

УДК 532.517.4

## ЛОКАЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИКЕ ПЛОСКОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА В ПАССИВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

© 2024 В. Н. Гребенев<sup>1a</sup>, А. Г. Деменков<sup>2,3b</sup>, Г. Г. Черных<sup>1c</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр  
информационных и вычислительных технологий,  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,  
<sup>2</sup>Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,  
<sup>3</sup>Новосибирский государственный технический университет,  
просп. К. Маркса, 20, г. Новосибирск 630073, Россия

E-mails: <sup>a</sup>vngrebenev@gmail.com, <sup>b</sup>demenkov@itp.nsc.ru, <sup>c</sup>chernykh@ict.nsc.ru

Поступила в редакцию 22.02.2023 г.; после доработки 27.04.2023 г.;  
принята к публикации 07.06.2023 г.

Для исследования течения в дальнем плоском турбулентном следе в пассивно стратифицированной среде привлекается математическая модель, включающая в себя дифференциальные уравнения баланса энергии турбулентности, переноса скорости её диссипации, касательного турбулентного напряжения, дефекта плотности жидкости и вертикальной компоненты вектора потока массы. Алгебраическое усечение последнего уравнения приводит к известному градиентному соотношению для вертикальной компоненты вектора потока массы. Установлено, что при определённом ограничении на значения эмпирических постоянных математической модели и при согласующемся с математической моделью законе роста временного масштаба это соотношение является совместной дифференциальной связью модели. Показана эквивалентность локально-равновесного приближения для вертикальной компоненты вектора потока массы равенству нулю скобки Пуассона для обезразмеренных значений коэффициента турбулентной диффузии и осреднённой плотности. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующих теоретические результаты.

**Ключевые слова:** дальний плоский турбулентный след в пассивно стратифицированной среде, метод дифференциальных связей, локально-равновесное усечение, численное моделирование.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.102

### ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования турбулентных течений обусловлена их чрезвычайной важностью в связи с изучением природных явлений, разработкой новых и усовершенствованием известных технических устройств. Проведение натурных и лабораторных исследований, как правило, и затруднительно, и дорогостояще. Поэтому определяющая роль отводится математическому моделированию путём проведения вычислительных экспериментов с привлечением иерархии математических моделей. И имеющиеся результаты экспериментального анализа турбулентных течений используются для тестирования математических моделей.

Одним из наиболее известных и распространённых подходов к построению математических моделей турбулентных течений является метод статистических моментов [1]. Гидродинамические поля в этом подходе являются случайными функциями и представляются в виде

суммы осреднённых и пульсационных составляющих. Такое представление после подстановки в уравнения Навье—Стокса приводит к известным уравнениям Рейнольдса, содержащим наряду с моментами первого порядка (осреднённые поля скорости, давления и температуры) моменты второго порядка (компоненты тензора рейнольдсовых напряжений и вектора потока скаляра). Для моментов второго порядка также могут быть получены дифференциальные уравнения их переноса, однако при этом в них появляются новые неизвестные корреляционные моменты второго и третьего порядков. Далее процесс может быть продолжен и задача математического моделирования турбулентного течения сводится к бесконечной системе дифференциальных уравнений переноса одноточечных корреляционных моментов. На практике [1, 2] часто ограничиваются моделями второго порядка замыкания. С этой целью для замыкания дифференциальных уравнений переноса моментов второго порядка привлекаются алгебраические представления неизвестных моментов второго и третьего порядков. Алгебраическое представление корреляционных моментов третьего порядка в целом ряде задач может быть получено с привлечением локально-равновесного приближения [1, 2], в соответствии с которым в уравнении переноса отбрасываются в предположении малости диффузионные и конвективные слагаемые, а неизвестные корреляционные моменты второго порядка (корреляции с пульсациями давления) моделируются. Полученная система дифференциальных уравнений достаточно сложна, поэтому можно попытаться упростить её, применив локально-равновесное усечение ко всем дифференциальным уравнениям переноса моментов второго порядка (либо к части уравнений). Следствием локально-равновесного усечения уравнений являются известные алгебраические градиентные представления моментов второго порядка. Естественным вопросом при применении алгебраического усечения уравнений переноса моментов гидродинамических полей является вопрос об обоснованности этого действия. Как уже отмечалось выше, алгебраическое усечение базируется на предположениях физического уровня строгости. В [3] предложена методология использования метода дифференциальных связей к обоснованию алгебраических параметризаций статистических моментов.

Отметим, что несмотря на успешное развитие других (относительно новых) подходов (метод моделирования крупных вихрей LES и его модификации, метод прямого численного моделирования DNS, комбинированные методы), основанные на замыкании моментных уравнений [1, 2] полуэмпирические модели турбулентности интенсивно совершенствуются и применяются при исследовании широкого класса турбулентных течений. В [4] с применением двухпараметрической  $e - \omega$  модели турбулентности выполнено основанное на теоретико-групповом анализе исследование автомодельности вырождения течения в плоском турбулентном следе; осуществлено сопоставление с известными экспериментальными данными, получено удовлетворительное согласование. В [5] аналогичным способом анализируется автомодельность вырождения безымпulsiveного закрученного турбулентного следа за телом вращения. Применяется модифицированная  $e - \epsilon$  модель турбулентности. Результаты расчётов согласуются с уникальными экспериментальными данными ИГиЛ СО РАН. В [6] выполнено численное моделирование течения, возникающего под воздействием ветровой нагрузки в устойчиво стратифицированном водоёме. Математическая модель базировалась на известном представлении Обухова—Прандтля коэффициента вертикального турбулентного обмена. Показано, что эта модель позволяет адекватно отразить основные характеристики процесса заглупления слоя перемешанной жидкости. В работах [7, 8] осуществлено уточнение известных полуэмпирических моделей турбулентности с использованием группы преобразований симметрии исходных уравнений гидродинамики. Построенная модификация  $e - \epsilon$  модели турбулентности успешно применена к широкому классу канонических течений. В [9, 10] выполнено основанное на машинном обучении уточнение алгебраических представлений компонент тензора рейнольдсовых напряжений с целью более детального учёта анизотропии ряда турбулентных течений. Уточнённые модели приводят к лучшему согласованию с DNS-данными для ряда течений.

Разработанный в [3] подход к обоснованию алгебраических представлений моментов вто-

рого и третьего порядков гидродинамических полей успешно применён к исследованию плоских турбулентных следов с варьируемым суммарным избыточным импульсом в однородной жидкости [11, 12]. В [11] показано, что алгебраическое представление касательного турбулентного напряжения (соотношение Колмогорова—Прандтля) является дифференциальной связью математической модели, включающей дифференциальное уравнение переноса этой величины. Следствием локально-равновесного усечения [12] уравнения переноса тройной корреляции турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости является известная алгебраическая модель Ханьялича—Лаундера [2].

В настоящей работе с использованием подхода, основанного на методе дифференциальных связей [3], обосновывается локально-равновесное усечение уравнения переноса вертикальной компоненты вектора потока массы в задаче о плоском турбулентном следе в пассивно стратифицированной среде [13–15]. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующих теоретические результаты. Продемонстрирована малость скобки Пуассона, связывающей коэффициент турбулентной диффузии и осреднённую плотность.

## 1. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА В ПАССИВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Система уравнений дальнего плоского турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде имеет следующий вид [11, 15, 16]:

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle, \quad (1)$$

$$U_0 \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \nu_t \frac{\partial e}{\partial y} + P - \epsilon, \quad (2)$$

$$U_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \nu_{t_1} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + \frac{\epsilon}{e} (C_{\epsilon_1} P - C_{\epsilon_2} \epsilon), \quad (3)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle v' \rho' \rangle, \quad (4)$$

$$U_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v' \rangle = \frac{\partial}{\partial y} \nu_{t_2} \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle + C_{\phi_2} e \frac{\partial U_1}{\partial y} - C_{\phi_1} \langle u'v' \rangle \frac{\epsilon}{e}, \quad (5)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle v' \rho' \rangle}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial y} K_{1\rho} \frac{\partial \langle v' \rho' \rangle}{\partial y} - \langle v'^2 \rangle \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho \rangle - C_{1\phi} \frac{\epsilon}{e} \langle v' \rho' \rangle. \quad (6)$$

Здесь  $U_1 = U_0 - U$  — дефект продольной осреднённой компоненты скорости,  $U_0$  — скорость набегающего потока (масштабным преобразованием переменной  $x$  величину  $U_0$  можно положить равной 1),  $e$  — кинетическая энергия турбулентности,  $\epsilon$  — скорость её диссипации,  $\langle u'v' \rangle$  — касательное турбулентное напряжение,  $\langle v' \rho' \rangle$  — вертикальная компонента вектора потока массы,  $\langle \rho_1 \rangle$  — осреднённый дефект плотности жидкости:  $\langle \rho_1 \rangle = \langle \rho \rangle - \rho_s(y)$ ,  $\rho_s(y) = \rho_0(1 - ay)$  — линейная плотность невозмущённой среды,  $\rho_0 = \rho_s(0)$ , штрихами помечены пульсационные составляющие полей скорости и плотности,  $\langle \cdot \rangle$  — знак осреднения; плотность жидкости считается линейной функцией температуры. Начало координат находится на задней кромке тела,  $x$  — горизонтальная,  $y$  — вертикальная оси. В уравнениях (1)–(6) отброшены в предположении малости слагаемые с молекулярной вязкостью и диффузией; используется приближение дальнего следа; величины

$$\nu_t = \nu_{t_1} = C_\mu \frac{e^2}{\epsilon}, \quad \nu_{t_2} = C_s C_\mu^{-1} \nu_{t_1}, \quad K_{1\rho} = C_{s\phi} \langle v'^2 \rangle \frac{e}{\epsilon} = \frac{2}{3} C_{s\phi} \frac{e^2}{\epsilon}$$

представляют собой коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии; величина

$$P = \langle u'v' \rangle \frac{\partial U_1}{\partial y}$$

задаёт порождение энергии турбулентности за счёт градиентов осреднённого течения;  $C_s, C_{s\phi}, C_\mu, C_\epsilon, C_{\epsilon_1}, C_{\epsilon_2}, C_{1\phi}, C_{\phi_1}, C_{\phi_2}, \sigma_\epsilon, \sigma_\epsilon$  — известные эмпирические постоянные [16]. Уравнения математической модели обезразмериваются с использованием масштаба скорости  $U_0$  и масштаба длины  $D$  — диаметра тела. В дальнейшем, по возможности, сохраняются те же обозначения для обезразмеренных переменных, что и для размерных. Для обезразмеривания дефекта плотности используется представление

$$\langle \tilde{\rho}_1 \rangle = \langle \rho_1 \rangle / a D \rho_0, \quad a = -\rho_0^{-1} \frac{d\rho_s}{dy}.$$

## 2. ВЕРИФИКАЦИЯ ЛОКАЛЬНО–РАВНОВЕСНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Локально-равновесное приближение ЛРП [1] означает, что конвективный и диффузионный переносы пренебрежимо малы. Применяя эту концепцию к модели (1)–(6), получаем следующие ЛРП приближения: представление касательного напряжения Рейнольдса  $\langle u'v' \rangle$ , известное как соотношение Колмогорова–Прандтля [16]:

$$\langle u'v' \rangle = C_\mu \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial U_1}{\partial y} \equiv C_\mu e \tau \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad (7)$$

$C_{\phi_2} = C_\mu C_{\phi_1}$  и представление вертикальной компоненты вектора потока массы

$$\langle v'\rho' \rangle = -C_{1\phi}^{-1} \langle v'^2 \rangle \tau \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \quad \tau = \frac{e}{\epsilon}. \quad (8)$$

Соотношения такого вида представляют собой редукцию дифференциального уравнения на инвариантное многообразие фазового пространства. Инвариантные многообразия эволюционных уравнений представляют собой дополнительные дифференциальные связи [17, 18], которые ведут к исследованию совместности переопределённых систем дифференциальных уравнений. Условие инвариантности многообразия формулируется следующим образом (см. [19]). Рассмотрим систему эволюционных уравнений  $E$ :

$$u_t^i = F^i(t, x, u^1, \dots, u^m, u_x^1, u_x^2, \dots), \quad i = 1, \dots, m.$$

Дополним систему дифференциальными связями  $H$ :

$$h_j(t, x, u^1, \dots, u^m, u_x^1, u_x^2, \dots) = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

где  $p \geq m$ . Запись  $G|_M = 0$  означает, что равенство  $G = 0$  выполняется на множестве  $M$ . Дифференциальные связи  $H$  задают инвариантное многообразие системы  $E$ , если имеют место равенства

$$D_t(h_j) |_{[E] \cup [H]} = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (9)$$

где  $[\cdot]$  — система уравнений и её дифференциальные следствия относительно  $x$ . Методы исследования переопределённых систем описаны в [19]. Проблема нахождения всех дифференциальных связей, совместных с рассматриваемыми дифференциальными уравнениями не является полностью алгоритмически решённой. Эффективные подходы нахождения определённого класса совместных дифференциальных связей разработаны в [18, 19]. Однако вопрос исследования на совместность дифференциальной связи с заданным дифференциальным уравнением (системой дифференциальных уравнений) требует только проверки условия инвариантности (9).

Будем использовать следующую теорему [3, 11].

**Теорема 1.** Положим  $\sigma_\epsilon = C_{\epsilon_1} = 1$ . Тогда  $\tau = \tau_h = U_0^{-1}(C_{\epsilon_2} - 1)(x + x_0)$  — точное решение уравнения (10).

**Доказательство.** Действительно, уравнение на  $\tau$  имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{e}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = U_0^{-1} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \nu_{t_1} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{P}{\epsilon} - 1 - \frac{e}{\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial y} \nu_{t_2} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \frac{1}{\epsilon} (C_{\epsilon_1} P - C_{\epsilon_2} \epsilon) \right) = \\ &U_0^{-1} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} C_\mu \tau^2 e \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} C_\mu \tau e \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{P}{\epsilon} - 1 - \frac{1}{\epsilon} \tau \frac{\partial}{\partial y} C_\mu \tau e \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \frac{1}{\epsilon} C_{\epsilon_1} P + C_{\epsilon_2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда для  $\sigma_\epsilon = 1$  (рекомендованное значение из [20]) и  $C_{\epsilon_1} = 1$  (рекомендованное значение [20] равно 1.4)  $\tau = \tau_h = U_0^{-1}(C_{\epsilon_2} - 1)(x + x_0)$  является точным решением уравнения (10).  $\square$

Рассмотрим сначала дифференциальную связь (7) и определим множество

$$M = \left( e, \tau, U_1, : \mathcal{H}(e, \tau, U_1, \langle u'v' \rangle) \equiv \langle u'v' \rangle - C_\mu e \tau \frac{\partial U_1}{\partial y} = 0 \right). \quad (11)$$

Проверка условия на её совместность с уравнениями (1)–(6) сводится к исследованию на инвариантность (11) относительно потока, порождённого только уравнениями (1)–(3), (5).

**Теорема 2.** Пусть  $(e, \tau, U_1, \langle u'v' \rangle, \langle \rho_1 \rangle, \langle v' \rho' \rangle)$  — достаточно гладкое решение системы (1)–(6) и  $\tau = \tau_h$ . В дополнение к приведённым соотношениям на константы положим  $C_s = C_\mu$ . Тогда множество  $M$  является инвариантным многообразием системы (1)–(6) при  $\tau = \tau_h$ , если и только если скобка Пуассона  $\{\tau_h e, U_1\} = 0$ .

**Доказательство.** Доказательство теоремы основано на непосредственных вычислениях производной:

$$D_x \mathcal{H}(e, \tau, U_1, \langle u'v' \rangle) = \langle u'v' \rangle_x - C_\mu (e_x \tau U_{1y} + e \tau_x U_{1y} + e \tau U_{1yx}). \quad (12)$$

Вычисление производной  $\langle u'v' \rangle_x$  с учётом уравнений (5), (7) приводит к равенству

$$\langle u'v' \rangle_x = A \tau^2 \left[ (\langle e \rangle_y)^2 U_{1y} + e [e_y U_{1y}]_y + 2e e_y U_{1yy} + e^2 U_{1yyy} \right] U_0^{-1},$$

где  $A = C_s C_\mu$ . Вычисление  $C_\mu e \tau U_{1yx}$  с учётом (1) даёт

$$C_\mu e \tau U_{1yx} = B \tau^2 (e e_y U_{yy} + e^2 U_{yyy}) U_0^{-1},$$

где  $B = C_\mu^2$ . Объединяя полученные представления и полагая  $A = B$ , имеем

$$\langle u'v' \rangle_x = A \tau^2 (e_y^2 U_{1y} + e e_y U_{1yy}) U_0^{-1}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в правую часть (12) и используем дифференциальное следствие уравнения (1) для представления (13), получаем

$$D_x \mathcal{H}(e, \tau, U_1, \langle u'v' \rangle) = -C_\mu [(\tau e)_x U_{1y} - \tau e_y U_{1x}] \equiv -C_\mu \{\tau_h e, U_1\}.$$

Таким образом, условие инвариантности множества  $M$  эквивалентно равенству нулю скобки Пуассона  $\{\tau_h e, U_1\}$ , что доказывает теорему 2.  $\square$

Рассмотрим далее дифференциальную связь (8) и определим множество

$$N = \left( \langle \rho \rangle, \tau, \langle v'^2 \rangle, : \mathcal{O}(\langle \rho \rangle, \tau, \langle v'^2 \rangle, \langle v' \rho' \rangle) \equiv \langle v' \rho' \rangle + C_{1\phi}^{-1} \langle v'^2 \rangle \tau \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} = 0 \right). \quad (14)$$

Проверка условия на её совместность с уравнениями (1)–(6) сводится к исследованию на инвариантность (14) относительно потока, порождённого уравнениями (2)–(4), (6).

**Теорема 3.** Пусть  $(e, \tau, U_1, \langle u'v' \rangle, \langle \rho_1 \rangle, \langle v'\rho' \rangle)$  – достаточно гладкое решение системы (1)–(6) и  $\tau = \tau_h$ . В дополнение к приведённым соотношениям на константы положим  $C_{s\phi} = C_{1\phi}^{-1}$ . Тогда множество  $N$  является инвариантным многообразием системы (1)–(6) при  $\tau = \tau_h$ , если и только если скобка Пуассона  $\{\tau_h \langle v'^2 \rangle, \langle \rho \rangle\} = 0$ .

**Доказательство.** Доказательство теоремы основано на непосредственных вычислениях производной:

$$D_x \mathcal{O}(\langle \rho \rangle, \tau, \langle v'^2 \rangle, \langle v'\rho' \rangle) = \langle v'\rho' \rangle_x + C_{1\phi}^{-1} (\langle v'^2 \rangle_x \tau \langle \rho \rangle_y + \langle v'^2 \rangle \tau_x \langle \rho \rangle_y + \langle v'^2 \rangle \tau \langle \rho \rangle_{yx}). \quad (15)$$

Вычисление производной  $\langle v'\rho' \rangle_x$  с учётом уравнений (6), (8) приводит к равенству

$$\langle v'\rho' \rangle_x = -D_1 \tau^2 \left[ (\langle v'^2 \rangle_y)^2 \langle \rho \rangle_y - \langle v'^2 \rangle \langle \rho \rangle_y \langle v'^2 \rangle_{yy} - 3 \langle v'^2 \rangle \langle v'^2 \rangle_y \langle \rho \rangle_{yy} - (\langle v'^2 \rangle)^2 \langle \rho \rangle_{yyy} \right] U_0^{-1},$$

где  $D_1 = 2C_{s\phi} C_{1\phi}^{-1}$ . Вычисление производной  $\langle v'^2 \rangle \tau \langle \rho \rangle_{yx}$  с учётом (4) даёт

$$C_{1\phi}^{-1} \langle v'^2 \rangle \tau \langle \rho \rangle_{yx} = E \tau^2 \left[ 2 \langle v'^2 \rangle \langle v'^2 \rangle_y \langle \rho \rangle_{yy} - \langle v'^2 \rangle \langle \rho \rangle_y \langle v'^2 \rangle_{yy} + (\langle v'^2 \rangle)^2 \langle \rho \rangle_{yyy} \right],$$

где  $E = C_{1\phi}^{-2}$ . Объединяя полученные представления и полагая  $D_1 = E$ , имеем

$$\langle v'\rho' \rangle_x + C_{1\phi}^{-1} \langle v'^2 \rangle \tau \langle \rho \rangle_{yx} = -D_1 \tau^2 (\langle v'^2 \rangle_y)^2 \langle \rho \rangle_y - D_1 \tau^2 \langle v'^2 \rangle \langle v'^2 \rangle_y \langle \rho \rangle_{yy}. \quad (16)$$

Подставляя (13) в правую часть (15) и используя дифференциальное следствие уравнения (4) для представления (16), получаем

$$D_x \mathcal{O}(\langle \rho \rangle, \tau, \langle v'^2 \rangle, \langle v'\rho' \rangle) = C_{1\phi}^{-1} [(\tau \langle v'^2 \rangle)_x \langle \rho \rangle_y - \tau \langle v'^2 \rangle_y \langle \rho \rangle_x] \equiv C_{1\phi}^{-1} \{\tau_h \langle v'^2 \rangle, \langle \rho \rangle\}.$$

Таким образом, условие инвариантности множества  $N$  эквивалентно равенству нулю скобки Пуассона  $\{\tau_h \langle v'^2 \rangle, \langle \rho \rangle\}$ , что доказывает теорему 3.  $\square$

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Основываясь на представленных выше теоретических результатах, авторы выполнили серию численных экспериментов. Математическую модель, включающую систему дифференциальных уравнений (1)–(6), будем называть моделью 1. Математическую модель, включающую уравнения (1)–(3), (5), назовём моделью 2.

Первая серия численных экспериментов заключалась в следующем. В модели 2 воспользуемся локально-равновесным усечением уравнения (5) и получим хорошо известное [16] соотношение Колмогорова–Прандтля (7), замыкающее уравнение (1). Систему уравнений (1)–(3), включающую замкнутое уравнение (1), назовём моделью 3. Для моделей 2, 3 ставились следующие краевые условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \langle u'v' \rangle = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, x \geq x_{01}; \\ U_1 = e = \epsilon = \langle u'v' \rangle = 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, x \geq x_{01}. \end{aligned}$$

Граничное условие для касательного напряжения задаётся лишь для модели 2.

Начальные данные при расчётах по модели 3 задавались при  $x_{01} = 625D$  согласованными с результатами лабораторных экспериментов [21]. Построение конечно-разностного алгоритма и его тестирование обсуждаются в [11]. В настоящей работе использовалась разнесённая разностная сетка: величины  $\langle u'v' \rangle$  и  $\langle v'\rho' \rangle$  рассчитывались в узлах, являющихся серединой ячеек основной сетки. Параметры сеточной области выбирались следующими:  $x^n = x_{01} + n \cdot \Delta x$ ,

$y_j = (j - 1) \cdot h_y$ ,  $n = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, M_y$ . В расчётах полагались  $\Delta x = 0,05$ ,  $h_y = 0,05$ ,  $M_y = 900$ . Измельчение параметров сетки в два раза приводило к отклонениям решения не более 0,5% в равномерной норме. Расчёты проводились вплоть до значений  $x = 2500D$ . При  $x = 1900D$  в численный эксперимент включалась модель 2. Начальное условие для касательного напряжения определялось из соотношения (7). На расстоянии  $x = 2100D$  результаты расчётов по моделям 2, 3 сопоставлялись. Поскольку выполненные с учётом условий теорем 1, 2 ( $c_{e1} = \sigma_\epsilon = 1$ ) результаты численных экспериментов с моделями 2, 3 были уже представлены ранее [11], в настоящей работе мы остановимся на расчётах с использованием известного набора эмпирических постоянных [20]:  $C_\mu = 0,09$ ,  $C_s = 0,1$ ,  $C_{e1} = 1,4$ ,  $C_{e2} = 1,95$ ,  $C_{\phi_1} = 2,8$ ,  $C_{\phi_2} = C_\mu C_{\phi_1}$ ,  $\sigma_e = \sigma_\epsilon = 1$ . На рис. 1 сопоставляются рассчитанные по моделям 2, 3 профили дефекта продольной компоненты скорости  $U_1/U_0$  для расстояния  $x/D = 2100$ . На рис. 2 сопоставляются найденные по моделям 2, 3 значения касательного турбулентного напряжения  $\langle u'v' \rangle / U_0^2$ . Расчёты по модели 2 показаны сплошной линией, по модели 3 — пунктирной. Можно видеть, что для стандартного набора эмпирических постоянных результаты расчётов достаточно близки и демонстрируют разумность локально-равновесного представления (7).

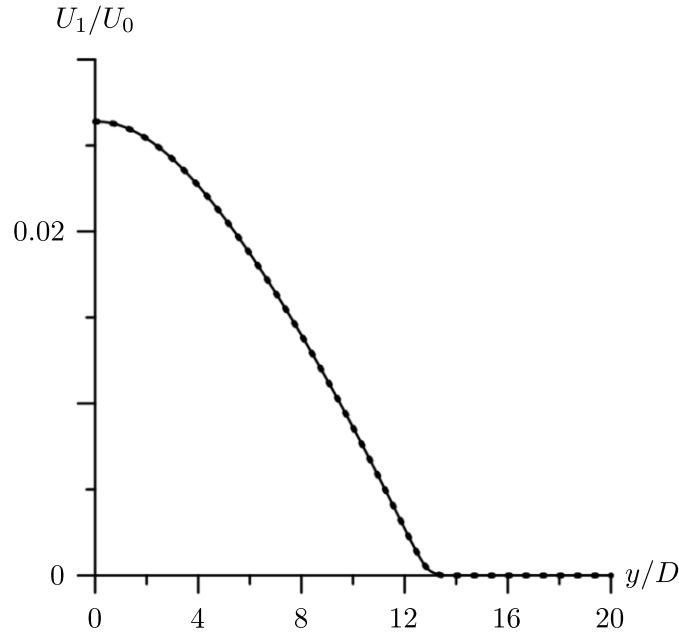


Рис. 1. Рассчитанное на основе двух математических моделей поперечное распределение дефекта продольной компоненты скорости  $U_1$  при  $x/D = 2100$

Дальнейшие численные эксперименты проводились с целью демонстрации применимости локально-равновесного представления (8).

Назовём моделью 4 систему дифференциальных уравнений (1)–(4), (6) с замкнутым на основе (7) уравнением (1). Моделью 5 назовём математическую модель, включающую уравнения (1)–(4), в которой (1) замкнуто посредством (7), а уравнение (4) — посредством (8). Дополним также краевые условия

$$\begin{aligned} \langle \rho_1 \rangle &= \frac{\partial \langle v' \rho' \rangle}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, x \geq x_{01}; \\ \langle \rho_1 \rangle &= \langle v' \rho' \rangle = 0 \text{ при } y \rightarrow \infty, x \geq x_{01}. \end{aligned}$$

В качестве начальных условий в модели 5 при  $x = x_{01} = 625D$  ставились нулевые начальные условия для  $\langle \rho_1 \rangle$  и начальный профиль для  $\langle v' \rho' \rangle$  исходя из соотношения (8). Эмпирические постоянные задавались стандартными [16, 20]:  $C_s = 0,1$ ,  $C_{s\phi} = 0,11$ ,  $C_\mu = 0,09$ ,  $C_{e1} = 1,4$ ,  $C_{e2} = 1,95$ ,  $C_{1\phi} = 3,2$ ,  $C_{\phi_1} = 2,8$ ,  $C_{\phi_2} = C_\mu C_{\phi_1}$ ,  $\sigma_e = \sigma_\epsilon = 1$ .

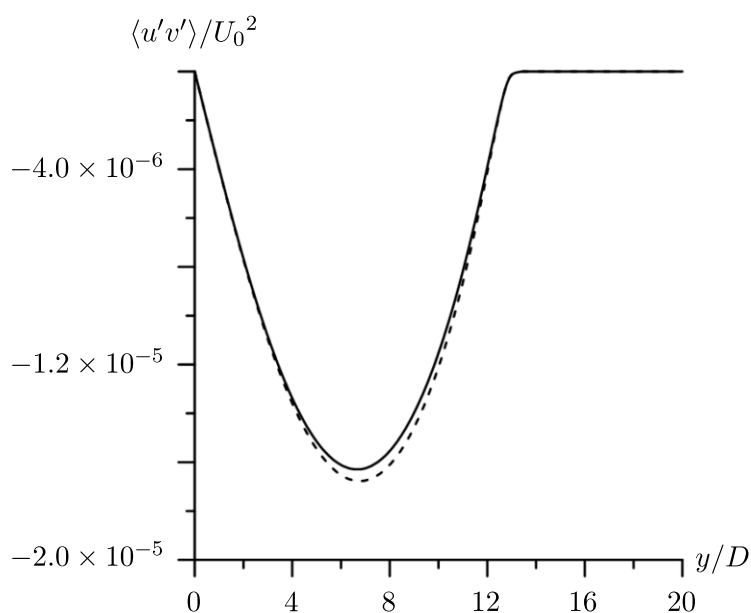


Рис. 2. Рассчитанное на основе двух математических моделей поперечное распределение касательного турбулентного напряжения  $\langle u'v' \rangle$  при  $x/D = 2100$

Относящаяся к моделям 4, 5 серия численных экспериментов начиналась с расчётов по модели 5; при  $x = 1900D$  подключалась модель 4. Результаты расчётов по моделям 4, 5 сопоставляются на рис. 3, 4. Рис. 3 демонстрирует распределение дефекта плотности для расстояния  $x = 2100D$ . На рис. 4 приведено распределение  $\langle v'\rho' \rangle$  для того же расстояния. Рис. 3, 4, как и рис. 1, 2, также демонстрируют применимость алгебраического представления (8). Расчёты по модели 4 показаны сплошной линией, по модели 5 — пунктирной. В дополнение к результатам рис. 1–4 на рис. 5 показано поведение характерного временного масштаба  $\tau = e/\epsilon$ .

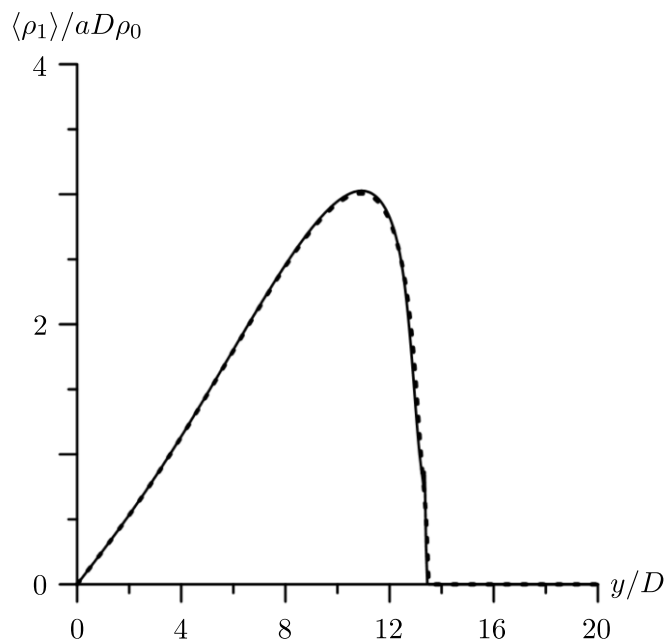


Рис. 3. Рассчитанное на основе двух математических моделей поперечное распределение осреднённого дефекта плотности жидкости  $\rho_1$  при  $x/D = 2100$

Результаты расчётов на двух сетках с параметрами сетки по переменным  $x$  и  $y$ , характе-



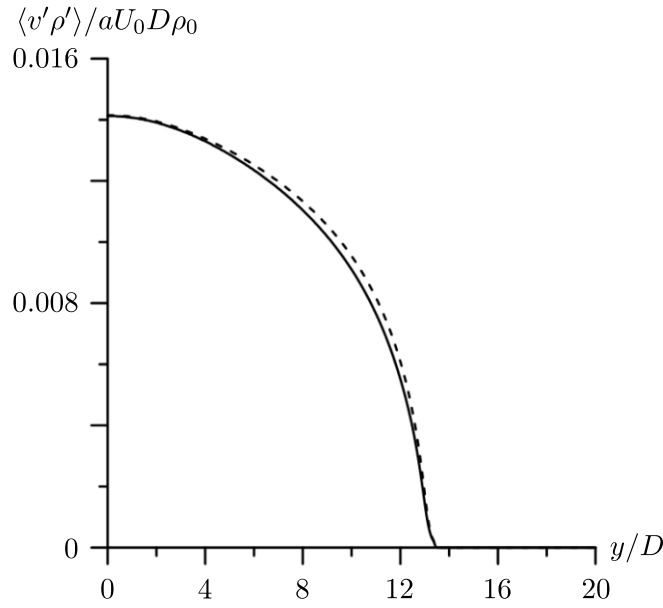


Рис. 4. Рассчитанное на основе двух математических моделей поперечное распределение вертикальной компоненты вектора потока массы  $\langle v' \rho' \rangle$  при  $x/D = 2100$

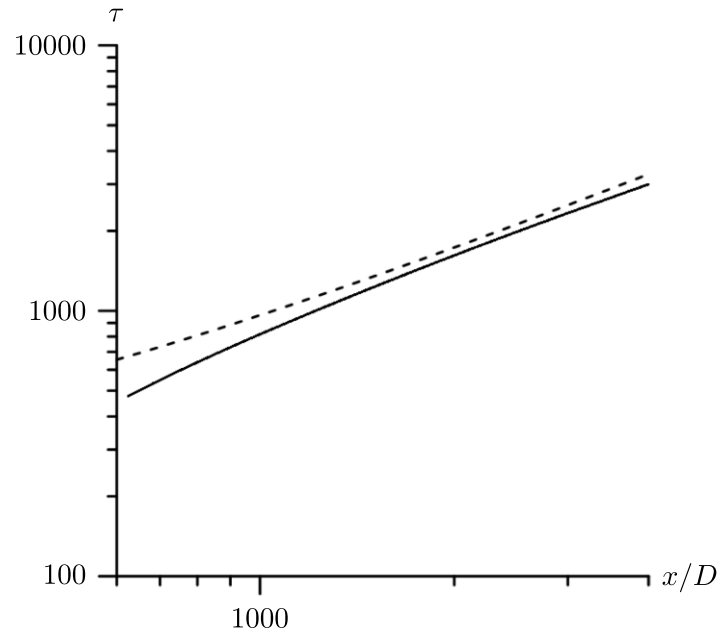


Рис. 5. Изменение временного масштаба  $\tau = e/\epsilon$  в зависимости от расстояния от тела: сплошная линия —  $\tau' = e(x, 0)U_0/\epsilon(x, 0)D$ , штриховая линия —  $0,77(x/D + 250)$

ризуемыми  $\Delta x = 0,05$ ,  $h_y = 0,05$  (сетка 1) и  $\Delta x = 0,0125$ ,  $h_y = 0,025$  (сетка 2) показывают, что значения конечно-разностного аналога скобок Пуассона  $\{\tau_h e, U_1\}$  и  $\{\tau_h \langle v'^2 \rangle, \langle \rho \rangle\}$  на больших расстояниях от тела близки к нулю для всех сеточных параметров. В таблице представлены значения величин  $\delta_u^n$  и  $\delta_\rho^n$ ,

$$\delta_u^n = \frac{\max_j \left| (U_{1x}^h (e^2/\epsilon)_y)_j^n - (U_{1y}^h (e^2/\epsilon)_x)_j^n \right|}{\max_j (|\nabla^h (e^2/\epsilon)|_j^2, |\nabla^h U_1|_j^2)}, \quad (17)$$

$$\delta^n_{\rho} = \frac{\max_j \left| (\langle \rho \rangle_x^h (e^2/\epsilon)_y^h)_j^n - (\langle \rho \rangle_y^h (e^2/\epsilon)_x^h)_j^n \right|}{\max_j (|\nabla^h (e^2/\epsilon)|_j^2, |\nabla^h \langle \rho \rangle|_j^2)}, \quad (18)$$

рассматриваемые как функции расстояния от тела и при  $x = x^n$  характеризующие конечно-разностные аналоги скобок Пуассона  $\{\tau_h e, U_1\}$  и  $\{\tau_h \langle v'^2 \rangle, \langle \rho \rangle\}$ . Индексы 1 и 2 соответствуют разным расчётным сеткам. В (17), (18)  $(U_{1x}^h)_j$ ,  $(U_{1y}^h)_j$ ,  $(\langle \rho \rangle_x^h)_j$ ,  $(\langle \rho \rangle_y^h)_j$ ,  $((e^2/\epsilon)_x^h)_j$ ,  $((e^2/\epsilon)_y^h)_j$ ,  $(\nabla^h U_1)_j$ ,  $(\nabla^h \langle \rho \rangle)_j$ ,  $(\nabla^h (e^2/\epsilon))_j$  — конечно-разностные аппроксимации первых частных производных и градиентов в точках  $(x^n, y_j) : x^n = x_{01} + n \cdot \Delta x$ ,  $y_j = (j - 1) \cdot h_y$ ,  $n = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, M_y$ .

Значения  $\delta^n_u$  и  $\delta^n_{\rho}$  при различных расстояниях от тела, полученные в расчётах на последовательности сеток

$x/D$	$\delta^n_{u1}$	$\delta^n_{u2}$	$\delta^n_{\rho1}$	$\delta^n_{\rho2}$
625	$0.121 \cdot 10^{-3}$	$0.197 \cdot 10^{-3}$	$0.815 \cdot 10^{-3}$	$0.123 \cdot 10^{-2}$
1000	$0.257 \cdot 10^{-4}$	$0.257 \cdot 10^{-4}$	$0.577 \cdot 10^{-6}$	$0.282 \cdot 10^{-6}$
1500	$0.878 \cdot 10^{-5}$	$0.878 \cdot 10^{-5}$	$0.664 \cdot 10^{-6}$	$0.274 \cdot 10^{-6}$
1900	$0.845 \cdot 10^{-5}$	$0.845 \cdot 10^{-5}$	$0.400 \cdot 10^{-6}$	$0.174 \cdot 10^{-6}$
2100	$0.837 \cdot 10^{-5}$	$0.837 \cdot 10^{-5}$	$0.245 \cdot 10^{-6}$	$0.114 \cdot 10^{-6}$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы сводятся к следующему. При исследовании дальнего плоского турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде рассмотрена математическая модель, включающая в себя дифференциальные уравнения переноса касательного турбулентного напряжения  $\langle u'v' \rangle$  и вертикальной компоненты вектора потока массы  $\langle v'\rho' \rangle$ . Следствием локально-равновесного усечения этих двух уравнений являются хорошо известные алгебраические соотношения (7), (8). Теоретически показано, что эти алгебраические соотношения являются дифференциальными связями математической модели. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующих реализуемость соответствующих алгебраических параметризаций.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Результаты получены в рамках работы по теме «Разработка и исследование вычислительных технологий решения фундаментальных и прикладных задач аэро-, гидро- и волновой динамики» государственного задания Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий. Численные эксперименты выполнены в рамках государственного задания Института теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН (проект 122041400020-6). Постановка задачи и результаты расчётов обсуждались соавторами совместно. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С. Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. Том 1,2. СПб.: Гидрометеоздат, 1992–1996.

2. *Hanjalic K., Launder B. E.* Reassessment of modeling turbulence via Reynolds averaging: A review of second-moment transport strategy // *Phys. Fluids*. 2021. V. 33, N 9. Article 091302; DOI: 10.1063/5.0065211
3. *Гребенев В. Н., Илюшин Б. Б.* О применении дифференциальных связей для анализа моделей турбулентности // *Доклады АН*. 2000. Т. 374, № 6. С. 761–764.
4. *Шмидт А. В.* Автомодельные решения модели дальнего турбулентного следа // *Изв. РАН. МЖГ*. 2019. № 2, С. 94–98; DOI: 10.1134/S0568528119010134
5. *Shmidt A. V.* Similarity in the far swirling momentumless turbulent wake // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2020. V. 13. N 1. P. 79–86; DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-1-79-86
6. *Belolipetskii V. M., Genova S. N.* On application of Prandtl–Obukhov formula in the numerical model of the turbulent layer depth dynamics // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2020. V. 13. N 1. P. 37–47; DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-1-37-47
7. *Kingenberg D., Oberlack M., Pluемacher D.* Symmetries and turbulence modelling // *Phys. Fluids*. 2020. V. 32, N 2. Article 025108; DOI: 10.1063/1.5141165
8. *Kingenberg D., Oberlack M.* Statistically invariant eddy viscosity models // *Phys. Fluids*. 2022. V. 34, N 5. Article 05514; DOI: 10.1063/5.0090988
9. *Kaandorp M. L. A., Dwight R. P.* Data-driven modelling of the Reynolds stress tensor using random forests with invariance // *Comput. Fluids*. 2020. V. 202. Article 104497; DOI: 10.1016/j.compfluid.2020.104497
10. *Бернар А., Яковенко С. Н.* Усовершенствование RANS-моделей с помощью случайного леса с тензорным базисом для турбулентных течений в двумерных каналах с выступами // *Прикл. механика и техн. физика*. 2023. Т. 64, № 3. С. 89–94; DOI: 10.15372/PMTF202215201
11. *Grebenev V. N., Demenkov A. G., Chernykh G. G., Grichkov A. N.* Local equilibrium approximation in free turbulent flows: verification through the method of differential constraints // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2021. V. 117, N 9. Article e202000095; DOI: 10.1002/zamm.202000095
12. *Гребенев В. Н., Деменков А. Г., Черных Г. Г.* Метод дифференциальных связей: локально-равновесное приближение в безымпulseном плоском турбулентном следе // *Прикл. механика и техн. физика*. 2021. Т. 62, № 3. С. 38–47; DOI: 10.15372/PMTF20210304
13. *Alexopoulos C. C., Keffer J. F.* Turbulent Wake in a Passively Stratified Field // *Phys. Fluids*. 1971. V. 14, N 2, P. 216–224.
14. *Durbin P. A., Hunt J. C. R., Firth D.* Mixing by a turbulent wake of a uniform temperature gradient in the approach flow // *Phys. Fluids*. 1982. V. 25, N 4, P. 588–591.
15. *Ефремов И. А., Капцов О. В., Черных Г. Г.* Автомодельные решения двух задач свободной турбулентности // *Матем. моделирование*. 2009. Т. 21, № 12. С. 137–144.
16. *Rodi W.* Turbulence models and their application in hydraulics. A state of the art review. Delft: IAHN, 1980.
17. *Яненко Н. Н.* Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // *Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда*. 1964. Т. 2. С. 247–252.
18. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1988.
19. *Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
20. *Harsha P. T.* Kinetic Energy Methods // *Handbook of Turbulence. Volume 1 Fundamentals and Applications*. 1977. P. 187–235.
21. *Hinze J. O.* Turbulence. Second edition. N. Y.: McGraw-Hill College, 1975.

UDC 532.517.4

**LOCAL EQUILIBRIUM APPROACH IN THE PROBLEM OF THE DYNAMICS OF A PLANE TURBULENT WAKE IN A PASSIVELY STRATIFIED MEDIUM**© 2024 V. N. Grebenev<sup>1a</sup>, A. G. Demenkov<sup>2,3b</sup>, G. G. Chernykh<sup>1c</sup><sup>1</sup>*Federal Research Center for Information and Computational Technologies,  
Novosibirsk, 630090 Russia,*<sup>2</sup>*Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,  
Novosibirsk, 630090 Russia,*<sup>3</sup>*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073 Russia*E-mails: <sup>a</sup>vngrebenev@gmail.com, <sup>b</sup>demenkov@itp.nsc.ru, <sup>c</sup>chernykh@ict.nsc.ru

Received 22.02.2023, revised 27.04.2023, accepted 07.06.2023

**Abstract.** To study the flow in a far plane turbulent wake in a passively stratified medium, we use a mathematical model that includes differential equations for the balance of turbulence energy, the transfer of its dissipation rate, shear turbulent stress, a defect of the density of the liquid, and the vertical component of the mass flux vector. Algebraic truncation of the last equation leads to a well-known gradient relation for the vertical component of the mass flux vector. It is established that under a certain constraint on the values of empirical constants in the mathematical model and the law of time scale growth consistent with the mathematical model, this relation is a differential constraint for the model. The equivalence of the local equilibrium approach for the vertical component of the mass flux vector and the zero Poisson bracket for the dimensionless turbulent diffusion coefficient and the averaged density is shown. The results of numerical experiments illustrating the theoretical results are presented.

**Keywords:** far plane turbulent wake in passively stratified medium, differential constraint method, local equilibrium truncation, numerical modeling.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.102

## REFERENCES

1. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence* (Dover Publ., Mineola, 2007; Gidrometeoizdat, St. Petersburg, 1992–1996).
2. K. Hanjali'c and B. E. Launder, "Reassessment of modeling turbulence via Reynolds averaging: A review of second-moment transport strategy," *Phys. Fluids* **33** (9), 091302 (2021). <https://doi.org/10.1063/5.0065211>
3. V. N. Grebenev and B. B. Ilyushin, "Application of differential constraints to the analysis of turbulence models," *Dokl. Phys.* **45** (10), 550–553 (2000).
4. A. V. Schmidt, "Self-similar solutions of the model  $k - \omega$  for a turbulent far wake," *Fluid Dyn.* **54** (2), 239–243 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0015462819010130>
5. A. V. Schmidt, "Similarity in the far swirling momentumless turbulent wake," *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **13** (1), 79–86 (2020). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-1-79-86>
6. V. M. Belolipetskii and S. N. Genova, "On application of Prandtl–Obukhov formula in the numerical model of the turbulent layer depth dynamics," *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **13** (1), 37–47 (2020). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-1-37-47>

7. D. Kingenber, M. Oberlack, and D. Pluemacher, “Symmetries and turbulence modelling,” *Phys. Fluids* **32** (2), 025108 (2020). <https://doi.org/10.1063/1.5141165>
8. D. Kingenber and M. Oberlack, “Statistically invariant eddy viscosity models,” *Phys. Fluids* **34** (5), 05514 (2022). <https://doi.org/10.1063/5.0090988>
9. M. L. A. Kaandorp and R. P. Dwight, “Data-driven modelling of the Reynolds stress tensor using random forests with invariance,” *Comput. Fluids* **202**, 104497 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104497>
10. A. Bernard and S. N. Yakovenko, “Enhancement of RANS models by means of the tensor basis random forest for turbulent flows in two-dimensional channels with bumps,” *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **64** (3), 437–441 (2023). <https://doi.org/10.1134/S0021894423030094>
11. V. N. Grebenev, A. G. Demenkov, G. G. Chernykh, and A. N. Grichkov, “Local equilibrium approximation in free turbulent flows: verification through the method of differential constraints,” *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* **117** (9), e202000095 (2021). <https://doi.org/10.1002/zamm.202000095>
12. V. N. Grebenev, A. G. Demenkov, and G. G. Chernykh, “Method of Differential Constraints: Local Equilibrium Approximation in a Planar Momentumless Turbulent Wake,” *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **62** (3), 383–390 (2021). <https://doi.org/10.15372/PMTF20210304>
13. C. C. Alexopoulos and J. F. Keffer, “Turbulent wake in a passively stratified field,” *Phys. Fluids* **14** (2), 216–224 (1971).
14. P. A. Durbin, J. C. R. Hunt, and D. Firth, “Mixing by a turbulent wake of a uniform temperature gradient in the approach flow,” *Phys. Fluids* **25** (4), 588–591 (1982).
15. I. A. Efremov, O. V. Kaptsov, and G. G. Chernykh, “Self-similar solutions of two problems of free turbulence,” *Mat. Model.* **21** (12), 137–144 (2009) [in Russian].
16. W. Rodi, *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics. A State of the Art Review* (IAHR, Delft, 1980).
17. N. N. Yanenko, “Compatibility theory and methods for integrating systems of nonlinear partial differential equations,” *Proc. 4th All-Union. Math. Congr.* **2**, 247–252 (Nauka, Leningrad, 1964) [in Russian].
18. A. F. Sidorov, V. P. Shapeev, and N. N. Yanenko, *Method of Differential Constraints and Applications in Gas Dynamics* (Nauka, Novosibirsk, 1988) [in Russian].
19. V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachev, and A. A. Rodionov, *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics* (Springer, Dordrecht, 1998; Nauka, Novosibirsk, 1994).
20. P. T. Harsha, “Kinetic Energy Methods,” *Handbook of Turbulence. Vol. 1. Fundamentals and Applications* 187–235 (1977).
21. J. O. Hinze, *Turbulence* (McGraw-Hill College, New York, 1975).