mu_0$ полная система (1) *имеет только одно периодическое решение $L(t)$, которое*

1) *целиком лежит в ρ-окрестности замкнутой кривой $(l_{z_0}(t), z_0)$;*

2) *является грубым предельным циклом;*

3) *все траектории полной системы, находящиеся в ρ-окрестности траектории L, либо выходят из этой окрестности, либо стремятся к L.*

Цель данной работы: *оценить в фазовом пространстве размеры инвариантного многообразия вида $z = \varphi(x, y, \mu)$ грубого периодического решения L полной системы при стремлении параметра μ к нулю.*

Для решения этой задачи сначала рассмотрим трансверсальную площадку π к циклу L и с помощью решений полной системы построим отображение Пуанкаре на π. Далее исследуем размеры инвариантного относительно этого отображения многообразия грубой стационарной точки, соответствующей периодическому решению L.

1. ОТОБРАЖЕНИЕ ПУАНКАРЕ

Перепишем полную систему в векторном виде

$$\dot{\xi} = F(\xi), \tag{4}$$

где $\xi = (x, y, z)$, $F(\xi) = (f(x, y, z), g(x, y, z), \mu h(x, y, z)) \in C^2(R^3)$.

Пусть $\eta(t, \xi^0)$ — решение системы (4) с начальными данными $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$ при $t = 0$.

Лемма 1 [15]. *Предположим, что функция $\gamma(t) = \eta(t, 0)$ является периодической с минимальным периодом $p > 0$, причём $\gamma(0) = 0$. Обозначим через π гиперплоскость*

$$\pi = \{\xi \in R^3 : (\xi, F(0)) = 0\},$$

ортогональную кривой $l = \{\xi \in R^3 : \xi = \gamma(t), 0 \leqslant t \leqslant p\}$ в точке $\xi = 0$. Тогда в окрестности точки $\xi = 0$ существует единственная функция $t = \tau(\xi^0)$ из класса C^1 при малых $\|\xi^0\|$ такая, что $\eta(t, \xi^0) \in \pi$ при $t = \tau(\xi^0)$ и $\tau(0) = p$, т. е.

$$\big(\eta\big(\tau(\xi^0), \xi^0\big), F(0)\big) = 0. \tag{5}$$

Отображение Пуанкаре. Из леммы 1 следует, что при $\xi^0 \in \pi$ и малых $\|\xi^0\|$ можно задать отображение Пуанкаре

$$T\colon\ \xi^1 = \eta(\tau(\xi^0), \xi^0), \tag{6}$$

которое переводит одну окрестность точки $\xi^0 = 0$ в гиперплоскости π на другую.

Для того, чтобы вычислить собственные значения матрицы Якоби отображения (6) в точке $\xi^0 = 0$, рассмотрим временно произвольное ξ^0 (т. е. не будем требовать, чтобы $\xi^0 \in \pi$).

Матрица $H(t, \xi^0) = \partial_{\xi^0}\eta(t, \xi^0)$ удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\frac{d}{dt}H(t, \xi^0) = \partial_{\xi^0}F(\eta(t, \xi^0)) \cdot H(t, \xi^0), \qquad H(0, \xi^0) = I,$$

где $\partial_{\xi^0}F(\eta(t, \xi^0))$ – матрица Якоби функции $F(\eta(t, \xi^0))$. В частности, при $\xi^0 = 0$ имеем

$$\frac{d}{dt}H(t, 0) = \partial_{\xi^0}F(\gamma(t)) \cdot H(t, 0), \qquad H(0, 0) = I. \tag{7}$$

Заметим, что $H(t, 0)$ — *фундаментальная матрица* решений системы (7) и матрица коэффициентов $\partial_{\xi^0}F(\gamma(t))$ — периодическая с периодом p. Тогда, согласно теории Флоке, существуют периодическая матричная функция $K(t) \equiv K(t + p)$ и постоянная матрица D такие, что

$$H(t, 0) = K(t)\, e^{Dt}.$$

Поскольку $\tau(0) = p$ и $K(p) = K(0) = I$, то

$$H(\tau(0), 0) = H(p, 0) = e^{Dp}.$$

Собственные значения e_1, e_2, e_3 матрицы $H(p, 0) = e^{Dp}$ называются *мультипликаторами* периодического решения $\xi = \gamma(t)$. Отметим, что $e_k \neq 0$, так как $H(p, 0)$ — невырожденная матрица. Пусть $e_1 = 1$. Величины $\alpha_k = p^{-1} \ln e_k$, $k = 1, 2, 3$, называются *характеристическими показателями* периодического решения $\xi = \gamma(t)$.

Поскольку $\gamma(0) = 0$, то после линейной замены переменных ξ можно привести отображение (6) к виду

$$T\colon\ \xi^1 = A\xi^0 + \Theta(\xi^0), \qquad \xi^o \in \pi,$$

где A является (3×3)-матрицей, $\Theta(\xi^0) \in C^1$ при малых $\|\xi^0\|$ и

$$\Theta(0) = \partial_{\xi^0}\Theta(0) = 0.$$

Собственные значения матрицы A являются мультипликаторами периодической траектории $\gamma(t)$. Следовательно,

$$a \equiv \|A\| < e^{\alpha},$$

при условии, что $|\operatorname{Re}\alpha_k| < \alpha$ для $k = 2, 3$. Поэтому, если норма $\|\xi^0\|$ мала, то значение $\xi^1 = T\xi^0$ определено и имеет место оценка

$$\|\xi^1\| < e^{\alpha}\|\,\xi^0\|. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть $T : \xi^0 \to \xi^1$ — отображение Пуанкаре, определённое равенством (6), где $\xi^0, \xi^1 \in \pi$. Пусть e_1, e_2 и e_3 – мультипликаторы периодического решения $\gamma(t)$. Тогда один из них, например e_1, равен 1, а e_2 и e_3 являются собственными значениями матрицы Якоби отображения T в точке $\xi^0 = 0$. Кроме того, если система координат выбрана так, что*

$$F(0) = (1, 0, 0)^{\top}$$

и π определяется равенством (5), то матрица $H(p, 0) = (h_{jk})$, $j, k = 1, 2, 3$, будет иметь вид

$$H(p, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -\partial\tau/\partial\xi_2^0 & -\partial\tau/\partial\xi_3^0 \\ 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix},$$

т. е. первый столбец $H(p, 0)$ равен $(1, 0, 0)^{\top}$, первая строка равна $(1, -\partial\tau/\partial\xi_2^0, -\partial\tau/\partial\xi_3^0)$ при $\xi^0 = 0$, а матрица, полученная при вычёркивании первой строки и первого столбца, состоит из элементов матрицы Якоби отображения T в точке $\xi^0 = 0$.

Доказательство. Сначала проверим, что имеет место равенство

$$H(p, 0)\, F(0) = F(0), \tag{9}$$

т. е. $e_1 = 1$ есть собственное значение матрицы $H(p, 0)$, а $F(0)$ является соответствующим собственным вектором. По предположению $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$. Продифференцировав это тождество по t, получим, что вектор $\xi = \gamma'(t)$ удовлетворяет следующей линейной задаче Коши:

$$\xi' = \partial_\xi F(\gamma(t)) \cdot \xi, \tag{10}$$

$$\xi(0) = \gamma'(0) = F(0). \tag{11}$$

Поскольку $H(t, 0)$ — фундаментальная матрица решений линейной системы (10), равная I при $t = 0$ (см. (7)), то решение задачи Коши (10)–(11) представляется в виде

$$\gamma'(t) = H(t, 0)F(0).$$

Отсюда при $t = p$ получим (9), поскольку $\gamma'(p) = \gamma'(0) = F(0)$.

Из (9) следует, что первый столбец $H(p,0)$ равен $(1,0,0)^\top$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось доказать, что первая строка матрицы $H(p,0)$ равна $(1, -\partial\tau/\partial\xi_2^0, -\partial\tau/\partial\xi_3^0)$.

Воспользуемся тем, что для любых начальных данных $\xi^0 \in \pi$ решение линейной системы (10) имеет вид

$$\xi(t) = H(t,0)\,\xi^0.$$

Полагая $t = p$, мы получим линейное отображение $\xi(p) = H(p,0)\,\xi^0$.

При отображении $\xi(p)$ площадка π перейдёт в некоторую площадку π'. Определим величины $\Delta\tau$ и $\Delta\eta$ следующим образом:

$$\Delta\tau = p - \tau(\xi^0), \qquad \Delta\eta = \eta(p,\xi^0) - \xi^1.$$

Тогда имеем

$$\Delta\eta = \eta(p,\xi^0) - \eta(\tau(\xi^0),\xi^0) = \eta_t'(\tau(\xi^0),\xi^0)\Delta\tau + \beta_1\,\|\xi^0\|, \tag{12}$$

где вектор-функция $\beta_1 = \beta_1(\xi^0)$ стремится к нулю при $\xi^0 \to 0$.

В силу линеаризации системы (4) в окрестности $\gamma(t)$ (причём $\gamma(0) = 0$), при $0 \leqslant t \leqslant p$ имеет место равенство

$$\eta(t,\xi^0) = \gamma(t) + H(t,0)\,\xi^0 + \beta_2\,\|\xi^0\|,$$

где вектор-функция $\beta_2 = \beta_2(\xi^0)$ стремится к нулю при $\xi^0 \to 0$.

При $t = p$ выполнено условие $\gamma(p) = \gamma(0) = 0$ и, следовательно,

$$\eta(p,\xi^0) = H(p,0)\,\xi^0 + \beta_2\,\|\xi^0\|.$$

Подставляя это выражение в (12), получим

$$H(p,0)\,\xi^0 - \xi^1 = \Delta\tau \cdot F(\xi^1) + \beta_3\,\|\xi^0\|, \qquad \beta_3 = \beta_1 - \beta_2.$$

Рассматривая первое уравнение этой системы с учётом того, что $\xi_1^0 = \xi_1^1 = 0$, мы получим

$$h_{12}\xi_2^0 + h_{13}\xi_3^0 = \Delta\tau \cdot F_1(\xi^1) + \beta_3^1\,\|\xi^0\|.$$

Тогда

$$\Delta\tau = \frac{h_{12}\xi_2^0 + h_{13}\xi_3^0 - \beta_3^1\|\xi^0\|}{F_1(\xi^1)}.$$

Поскольку

$$F_1(\xi^1) = 1 + c_1\,\xi_1^1 + c_2\,\xi_2^1 + c_3\,\xi_3^1, \qquad 1/F_1(\xi^1) = 1 - \beta_5 + \beta_6\|\xi^1\|,$$

$$c_j = \frac{1}{2}\,\partial_{\xi_j^1} F_1(\theta\xi_j^1), \qquad \beta_5 = c_1\,\xi_1^1 + c_2\,\xi_2^1 + c_3\,\xi_3^1,$$

мы получаем

$$\Delta\tau = h_{12}\xi_2^0 + h_{13}\xi_3^0 - \beta_3^1\|\xi^0\| - \beta_5\,(h_{12}\xi_2^0 + h_{13}\xi_3^0) + \beta_6\,(h_{12}\xi_2^0 + h_{13}\xi_3^0)\|\xi^1\|, \tag{13}$$

где скалярные функции β_5 и β_6 стремятся к нулю при $\xi^0 \to 0$.

Если разложить $\tau(\xi^0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi = 0$, то, рассматривая временно произвольное ξ^0 и удерживая члены до первого порядка малости, получим

$$\tau(\xi^0) = p - 1 \cdot \xi_1^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \xi_2} \cdot \xi_2^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \xi_3} \cdot \xi_3^0 + \beta_7 \|\xi^0\|.$$

Тогда

$$\Delta\tau = p - \tau(\xi^0) = -\frac{\partial \tau}{\partial \xi_2}\, \xi_2^0 - \frac{\partial \tau}{\partial \xi_3}\, \xi_3^0 - \beta_7 \|\xi^0\|. \tag{14}$$

Приравниваем (13) и (14):

$$h_{12}\xi_2^0 + h_{13}\xi_3^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \xi_2}\, \xi_2^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \xi_3}\, \xi_3^0 = \beta_3^1 \|\xi^0\| + \beta_5\, (h_{12}\xi_2^0 + h_{13}\xi_3^0) - \beta_6 (h_{12}\xi_2^0 - h_{13}\xi_3^0) \|\xi^1\| - \beta_7 \|\xi^0\|.$$

Тогда с учётом (8), имеет место оценка

$$\left\| h_{12}\xi_2^0 + h_{13}\xi_3^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \xi_2}\, \xi_2^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \xi_3}\, \xi_3^0 \right\| \leqslant \beta\, \|\xi^0\|, \tag{15}$$

где положительная функция $\beta = \beta_3^1 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7$ стремится к нулю при $\|\xi^0\| \to 0$. Из (15) следует, что

$$h_{12} = -\frac{\partial \tau}{\partial \xi_2}, \qquad h_{13} = -\frac{\partial \tau}{\partial \xi_3}.$$

Матрица Якоби отображения (6), если не налагать условие $\xi^0 \in \pi$, равна

$$\partial_{\xi^0} [\eta(\tau(\xi^0), \xi^0)] = \eta'(\tau, \xi^0) \partial_{\xi^0} \tau + H(\tau, \xi^0).$$

При $\xi^0 = 0$ отсюда следует

$$\partial_{\xi^0} [\eta(\tau(\xi^0), \xi^0)]_{\xi^0 = 0} = F(0) \partial_{\xi^0} \tau(0) + H(p, \xi^0).$$

Первый член справа — это матрица

$$\big(F_i(0)) \partial\tau(0)/\partial\xi_j^0\big) = \begin{pmatrix} -1 & \partial\tau/\partial\xi_2^0 & \partial\tau/\partial\xi_3^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\partial_{\xi^0} [\eta(\tau(\xi^0), \xi^0)]_{\xi^0 = 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким образом лемма 2 полностью доказана. □

2. ВИД ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Предположим, что у грубого седлового периодического решения $\gamma(t)$ полной системы при $\mu \neq 0$ имеется одно устойчивое инвариантное многообразие, т. е. один мультипликатор лежит внутри единичного круга, скажем,

$$e_2 = e_2(\mu), \qquad |e_2| < 1,$$

а второе инвариантное многообразие является неустойчивым, т. е. ещё один мультипликатор

$$e_3 = 1 + \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\mu) > 0, \qquad \varepsilon \to 0 \ \text{ при } \ \mu \to 0,$$

и $e_1 = 1$. Заметим, что система быстрых движений имеет однопараметрическое семейство периодических решений. Следовательно, для полной системы при $\mu = 0$ на площадке Пуанкаре π мы получим однопараметрическое семейство стационарных точек. Отсюда следует, что при $\mu = 0$ у периодических решений полной системы (4) существует ещё один мультипликатор, равный 1.

В силу леммы 2 мы можем рассмотреть в окрестности начала координат двумерное точечное отображение Пуанкаре

$$T\colon (y_0, z_0) \to (y_1, z_1).$$

Тогда для матрицы A — линейной части двумерного точечного отображения — существует невырожденная матрица P такая, что верно следующее представление

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e_2 & 0 \\ 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в подходящей системе координат в окрестности $(y, z) = (0, 0)$ точечное отображение имеет вид

$$y_1 = e_2 y_0 + G^1(y_0, z_0), \qquad z_1 = e_3 z_0 + G^2(y_0, z_0),$$

где

$$G(y_0, z_0) = (G^1(y_0, z_0), G^2(y_0, z_0))^\top \in C^1, \qquad G(0,0) = 0, \quad \partial G_{yz}(0,0) = 0. \tag{16}$$

Введём обозначение матрицы Якоби

$$\partial G_{yz} = \begin{pmatrix} G^1_y & G^1_z \\ G^2_y & G^2_z \end{pmatrix}.$$

Из (16) следует, что существует некоторая окрестность $D = \{(y, z) : \ \|(y, z)\| \leqslant s_0^2\}$ такая, что для всех точек D выполнено неравенство

$$\|\partial_{yz} G\| \leqslant \theta_0.$$

Тогда в D справедлива оценка

$$\|G\| \leqslant \theta_0 s_0.$$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $T_\mu = (y_0, z_0) \to (y_1, z_1)$ — точечное отображение вида*

$$T_\mu \ : \ y_1 = e_2(\mu)\, y_0 + G^1(y_0, z_0, \mu), \qquad z_1 = e_3(\mu)\, z_0 + G^2(y_0, z_0, \mu),$$

где μ — малый положительный параметр,

$$|e_2(\mu)| < 1, \quad e_3(\mu) = 1 + \varepsilon(\mu), \quad \varepsilon(\mu) > 0, \quad \varepsilon(\mu) \to 0 \quad \textit{при} \quad \mu \to 0,$$

$G^1(y_0, z_0, \mu)$, $G^2(y_0, z_0, \mu) \in C^1$ при малых $\|y_0\|$, $\|z_0\|$ и для всех μ

$$G^i(0, 0, \mu) = 0, \qquad \partial_{y_0} G^i(0, 0, \mu) = \partial_{z_0} G^i(0, 0, \mu) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Тогда существуют величины a_0 и μ_0 такие, что для всех $0 < \mu \leqslant \mu_0$ существует функция $z = g(y, \mu)$, принадлежащая классу C^1 на интервале $|y| \leqslant a_0$, такая что

$$g(0, \mu) = 0, \qquad \partial_y g(0, \mu) = 0,$$

а отображения

$$R_\mu \; : \; u = y, \quad v = z - g(y,\mu), \qquad R_\mu^{-1} \; : \; y = u, \quad z = v + g(u,\mu)$$

приводят T_μ *к виду*

$$u_1 = e_2(\mu)u_0 + U(u_0, v_0, \mu), \qquad v_1 = e_3(\mu)v_0 + V(u_0, v_0, \mu), \tag{17}$$

где U, V *и их частные производные по* u_0 *и* v_0 *равны нулю при* $u_0 = v_0 = 0$ *для всех* μ*; и при этом*

$$V(u_0, 0, \mu) = 0. \tag{18}$$

Условие (18) означает, что множество точек (u_0, v_0), лежащих в окрестности начала координат на плоскости $v_0 = 0$, инвариантно относительно отображения (17), т. е. многообразие $z = g(y,\mu)$ инвариантно относительно T_μ на интервале $|y| \leqslant a_0$ для всех $0 < \mu \leqslant \mu_0$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Покажем, что при варьировании параметра μ найдётся такое μ_0, начиная с которого для всех $0 < \mu \leqslant \mu_0$ будет выполнена теорема.

Сначала предположим, что отображение R_μ нам известно, т. е. известна функция $g(y,\mu)$. Тогда отображения R^{-1} и RTR^{-1} имеют вид

$$R_\mu^{-1}: \quad y_0 = u_0, \quad z_0 = v_0 + g(u_0, \mu),$$
$$y_1 = e_2(\mu)u_0 + G^1\big(u_0, v_0 + g(u_0,\mu), \mu\big), \quad z_1 = e_3\,(\mu)[v_0 + g(u_0,\mu)] + G^2\big(u_0, v_0 + g(u_0,\mu), \mu\big),$$
$$R_\mu T_\mu R_\mu^{-1}: \quad u_1 = e_2(\mu)\,u_0 + G^1\big(u_0, v_0 + g(u_0,\mu),\mu\big),$$
$$v_1 = e_3(\mu)\,v_0 + e_3(\mu)\,g(u_0,\mu) + G^2\big(u_0, v_0 + g(u_0,\mu),\mu\big) - g\big[e_2(\mu)\,u_0 + G^1\big(u_0, v_0 + g(u_0,\mu),\mu\big),\mu\big].$$

Отсюда в силу (17) имеем

$$V(u,v,\mu) = e_3(\mu)\,g(u,\mu) + G^2\big(u, v + g(u,\mu),\mu\big) - g\big[e_2(\mu)\,u + G^1\big(u, v + g(u,\mu),\mu\big),\mu\big].$$

Условие $V(u_0, 0, \mu) = 0$ можно записать в эквивалентной форме

$$g(u,\mu) = \frac{1}{e_3(\mu)} \Big\{ g\big(e_2(\mu)\,u + G^1\big(u, g(u,\mu),\mu\big),\mu\big) - G^2(u, g(u,\mu),\mu) \Big\}. \tag{19}$$

Таким образом, мы должны показать, что функциональное уравнение (19) имеет решение $g(u,\mu)$ из класса C^1, удовлетворяющее условиям теоремы 2. Следовательно, мы свели трёхмерную краевую задачу к двумерной с помощью отображения Пуанкаре, а далее — к алгебраическому уравнению (19) для нахождения функции $g(u,\mu)$.

Важно не покидать область определения функций $g(u,\mu)$. Так как мы рассматриваем $G(\xi) = (G^1(\xi), G^2(\xi))$ в некоторой окрестности D, допустим, что область определения $g(u,\mu)$ есть $|u| \leqslant s_0$. Чтобы $g(u,\mu)$ была определена, нужно проверить, что для аргумента выполнено неравенство

$$\|e_2(\mu)\,u + G^1(u, g(u,\mu),\mu)\| \leqslant s_0.$$

Для этого рассмотрим оценку $\|G^1(u, g(u,\mu),\mu)\| \leqslant s_0$, которая имеет место при $\|u\| \leqslant s_0$ и $\|g(u,\mu)\| \leqslant s_0$. Тогда

$$\|e_2(\mu)\,u + G^1(u, g(u,\mu),\mu)\| \leqslant \big(|e_2(\mu)| + \theta_0\big)|u| \leqslant s_0,$$

дополнительно предположив, что

$$|e_2(\mu)| + \theta_0 < 1. \tag{20}$$

Таким образом, если предположить, что

$$1)\quad \|u\| \leqslant s_0, \qquad 2)\quad |e_2(\mu)| + \theta_0 < 1,$$

то функция $g(u,\mu)$ определена и $\|g(u,\mu)\| \leqslant s_0$. Последняя оценка будет вытекать из оценки производной функции $g(u,\mu)$, которая будет приведена ниже.

Параметр s_0 может как уменьшать, так и расширять область существования инвариантного многообразия для двумерной системы (соответственно, область существования инвариантной поверхности для системы трёх уравнений), но мы всегда можем рассматривать исходную задачу в меньшей области, если s_0 уменьшило область, или в исходной области, если s_0 увеличила область существования.

3.1. Метод последовательных приближений

Будем решать уравнение (19) *методом последовательных приближений*. Пусть

$$g_0(u,\mu) \equiv 0$$

и после того, как найдена функция $g_{n-1}(u,\mu)$, положим

$$g_n(u,\mu) = \frac{1}{e_3(\mu)}\Big\{g_{n-1}\big(e_2(\mu)\,u + G^1\big(u, g_{n-1}(u,\mu),\mu\big),\mu\big) - G^2\big(u, g_{n-1}(u,\mu),\mu\big)\Big\}. \tag{21}$$

3.2. Оценка производных. Равномерная ограниченность

Введём для краткости следующие обозначения

$$g_n(u) = g_n(u,\mu), \quad e_i = e_i(\mu), \quad G^i\big(u, g_{n-1}(u)\big) = G^i\big(u, g_{n-1}(u,\mu),\mu\big).$$

Для удобства записи частной производной мы будем сверху писать индекс координаты, а снизу переменную, по которой дифференцируем. Производная от функции $g_n(u)$ по u имеет вид:

$$\begin{aligned} e_3\, g_n'(u) = g_{n-1}'\big(e_2 u + G^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big)\cdot\big[e_2 + G^1_y\big(u, g_{n-1}(u)\big) + g_{n-1}'(u)\cdot G^1_z\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big] - \\ - G^2_y\big(u, g_{n-1}(u)\big) - g_{n-1}'(u)\cdot G^2_z\big(u, g_{n-1}(u)\big). \end{aligned} \tag{22}$$

При $n=1$ получаем $e_3\, g_1'(u) = -G^2_y(u,0)$. Тогда

$$\|g_1'(u)\| \leqslant \frac{1}{e_3}\,\theta_0. \tag{23}$$

Если $\theta_0 < e_2$, то для всех рассматриваемых μ функция $g_1'(u)$ ограничена $\|g_1'(u)\| \leqslant \frac{\theta_0}{e_3}s_0 \leqslant s_0$. Определим число σ равенством

$$\sigma = \frac{\theta_0}{e_3 - e_2 - 3\theta_0} \quad \text{так, что} \quad 0 < \sigma < 1.$$

Покажем по индукции, что для всех n выполнено неравенство

$$\big\|g_n'(u)\big\| \leqslant \sigma. \tag{24}$$

Очевидно, что (24) выполняется при $n=0$. Для $n=1$ из оценки (23) вытекает (24), так как $\theta_0/e_2 < \sigma$. Предположим, что (24) выполнено при $n-1$. Тогда из (22) и условия $\sigma < 1$ следует

$$e_3\big\|g_n'(u)\big\| \leqslant \big\|g_{n-1}'\big(e_2 u + G^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big)\big]\cdot\big[e_2 + G^1_y\big(u, g_{n-1}(u)\big) + g_{n-1}'(u)\cdot G^1_z\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big]\big\| +$$

$$+\left\|G_y^2(u,g_{n-1}(u))\| + \|g'_{n-1}(u)\cdot G_z^2(u,g_{n-1}(u))\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sigma[e_2+\theta_0+\theta_0]+\theta_0+\sigma\theta_0 \leqslant \sigma(e_2+3\theta_0)+\theta_0.$$

Так как $\sigma(e_2+3\theta_0)+\theta_0 = e_3\sigma$, отсюда следует искомое неравенство.

Влияние параметра μ. Заметим, что мультипликаторы e_2 и e_3 зависят от параметра μ. Однако, величины σ, θ_0 при $\mu \in [0,\mu_0]$ не должны зависеть от μ. Так как θ_0 выбирается для выполнения оценки на производные функции $G(y,z,\mu)$, то в силу гладкости функции мы можем выбрать одно значение θ_0 для всех $\mu \leqslant \mu_0$ при достаточно малых μ_0.

Выбор параметра σ. Выберем σ так, чтобы неравенство (24) выполнялось для всех $\mu \leqslant \mu_0$. Посмотрим, что происходит с мультипликаторами при варьирования μ:

1) По предположению $0 < e_2 < 1$ для всех μ. Следовательно, существуют

$$e_2^- \equiv \min_\mu e_2(\mu), \qquad e_2^+ \equiv \max_\mu e_2(\mu)$$

такие, что для всех $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ выполнены неравенства $0 < e_2^- < e_2(\mu) < e_2^+ < 1$.

2) $e_3 = 1+\varepsilon(\mu)$, где $\varepsilon(\mu) > 0$ и стремится к нулю вместе с μ. Следовательно,

$$e_3^- \equiv \min_\mu e_3(\mu) = 1, \qquad e_3^+ \equiv \max_\mu e_3(\mu).$$

Таким образом, из условия, что $0<\sigma<1$ получаем $\theta_0 < e_3 - e_2 - 3\theta_0$ или $\theta_0 < (e_3-e_2)/4$. Если в правой части неравенства заменить e_3 на 1, а e_2 на e_2^+, то неравенство лишь усилится, и оценка будет выполнена для всех $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$:

$$\theta_0 < (1-e_2^+)/4, \tag{25}$$

$$e_2^+ + 4\theta_0 < 1. \tag{26}$$

В рассуждениях об области определения функции $g(u)$ было ещё условие (20) на θ_0, но оно следует из (25).

3.3. Оценка производных. Равностепенная непрерывность

Теперь проверим, что $g'_0, g'_1, \ldots, g'_n, \ldots$ *равностепенно непрерывны.*

Для всякой функции $f=f(u)$ или $f=f(y,z)$ положим соответственно

$$\Delta f = f(u+\Delta u) - f(u), \qquad \Delta f = f(y+\triangle y, z+\Delta z) - f(y,z).$$

Пусть

$$h_1(\delta) = \sup\left(\left\|\Delta G_y^1\right\|,\ \left\|\Delta G_z^1\right\|,\ \left\|\Delta G_y^2\right\|,\ \left\|\Delta G_z^2\right\|\right) \quad \text{при} \quad \|\Delta y\|, \|\Delta z\| \leqslant \delta.$$

Покажем по индукции, что

$$\|\Delta g'_n\| \leqslant h^+(\delta) \quad \text{при} \quad \|\Delta u\| \leqslant \delta < 1. \tag{27}$$

где

$$h(\delta) = \frac{4h_1(\delta)}{e_3-e_2-4\theta_0}. \tag{28}$$

В зависимости от μ величину $h^+(\delta)$ будем брать в виде

$$h^+(\delta) = \frac{4h_1(\delta)}{1-e_2^+-4\theta_0}.$$

Ясно, что при $n=0$ выполнена оценка (27). Рассмотрим случай $n=1$. Из (22) получаем

$$g'_1(u) = -\frac{1}{e_2}G_y^2(u,0)$$

и, следовательно,

$$\|\Delta g_1'(u)\| = \frac{1}{e_3}\big\| - G_y^2(u+\Delta u, 0) + G_y^2(u,0)\big\| \leqslant \frac{h_1(\delta)}{e_3^-} \leqslant h^+(\delta).$$

Из (24) и $\sigma < 1$ следует оценка $\|\Delta g_1(u)\| \leqslant \sigma\|\Delta u\| \leqslant \|\Delta u\|$.

Предположим, что неравенство (27) доказано для $n-1$. Заметим, что в силу (24) $\|\Delta g_{n-1}(u)\| \leqslant \sigma\|\Delta u\| \leqslant \|\Delta u\|$. Отсюда

$$\sup\big(\|\Delta G_y^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\|,\ \|\Delta G_z^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\|,\ \|\Delta G_y^2\big(u, g_{n-1}(u)\big)\|,\ \|\Delta G_z^2\big(u, g_{n-1}(u)\big)\|\big) \leqslant$$
$$\leqslant h_1(\|\Delta u\|),$$

и применяя теорему о среднем, получим

$$\big\|\Delta\big[e_2 u + G^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big]\big\| \leqslant (e_2^+ + 2\theta_0)\cdot\|\Delta\| \leqslant \|\Delta\|,$$

причём последнее неравенство следует из (26).

Используя тождество $\Delta[f_1(u)\cdot f_2(u)] = (\Delta f_1)f_2(u) + f_1(u+\Delta u)\Delta f_2$ и неравенство $\sigma < 1$, оценим первое слагаемое в (22):

$$\begin{gathered}\big\|\Delta\left\{g_{n-1}'\big[e_2 u + G^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big]\right\}\cdot\big[e_2 + G_y^1\big(u, g_{n-1}(u)\big) + g_{n-1}'(u)\cdot G_z^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big]\big\| + \\ +\big\|g_{n-1}'\big(e_1(u+\Delta u) + G^1\big(u+\Delta u, g_{n-1}(u) + \Delta g_{n-1}(u)\big)\big)\times \\ \times\Delta\big[e_2 + G_y^1\big(u, g_{n-1}(u)\big) + g_{n-1}'(u)\cdot G_z^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big]\big\| \leqslant h^+(\delta)(e_2^+ + \theta_0 + \theta_0\sigma) + \\ +\sigma\cdot\big\|\Delta G_y^1\big(u, g_{n-1}(u)\big) + \Delta g_{n-1}'(u)\cdot G_z^1\big(u, g_{n-1}(u)\big) + g_{n-1}'(u+\Delta u)\cdot\Delta G_z^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big\| \\ \leqslant h^+(\delta)(e_2^+ + \theta_0 + \theta_0\sigma) + \sigma\cdot\big(h_1(\delta) + h(\delta)\theta_0 + \sigma h_1(\delta)\big) \\ \leqslant h^+(\delta)(e_2^+ + 3\theta_0) + 2h_1(\delta).\end{gathered}$$

Оценим последние два слагаемые:

$$\begin{gathered}\|\Delta G_y^2\big(u, g_{n-1}(u)\big) + \Delta\big[g_{n-1}'(u)\cdot G_z^2\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big]\| \\ \leqslant \|\Delta G_y^2\big(u, g_{n-1}(u)\big)\| + \|\Delta g_{n-1}'(u)\cdot G_z^2\big(u, g_{n-1}(u)\big) + g_{n-1}'(u+\Delta u)\cdot\Delta G_z^2\big(u, g_{n-1}(u)\big)\| \\ \leqslant h_1(\delta) + h^+(\delta)\theta_0 + h_1(\delta)\sigma \leqslant 2h_1(\delta) + h^+(\delta)\theta_0.\end{gathered}$$

Таким образом, используя (28), получаем оценку

$$\|\Delta g_n'(u)\| \leqslant \frac{1}{e_3^-}\big[h^+(\delta)(e_1^+ + 4\theta_0) + 4h_1(\delta)\big] = h^+(\delta),$$

которая для всех $\mu \in [0,\mu_0]$ доказывает равностепенную непрерывность последовательности $\big\{g_n'\big\}_0^\infty$. Действительно, для данной оценки существует μ_0, начиная с которого для всех $\mu \leqslant \mu_0$ она будет выполнена. Существование такого μ_0 следует из условия (26) при выборе θ_0.

3.4. Равномерная сходимость функций

Далее можно показать, что последовательность $g_0, g_1, .., g_n, ...$ сходится равномерно на каждом ограниченном u-множестве. Для этого достаточно установить, что существуют такие постоянные M и r, что $0 < r < 1$ и при $n = 1, 2...$

$$\|g_n(u) - g_{n-1}(u)\| \leqslant M\|u\|r^n. \tag{29}$$

Это неравенство верно при $n = 1$, если M и r таковы, что $Mr = \sigma$. Предположим, что для $n-1$ неравенство доказано. Тогда воспользуемся представлением

$$e_3 g_n(u) = g_{n-1}\big(e_2\, u + G^1\big(u, g_{n-1}(u)\big)\big) - G^2\big(u, g_{n-1}(u)\big).$$

Справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}e_3\big\|g_n(u)-g_{n-1}(u)\| &\leqslant \|g_{n-1}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big)-G^2\big(u,g_{n-1}(u)\big)-\\ &-g_{n-2}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-2}(u)\big)\big)+G^2\big(u,g_{n-2}(u)\big)\\ &\leqslant \big\|g_{n-1}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big)-g_{n-2}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-2}(u)\big)\big)\big\|+\\ &+\big\|G^2\big(u,g_{n-1}(u)\big)-G^2\big(u,g_{n-2}\big)\big\|.\end{aligned}$$

Первое слагаемое оценивается сверху:

$$\begin{aligned}&\big\|g_{n-1}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big)-g_{n-2}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-2}(u)\big)\big)\big\|\\ &\leqslant \big\|g_{n-1}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big)-g_{n-2}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big)\big\|+\\ &+\big\|g_{n-2}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big)-g_{n-2}\big(e_2u+G^1\big(u,g_{n-2}(u)\big)\big)\big\|\leqslant\\ &\leqslant M\big\|e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big\|r^{n-1}+\sigma\big\|e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)-e_2u+G^1\big(u,g_{n-2}(u)\big)\big\|\\ &\leqslant M\big\|e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big\|r^{n-1}+\sigma\theta_0\|g_{n-1}(u)-g_{n-2}(u)\|\\ &\leqslant M\big\|e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big\|r^{n-1}+\sigma\theta_0M\|u\|r^{n-1}.\end{aligned}$$

Для второго слагаемого получаем оценку

$$\big\|G^2\big(u,g_{n-1}(u)\big)-G^2\big(u,g_{n-2}\big)\big\|\leqslant\theta_0\|g_{n-1}(u)-g_{n-2}(u)\|\leqslant\theta_0M\|u\|r^{n-1}.$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}e_3\|g_n(u)-g_{n-1}(u)\|&\leqslant M\big\|e_2u+G^1\big(u,g_{n-1}(u)\big)\big\|r^{n-1}+\sigma\theta_0M\|u\|r^{n-1}+\theta_0M\|u\|r^{n-1}\\ &\leqslant M(e_2^++2\theta_0)\|u\|r^{n-1}+M\theta_0\|u\|r^{n-1}+M\theta_0\|u\|r^{n-1}=M\|u\|r^{n-1}(e_2^++4\theta_0).\end{aligned}$$

Таким образом, если $r=e_2^++4\theta_0$ и $M=\sigma/r$, то справедливость неравенства (29) доказана. Тогда при $m>n$ получаем:

$$\|g_m(u)-g_n(u)\|\leqslant(r^{n+1}+r^{n+2}+\dots+r^m)M\|u\|\leqslant\frac{r^{n+1}}{1-r}M\|u\|,$$

то есть существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех n, $m>N$ верно

$$\|g_m(u)-g_n(u)\|\leqslant\frac{r^N}{1-r}M\|u\|<\varepsilon.$$

Следовательно, последовательность g_n удовлетворяет критерию Коши и сходится равномерно на ограниченном u-множестве. Таким образом, последовательность $\big\{g_n(u)\big\}$ сходится к $g(u)$ равномерно на всяком ограниченном множестве. В силу (21) предельная функция $g(u)$ удовлетворяет функциональному уравнению (19). Последовательность $g_0', g_1', \dots, g_n', \dots$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, следовательно, в ней существует подпоследовательность, сходящаяся равномерно на каждом ограниченном u-множестве. Так как существует равномерно сходящаяся подпоследовательность производных, а сама функция сходится равномерно, отсюда следует, что $g(u)\in C^1$. Теорема 2 доказана.

4. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

В кинетических экспериментах по изучению гетерогенной каталитической реакции окисления водорода на платиновых и никелевых катализаторах при определённых условиях наблюдается сложная динамика, например, многопиковые автоколебания скорости. В работах [26,27] показано, что сложные многопиковые автоколебания могут определяться кинетическими моделями малой размерности, которые учитывают основные черты процесса — нелинейные стадии реакции и влияние реакционной среды на активность катализатора. Рассматриваются *быстрые движения* — обратимая адсорбция водорода и кислорода, а также взаимодействие промежуточных веществ на поверхности катализатора, и *медленные движения* — растворение кислорода или водорода в приповерхностном слое металла. Дальнейшее исследование этих моделей проводится с целью определения условий возникновения высокой параметрической чувствительности, обусловленной внутренними свойствами — механизмом химических превращений.

Одна из нелинейных кинетических моделей автоколебательной гетерогенной каталитической реакции окисления водорода на металлическом катализаторе [28–31] описывается динамической системой

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = K_1(1-x-y)^2 - K_{-1}\,x^2 - 2k_3(y)\,x^2y, \\ \dot{y} = K_2(1-x-y)^2 - K_{-2}\,y^2 - k_4(y,z)\,y - k_3(y)\,x^2y, \\ \dot{z} = \mu y(1-z) - \alpha z(1-x-y), \end{array}\right. \tag{30}$$

определённой в области $\Omega = \big\{(x,y,z) \in R^3 : 0 \leqslant x,y,z \leqslant 1,\ x+y \leqslant 1\big\}$. Здесь $x = [\mathrm{MeH}]$ и $y = [\mathrm{MeO}]$ — концентрации водорода и кислорода, адсорбированных на поверхности катализатора, $z = [\mathrm{Me_vO}]$ — концентрации кислорода, растворённого в приповерхностном слое катализатора. Функции $k_3(y)$ и $k_4(y,z)$ определяют константы скоростей двух стадий реакции с учётом влияния реакционной среды на катализатор:

$$k_3(y) = K_{30}\exp(-\mu_3 y), \quad k_4(y) = K_{40}\exp(-\mu_4 y + \mu_5 z),$$

$\mu = k_5$, $\alpha = k_{-5}/k_5$, кинетические параметры положительны:

$$K_1,\ K_2,\ K_{-1},\ K_{-2},\ K_{30},\ K_{40},\ k_5,\ k_{-5},\ \mu_3,\ \mu_4,\ \mu_5 > 0.$$

Следуя принципу генерирования сложной динамики, рассмотрим при $\mu = 0$ *вырожденную* систему (или систему *быстрых движений*), которая представляет собой однопараметрическое семейство двумерных динамических подсистем *полной* системы (30) с параметром z:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = K_1(1-x-y)^2 - K_{-1}\,x^2 - 2k_3(y)\,x^2y, \\ \dot{y} = K_2(1-x-y)^2 - K_{-2}\,y^2 - k_4(y,z)\,y - k_3(y)\,x^2y, \end{array}\right. \qquad z = \mathrm{const}\,. \tag{31}$$

При изучении динамики полной системы (30) мы рассмотрели

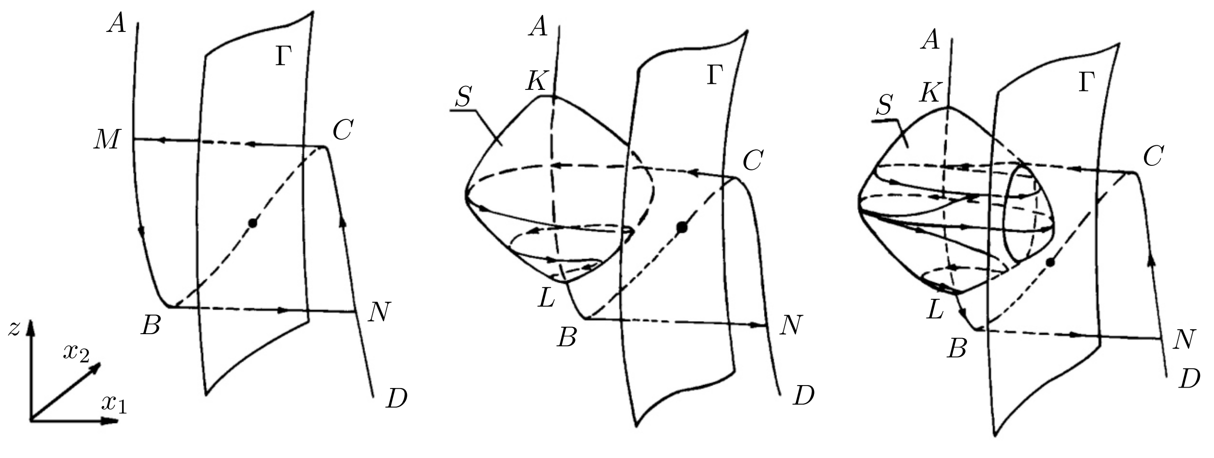
- математический образ сложных автоколебаний;
- многопиковые автоколебания;
- пучки траекторий типа *тоннеля* и трёхмерные решения-утки;
- автоколебания, близкие к двумерным.

Математический образ сложных автоколебаний. В работах [26, 27] для динамических систем с одной медленной и двумя быстрыми переменными типа (30) был сформулирован *принцип генерирования сложных колебаний*, который основывается на анализе глобальной динамики вырожденной системы при $\mu = 0$ с параметром z. Рассмотрим однопараметрическое семейство динамических систем быстрых движений вида (31) и предположим, что при $0 \leqslant z < a$ и $b < z \leqslant 1$ имеется единственное глобально асимптотически устойчивое стационарное состояние, а в интервале $a < z < b$ — три стационарных состояния, одно из которых является седлом, а два других устойчивы. Предположим, что единственная стационарная точка (x_s, y_s, z_s) системы (30) лежит на седловой ветви стационарных состояний (31). Тогда при малых μ полная система будет генерировать релаксационные автоколебания (см. рис. 1(a)).

Многопиковые автоколебания. Пусть, кроме того, при каждом фиксированном $z \in (a, b)$ вырожденная система (31) имеет фазовый портрет, содержащий одновременно грубый устойчивый предельный цикл $\gamma(z)$ и устойчивое стационарное состояние, причём каждый предельный цикл $\gamma(z)$ окружает только одну неустойчивую стационарную точку; топологическим пределом $\gamma(z)$ при $z \to z^+$ или $z \to z^-$, где $a < z^- < z^+ < b$, является стационарная точка, которая является сложным фокусом первого порядка. Предположим также, что поверхность $\Gamma = \{h(x, y, z) = 0\}$ не пересекает поверхность S, состоящую из однопараметрического семейство периодических решений $\gamma(z)$. Тогда при малых μ полная система генерирует многопиковые автоколебания (см. рис. 1(b)).

Решения-утки. Как доказано в [32], в случае рис. 1(b) внутри поверхности S вблизи стационарной ветви $AKLB$ существует пучок траекторий типа *тоннеля*, который состоит из трёхмерных *решений-уток.* Этот феномен порождает высокую параметрическую чувствительность решений к начальным данным в окрестности медленной кривой KL .

Автоколебания, близкие к двумерным. Рассмотрим случай, когда поверхность Γ пересекает поверхность S и кривую BC, как показано на рис. 1(c). Пусть, кроме того, существует $z = z_0$ такое, что выполнены условия (3) теоремы 1, а именно, $\nu(z_0) = 0$, $\nu'_z(z_0) < 0$. Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu \leqslant \mu_0$ полная система имеет устойчивый предельный цикл L (близкий к двумерному), у которого имеется инвариантное многообразие вида $z = \varphi(x, y, \mu)$. Размер области определения многообразия φ по (x, y) не зависит от μ при $\mu \leqslant \mu_0$. Отсюда следует, что L будет притягивать траектории, расположенные вблизи поверхности S, и поэтому в полной системе невозможно существование многопиковых автоколебаний (см. рис. 1(c)).



(a) **(b)** **(c)**

Рис. 1. Сценарий возникновения многопиковых автоколебаний (b) из предельного цикла (a) и критерий их отсутствия (c)

Численный эксперимент. Рассмотрим динамику системы (30) при следующих значениях параметров: $K_1 = 0.2$, $K_{-1} = 0.01$, $K_2 = 9.451$, $K_{-2} = 0$, $K_{30} = 100$, $K_{40} = 2$, $\mu_3 = 30$, $\mu_4 = 12$, $\mu_5 = 10$ и $\mu = 0.00025$.

Если в качестве варьируемого параметра мы выберем α, то при $\alpha = 14$ и фиксированных остальных параметрах достаточные условия (3) теоремы 1 не выполняются. Поэтому полная система в этом случае генерирует многопиковые автоколебания вида (b) (см. рис. 2).

При $\alpha = 10$ существует z_0 такое, что достаточные условия (3) выполняются. Следовательно, в полной системы существует предельный цикл L, который близок к двумерному предель-

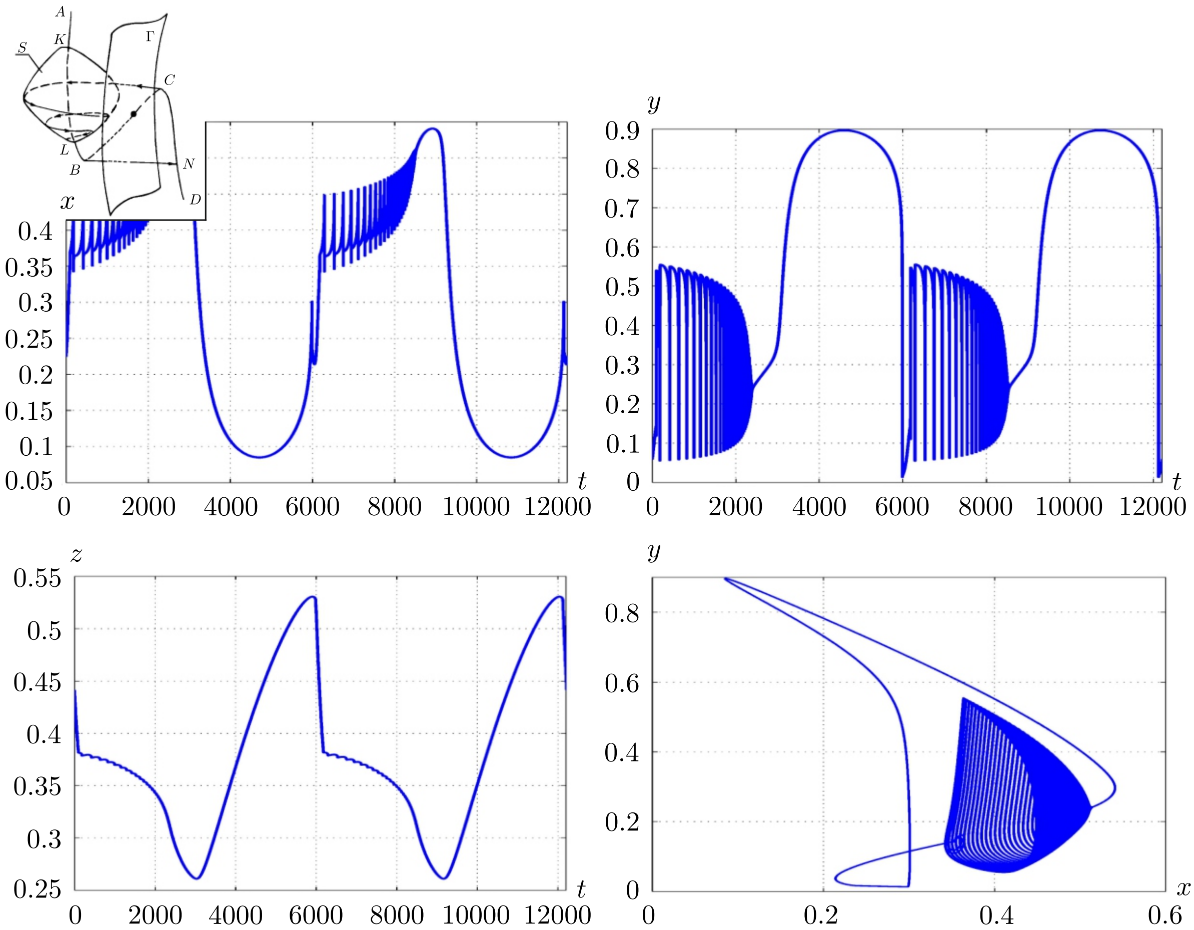


Рис. 2. Многопиковые автоколебания вида (b) при $\alpha = 14$

ному циклу $\gamma(z_0)$ вырожденной системы (см. рис. 3). Кроме того, по теореме 2 у предельного цикла L существует инвариантное многообразие вида $z = \varphi(x, y, \mu)$ вблизи поверхности S, область определения которого по переменным (x, y) не уменьшается при стремлении малого параметра к нулю, что не позволяет системе генерировать многопиковые автоколебания при достаточно малых μ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проводится обоснование *принципа генерирования многопиковых автоколебаний* для динамических систем с одной медленной и двумя быстрыми переменными.

Сначала доказана лемма 2 об отображении Пуанкаре и виде фундаментальной матрицы $H(p, 0)$ линеаризованной системы в окрестности периодического решения полной системы. Теорема 2 утверждает существование инвариантного многообразия вида $z = \varphi(x, y, \mu)$ у предельного цикла L полной системы, область определения которого в фазовом пространстве не уменьшается при стремлении $\mu \to 0$. Теорема 2 позволяет сформулировать достаточные условия существования и отсутствия многопиковых автоколебаний.

Для кинетической модели окисления водорода на никеле найдены параметры, при которых система генерирует многопиковые автоколебания, а при изменении одного из параметров многопиковые автоколебания исчезают и появляется предельный цикл L, близкий к предельному циклу $\gamma(z_0)$ вырожденной системы.

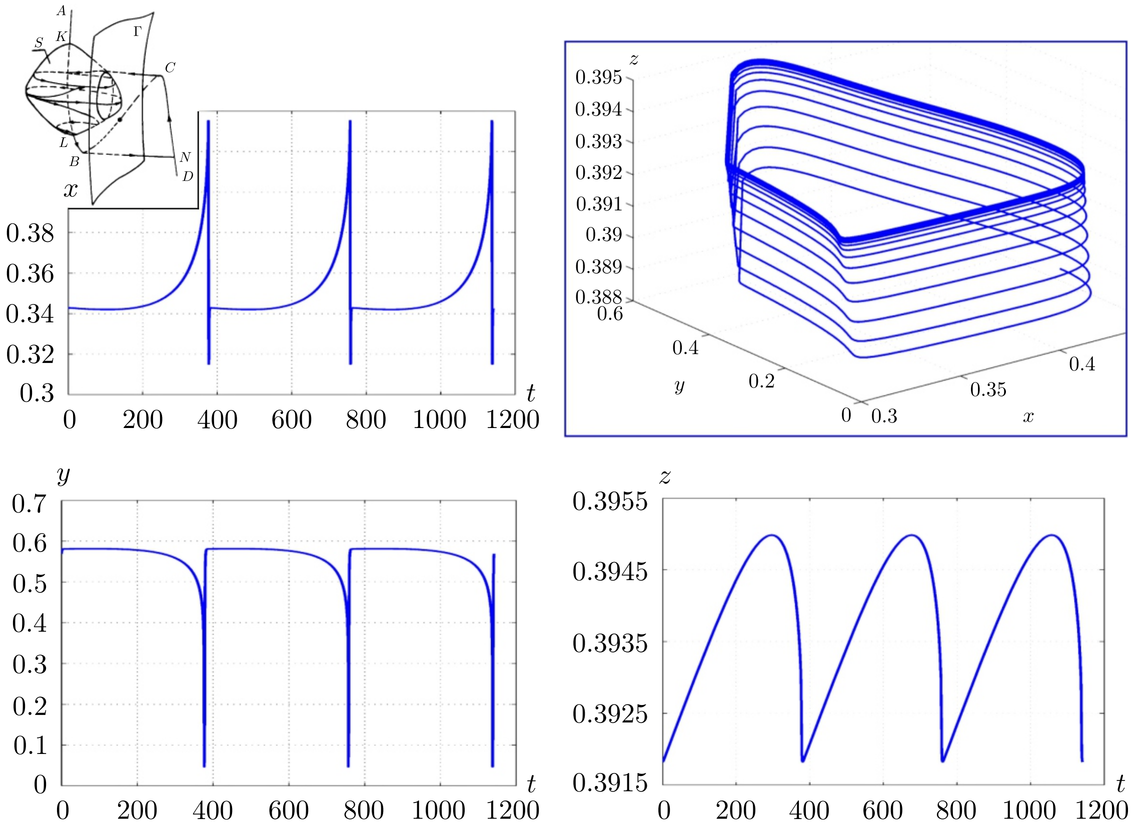


Рис. 3. Релаксационные автоколебания вида (c) при $\alpha = 10$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственных заданий Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0005) и Института катализа им. Г. К. Борескова СО РАН (проект FWUR-2024-0037). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жаботинский А. М.* Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
2. *Гарел Д., Гарел О.* Колебательные химические реакции. М.: Мир, 1986.
3. *Ertl G.* Oscillatory Catalytic Reactions at Single-Crystal Surfaces // Adv. Catal. 1990. V. 37. P. 213–277.
4. *Schüth F., Henry B. E., Schmidt L. D.* Oscillatory Reactions in Heterogeneous Catalysis // Adv. Catal. 1993. V. 39. P. 51–127.
5. *Imbihl R.* Oscillatory Reactions on Single-Crystal Surfaces // Prog. Surf. Sci. 1993. V. 44. P. 185–343.
6. *Imbihl R., Ertl G.* Oscillatory Kinetics in Heterogenious Catalysis // Chem. Rev. 1995. V. 95, N 3. P. 697-733; DOI: 10.1021/cr00035a012
7. *Slinko M. M., Jaeger N. I.* Oscillating Heterogenious Catalytic Systems. Amsterdam: Elsevier, 1994.
8. *Беляев В. Д., Слинько М. М., Слинько М. Г., Тимошенко В. И.* Автоколебания в гетерогенной каталитической реакции водорода с кислородом // Доклады АН СССР. 1974. Т. 214, № 5. С. 1098–1100.

9. *Слинько М. Г.* Динамика химических процессов и реакторов // Химич. пром. 1979. № 11. С. 260–268.
10. *Куркина Е. С., Песков Н. В., Слинько М. М., Слинько М. Г.* О природе хаотических колебаний скорости реакции окисления CO на Pd-цеолитном катализаторе // Доклады РАН. 1996. Т. 351, № 4. С. 497–501.
11. *Lashina E. A., Kaichev V. V., Chumakova N. A., Ustyugov V. V., Chumakov G. A., Bukhtiyarov V. I.* Mathematical Simulation of Self-Oscillations in Methane Oxidation on Nickel: An Isothermal Model // Kinet. Catal. 2012. V. 53. P. 374-–383; DOI: 10.1134/S0023158412030081
12. *Lashina E. A., Kaichev V. V., Saraev A. A., Vinokurov Z. S., Chumakova N. A., Chumakov G. A., Bukhtiyarov V. I.* Experimental Study and Mathematical Modeling of Self-Sustained Kinetic Oscillations in Catalytic Oxidation of Methane over Nickel // J. Phys. Chem. A. 2017. V. 121. P. 6874–6886; DOI: 10.1021/acs.jpca.7b04525
13. *Lashina E. A., Kaichev V. V., Saraev A. A., Chumakova N. A., Chumakov G. A., Bukhtiyarov V. I.* Self-Sustained Oscillations in Oxidation of Propane over Nickel: Experimental Study and Mathematical Modelling // Top. Catal. 2020, V. 63, N 1–2. P. 33–48; DOI: 10.1007/s11244-019-01219-5
14. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
16. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения. М.: Мир. 1980.
17. *Robinson C.* Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. Boca Raton: CRC Press, 1995.
18. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. Москва—Ижевск: ИКИ, 2004.
19. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва—Ижевск: ИКИ, 2009.
20. *Abbondandolo A., Asselle L., Benedetti G., Mazzucchelli M., Taimanov I. A.* The Multiplicity Problem for Periodic Orbits of Magnetic Flows on the 2-Sphere // Adv. Nonlinear Stud. 2017. V. 17, N 1. P. 17–30; DIO: 10.1515/ans-2016-6003
21. *Звонкин А. К., Шубин М. А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 2. С. 77–127.
22. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
23. *Solari H. G., Natiello M. A., Mindlin G. B.* Nonlinear Dynamics: A Two-way Trip from Physics to Math. London—Bristol—Philadelphia: Institute of Physics, 1996.
24. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. N. Y.: Springer, 1998.
25. *Гукенхаймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва—Ижевск: ИКИ, 2002.
26. *Чумаков Г. А., Слинько М. Г., Беляев В. Д.* Сложные изменения скорости гетерогенных каталитических реакций // Доклады АН СССР. 1980. Т. 253, № 3. С. 653–658.
27. *Чумаков Г. А., Слинько М. Г.* Кинетическая турбулентность (хаос) скорости реакции взаимодействия водорода с кислородом на металлических катализаторах // Доклады АН СССР. 1982. Т. 266, № 5. С. 1194–1198.
28. *Chumakov G. A., Chumakova N. A.* Relaxation Oscillations in a Kinetic Model of Catalytic Hydrogen Oxidation Involving a Chase on Canards // Chem. Eng. J. 2003. V. 91. P. 151–158; DOI: 10.1016/S1385-8947(02)00148-1
29. *Чумаков Г. А.* Математические вопросы моделирования автоколебаний скорости гетерогенной каталитической реакции. I // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46, № 5. С. 1179–1189.
30. *Чумаков Г. А.* Динамика нелинейной системы дифференциальных уравнений // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1180–1195.

31. *Chumakov G. A., Chumakova N. A., Lashina E. A.* Modeling the Complex Dynamics of Heterogeneous Catalytic Reactions with Fast, Intermediate, and Slow Variables // Chem. Eng. J. 2015. V. 282. P. 11–19; DOI: 10.1016/j.cej.2015.03.017

32. *Чумаков Г. А., Чумакова Н. А.* О локализации неустойчивого решения одной системы трёх нелинейных обыкновенных диференциальных уравнений с малым параметром // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 4. С. 221–238; DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.417

33. *Быков В. И., Цыбенова С. Б.* Реализация метода продолжения по параметру для системы двух уравнений // Вычисл. технол. 2002. Т. 7, № 5. С. 21–28.

34. *Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В.* Периодическое решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Доклады АН СССР. 1960. Т. 132, № 3. С. 537–540.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.928.4:517.929.5

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER AND MULTIPEAK OSCILLATIONS

© 2024 **G. A. Chumakov**[1,3a], **N. A. Chumakova**[2,3b]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*
[2]*Boreskov Institute of Catalysis, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*
[3]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]chumakov@math.nsc.ru, [b]chum@catalysis.ru

Received 25.09.2023, revised 21.01.2024, accepted 07.02.2024

Abstract. In this paper, we study a nonlinear dynamical system of autonomous ordinary differential equations with a small parameter μ such that two variables x and y are fast and another one z is slow. If we take the limit as $\mu \to 0$, then this becomes a "*degenerate system*" included in the one-parameter family of two-dimensional subsystems of *fast motions* with the parameter z in some interval. It is assumed that in each subsystem there exists a *structurally stable* limit cycle l_z. In addition, in the *complete* dynamical system there is some structurally stable periodic orbit L that tends to a limit cycle l_{z_0} for some $z = z_0$ as μ tends to zero. We can define the first return map, or the Poincaré map, on a local cross section in the hyperplane (y, z) orthogonal to L at some point. We prove that the Poincaré map has an invariant manifold for the fixed point corresponding to the periodic orbit L on a guaranteed interval over the variable y, and the interval length is separated from zero as μ tends to zero. The proved theorem allows one to formulate some sufficient conditions for the existence and/or absence of multipeak oscillations in the complete dynamical system. As an example of application of the obtained results, we consider some kinetic model of the catalytic reaction of hydrogen oxidation on nickel.

Keywords: ordinary differential equation, small parameter, limit cycle, invariant manifold, Poincaré map, kinetic model, multipeak self-oscillations.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.107

REFERENCES

1. A. M. Zhabotinskii, *Concentration Self-Oscillations* (Nauka, Moscow, 1974) [in Russian].
2. D. Gurel and O. Gurel, *Oscillations in Chemical Reactions* (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1983; Mir, Moscow, 1986).
3. G. Ertl, "Oscillatory catalytic reactions at single-crystal surfaces," Adv. Catal. **37**, 213–277 (1990).
4. F. Schüth, B. E. Henry, and L. D. Schmidt, "Oscillatory reactions in heterogeneous catalysis," Adv. Catal. **39**, 51–127 (1993).
5. R. Imbihl, "Oscillatory reactions on single-crystal surfaces," Prog. Surf. Sci. **44**, 185–343 (1993).
6. R. Imbihl and G. Ertl, "Oscillatory kinetics in heterogeneous catalysis," Chem. Rev. **95** (3), 697–733 (1995). https://doi.org/10.1021/cr00035a012
7. M. M. Slinko and N. I. Jaeger, *Oscillating Heterogeneous Catalytic Systems* (Elsevier, Amsterdam, 1994).
8. V. D. Belyaev, M. M. Slinko, M. G. Slinko, and V. I. Timoshenko, "Self-oscillations in the heterogeneous catalytic reaction of hydrogen with oxygen," Dokl. Akad. Nauk SSSR **214** (5), 1098–1100 (1974) [in Russian].

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 1, pp. 18–35.

9. M. G. Slinko, “Dynamics of chemical processes and reactors,” Khim. Prom-st. (11), 260–268 (1979) [in Russian].
10. E. S. Kurkina, N. V. Peskov, M. M. Slinko, and M. G. Slinko, “On the nature of chaotic fluctuations in the rate of the CO oxidation reaction on a Pd-zeolite catalyst,” Dokl. Ross. Akad. Nauk **351** (4), 497–501 (1996) [in Russian].
11. E. A. Lashina, V. V. Kaichev, N. A. Chumakova, V. V. Ustyugov, G. A. Chumakov, and V. I. Bukhtiyarov, “Mathematical simulation of self-oscillations in methane oxidation on nickel: An isothermal model,” Kinet. Catal. **53**, 374–383 (2012). https://doi.org/10.1134/S0023158412030081
12. E. A. Lashina, V. V. Kaichev, A. A. Saraev, Z. S. Vinokurov, N. A. Chumakova, G. A. Chumakov, and V. I. Bukhtiyarov, “Experimental study and mathematical modeling of self-sustained kinetic oscillations in catalytic oxidation of methane over nickel,” J. Phys. Chem. A **121**, 6874–6886 (2017). https://doi.org/10.1021/acs.jpca.7b04525
13. E. A. Lashina, V. V. Kaichev, A. A. Saraev, N. A. Chumakova, G. A. Chumakov, and V. I. Bukhtiyarov, “Self-sustained oscillations in oxidation of propane over nickel: Experimental study and mathematical modelling,” Top. Catal. **63** (1–2), 33–48 (2020). https://doi.org/10.1007/s11244-019-01219-5
14. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Mayer, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems* (Nauka, Moscow, 1966) [in Russian].
15. P. Hartman, *Ordinary Differential Equations* (John Wiley & Sons, New York—London—Sydney, 1964; Mir, Moscow, 1970).
16. T. Poston and I. Stuart, *Catastrophe Theory and Its Applications* (Pitman, London—San Francisco, 1978; Mir, Moscow, 1980).
17. C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos* (CRC Press, Boca Raton, 1995).
18. L. P. Shil’nikov, A. L. Shil’nikov, D. V. Turaev, and L. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part 1* (World Scientific, Singapore, 1998; Inst. Komp’yut. Issled., Moscow—Izhevsk, 2004).
19. L. P. Shil’nikov, A. L. Shil’nikov, D. V. Turaev, and L. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part 2* (World Scientific, Singapore, 2001; Inst. Komp’yut. Issled., Moscow—Izhevsk, 2009).
20. A. Abbondandolo, L. Asselle, G. Benedetti, M. Mazzucchelli, and I. A. Taimanov, “The multiplicity problem for periodic orbits of magnetic flows on the 2-sphere,” Adv. Nonlinear Stud. **17** (1), 17–30 (2017). https://doi.org/10.1515/ans-2016-6003
21. A. K. Zvonkin and M. A. Shubin, “Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations,” Russ. Math. Surv. **39** (2), 69–131 (1984).
22. A. B. Vasil’eva and V. F. Butuzov, *Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations* (Vyssh. Shkola, Moscow, 1990) [in Russian].
23. H. G. Solari, M. A. Natiello, and G. B. Mindlin, *Nonlinear Dynamics: A Two-way Trip from Physics to Math* (Inst. Phys., London—Bristol—Philadelphia, 1996).
24. Yu. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory* (Springer, New York, 1998).
25. J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, New York, 1983; Inst. Kom’yut. Issled., Moscow—Izhevsk, 2002).
26. G. A. Chumakov, M. G. Slinko, and V. D. Belyaev, “Complex changes in the rate of heterogeneous catalytic reactions,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **253** (3), 653–658 (1980) [in Russian].
27. G. A. Chumakov and M. G. Slinko, “Kinetic turbulence (chaos) of the reaction rate of interaction of hydrogen with oxygen over metal catalysts,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **266** (5), 1194–1198 (1982) [in Russian].
28. G. A. Chumakov and N. A. Chumakova, “Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards,” Chem. Eng. J. **91**, 151–158 (2003). https://doi.org/10.1016/S1385-8947(02)00148-1
29. G. A. Chumakov, “Mathematical aspects of modeling the self-oscillations of the heterogeneous catalytic reaction rate. I,” Sib. Math. J. **46** (5), 948–956 (2005). https://doi.org/10.1007/s11202-005-0091-1
30. G. A. Chumakov, “Dynamics of a system of nonlinear differential equations,” Sib. Math. J. **48** (5), 949–960 (2007). https://doi.org/10.1007/s11202-007-0098-x

31. G. A. Chumakov, N. A. Chumakova, and E. A. Lashina, “Modeling the complex dynamics of heterogeneous catalytic reactions with fast, intermediate, and slow variables,” Chem. Eng. J. **282**, 11–19 (2015). https://doi.org/10.1016/j.cej.2015.03.017

32. G. A. Chumakov and N. A. Chumakova, “Localization of an unstable solution of a system of three nonlinear ordinary differential equations with a small parameter,” J. Appl. Ind. Math. **16** (4), 606–620 (2022). https://doi.org/10.1134/S1990478922040032

33. V. I. Bykov and S. B. Tsybenova, “Implementation of the parameter continuation method for a system of two equations,” Vychisl. Tekhnol. **7** (5), 21–28 (2002) [in Russian].

34. L. S. Pontryagin and L. V. Rodygin, “Periodic solution of one system of ordinary differential equations with a small parameter multiplying the derivatives,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **132** (3), 537–540 (1960) [in Russian].