УДК 517.9

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЁХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**© 2024 С. И. Сенашов[a], И. Л. Савостьянова[b]**

*Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева, пр. Красноярский рабочий, 31, г. Красноярск 660037, Россия*

E-mails: [a]sen@sibsau.ru, [b]ruppa@inbox.ru

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.; после доработки 29.02.2024 г.;
принята к публикации 03.03.2024 г.

Известно, что если система дифференциальных уравнений допускает группу непрерывных преобразований, то в ряде случаев, она может быть представлена в виде совокупности двух систем дифференциальных уравнений. Как правило, эти системы имеют меньший порядок, чем исходная система. Выше сказанное относится к линейным уравнениям теории упругости. Первая система — автоморфная, характеризуется тем, что все её решения получаются из одного решения с помощью преобразований этой группы. Вторая система — разрешающая, её решения под действием группы переходят сами в себя. Разрешающая система несёт основную информацию об исходной системе. В данной работе изучаются автоморфная и разрешающая системы двумерных и трёхмерных стационарных уравнения упругости которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Построены бесконечные серии законы сохранения для разрешающих систем уравнений и автоморфных систем. Поскольку рассматриваемые системы уравнений упругости линейны, то таких законов имеется бесконечно много. В данной работе построена бесконечные серии законов сохранения линейных по первым производным. Именно эти законы позволили решить первую краевую задачи для уравнений теории упругости в двумерном и трёхмерном случае. Решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по границе исследуемых областей.

**Ключевые слова:** уравнения двумерной упругости, уравнения трёхмерной упругости, законы сохранения, решение краевых задач.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.107

## ВВЕДЕНИЕ

Система уравнений линейной изотропной упругости в трехмерном случае изучалась многими авторами. Особый интерес представляет построение точных решений для трехмерных уравнений. Такие решения строили П.Ф. Папкович, Х. Нейбер, Е. Трефтц, Б.Г. Галеркин (см. [1] и ссылки из нее), Б.Д. Аннин, В.О. Бытев, С.И. Сенашов [2], Б.Д. Аннин, Н.И. Остросаблин, Р.И. Угрюмов [3], Н.И. Остросаблин [4–6], В.Ю. Прудников, Ю.А. Чиркунов [7], Н.Ф. Бельмецов, Ю.А. Чиркунов [8], Ю.Н. Радаев [9] и т.д. Линейные уравнения теории упругости с групповой точки зрения изучаются уже достаточно давно [2]. Сначала была найдена группа точечных преобразований и перечислены все инвариантные решения (см. [2] и цитируемую там литературу). Далее было выполнено групповое расслоение уравнений Ламе [5]. Хотя задача о групповом расслоении поставлена еще С. Ли и в общем виде решена Вессио в 1904 г., но решений ее для конкретных систем дифференциальных уравнений не так много. В этом смысле уравнения теории упругости составляют приятное исключение. Групповое расслоение позволило лучше понять, почему методы комплексного переменного так широко используются в двумерной теории упругости. Это происходит потому, что разрешающая система для двумерных уравнений теории упругости есть система уравнений Коши—Римана. Для трехмерных уравнений разрешающая система — система Моисила—Тодореску. Не смотря на такое внимание к уравнениям упругости, методов решения краевых задач для тел конечных размеров в трехмерном случае практически нет. В настоящей работе строятся точные решения краевых задач теории упругости в трехмерном случае. Для этого найдены законы сохранения специального вида, которые позволяют находить решения трехмерных уравнений теории упругости в виде нескольких квадратур, которые вычисляются по границе ограниченной упругой области. Статья продолжает серию работ посвященных решению краевых задач с помощью законов сохранения, последние результаты и необходимые определения можно найти в [10]. Из недавно опубликованных по этой теме работ отметим так же статью [11], в которой автором построены законы сохранения для трехмерного уравнения эйконала и дан геометрический смысл полученных законов сохранения.

Результаты, полученные в этой статье, показывают, что законы сохранения можно эффективно использовать и для решения краевых задач для трехмерных уравнений.

## 1. ТРЁХМЕРНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 1.1. Постановка задачи

Запишем уравнения теории упругости в статическом трёхмерном случае в декартовой системе координат $x$, $y$, $z$

$$\alpha_0 \operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{w} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \overline{w} = 0, \tag{1}$$

где $\bar{w} = (w^1, w^2, w^3)$ — вектор упругого перемещения, $\alpha_0 = (\lambda + 2\mu)/\mu$, $\lambda$, $\mu$ — упругие постоянные Ламе.

Для этих уравнений поставим первую краевую задачу на поверхности $S$ ограничивающую объём $V$:

$$\overline{w}|_S = \overline{w_0}(x, y, z). \tag{2}$$

С помощью законов сохранения решить задачу (1)–(2).

### 1.2. Предварительные сведения

Известно [2], что система уравнений (1) допускает, в смысле Ли—Овсянникова, оператор вида

$$X = h_1(x, y, z)\partial_{w^1} + h_2(x, y, z)\partial_{w^2} + h_3(x, y, z)\partial_{w^3}, \tag{3}$$

где $(h_1, h_2, h_3)$ — произвольное решение системы уравнений (1).

Продолжим оператор (3) на первые производные $p^1_1 = \frac{\partial w^1}{\partial x}$, $p^1_2 = \frac{\partial w^1}{\partial y}$, $p^1_3 = \frac{\partial w^1}{\partial z}$, $\ldots$, $p^3_3 = \frac{\partial w^3}{\partial z}$ по формулам

$$\underset{1}{X} = X + \zeta^i_j \frac{\partial}{\partial p^i_j},$$

где $\zeta^i_j = -p^i_\beta D_j(h^\beta)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + p^k_j \frac{\partial}{\partial w^k}$ для краткости полагаем $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Пусть $h_1$, $h_2$, $h_3$ — произвольные гармонические функции, тогда инварианты первого порядка (решение уравнения $\underset{1}{X}\, I = 0$), имеют вид

$$I_1 = x, \quad I_2 = y, \quad I_3 = z, \quad I_4 = \operatorname{div} \overline{w}, \quad I_5 = \operatorname{rot} \overline{w}.$$

Назначая инварианты $I_4$, $I_5$ функциями от $I_1$, $I_2$, $I_3$ получим автоморфную систему [6]

$$\operatorname{div}\overline{w} = \theta(x,y,z), \quad \operatorname{rot}\overline{w} = \overline{\omega}(x,y,z) \tag{4}$$

и разрешающую систему [6]

$$\alpha_0 \operatorname{grad}\theta - \operatorname{rot}\overline{\omega} = 0, \quad \operatorname{div}\overline{\omega} = 0. \tag{5}$$

Известно, что система уравнений (1) равносильна системе уравнений первого порядка (4), (5). Описанная выше процедура носит название группового расслоения.

Если в (5) положить $\alpha_0\theta = p$, то получим известную систему уравнений Моисила—Теодореску (СМТ), которая подробна исследована в работе [8]. Там найдены законы сохранения для СМТ и с их помощью решена краевая задача. Там же указаны некоторые новые точные решения СМТ. Приведём некоторые из них, которые позволят решить задачу (1), (2).

Решениями СМТ являются следующие функции

$$\begin{aligned}
g_1^0 &= (0,\ (x-x_0)/r_0^3,\ (y-y_0)/r_0^3,\ (z-z_0)/r_0^3),\\
g_2^0 &= ((x-x_0)/r_0^3,\ 0,\ -(z-z_0)/r_0^3,\ (y-y_0)/r_0^3),\\
g_3^0 &= ((y-y_0)/r_0^3,\ (z-z_0)/r_0^3,\ 0,\ -(x-x_0)/r_0^3),\\
g_4^0 &= ((z-z_0)/r_0^3,\ -(y-y_0)/r_0^3,\ (x-x_0)/r_0^3,\ 0),
\end{aligned}$$

где $r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, $(x_0, y_0, z_0) \in V$.

### 1.3. Законы сохранения уравнений (4)

Известно, что решения системы уравнений (1) связаны с решениями системы Моисила—Теодореску [6] уравнениями (4)

$$\begin{gathered}
F_1 = -\theta + {w^1}_x + {w^2}_y + {w^3}_z = 0, \quad F_2 = -\omega^1 + {w^2}_z - {w^3}_y = 0,\\
F_3 = -\omega^2 + {w^3}_x - {w^1}_z = 0, \quad F_4 = -\omega^3 + {w^1}_y - {w^2}_x = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь функции $\theta$, $\omega^1$, $\omega^2$, $\omega^3$ предполагаются известными, способ их вычисления указан в работе [8].

**Определение.** Законом сохранения для системы уравнений (6) назовём выражение вида

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \beta^i F_i = 0, \quad i = 1,2,3,4, \tag{7}$$

где $A$, $B$, $C$, $\omega_i$ — функции от $x$, $y$, $z$, $w^1$, $w^2$, $w^3$, предполагается, что функции $\beta^i$ не равны одновременно тождественно нулю. Выражение ($A$, $B$, $C$) называется сохраняющимся током. При выполнении этих условий, закон сохранения (7) будет нетривиальным.

**Замечание 1.** Более общее определение закона сохранения можно найти в [8, 9] и цитируемой там литературе. В данной работе законы сохранения будут пониматься согласно этому определению.

Ищем закон сохранения в виде (7)

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \beta^i F_i = 0, \quad i = 1,2,3,4, \tag{8}$$

где $A$, $B$, $C$, $\beta^i$ — функции от $x$, $y$, $z$, $w^1$, $w^2$, $w^3$.

Ищем решение уравнений (8) в виде

$$A = a^1 w^1 + a^2 w^2 + a^3 w^3 + a^4, \quad B = b^1 w^1 + b^2 w^2 + b^3 w^3, \quad C = c^1 w^1 + c^2 w^2 + c^3 w^3,$$

где $a^i$, $b^i$, $c^i$, $\beta^i$, $i = 1,2,3,4$ — функции только от $x$, $y$, $z$.

Из (7) получаем

$$a^1_x + b^1_y + c^1_z = 0, a^2_x + b^2_y + c^2_z = 0, a^3_x + b^3_y + c^3_z = 0,$$
$$a^1 = \beta^1, a^2 = -\beta^4, a^3 = \beta^3,$$
$$b^1 = \beta^4, b^2 = \beta^1, b^3 = -\beta^2,$$
$$c^1 = -\beta^4, c^2 = \beta^2, c^3 = \beta^1,$$
$$a^4_x + b^4_y + c^4_z = -\beta^1\theta - \beta^2\omega_1 - \beta^3\omega_2 - \beta^4\omega_3.$$

Отсюда следует

$$\beta^1_x + \beta^4_y - \beta^3_z = 0, \quad -\beta^4_x + \beta^1_y + \beta^2_z = 0, \quad \beta^3_x - \beta^2_y + \beta^1_z = 0. \tag{9}$$

Заметим, что уравнения (9) с точностью до обозначений совпадают с первыми тремя уравнениями СМТ, поэтому функции $g_i$, $i = 1,2,3,4$ являются решениями системы уравнений (9).

Уравнения (8), пользуясь формулой Гаусса—Остроградского, можно записать в виде

$$\iiint\limits_V (A_x + B_y + C_z)dxdydz = \oiint\limits_S Adydz + Bdzdy + Cdxdy = 0. \tag{10}$$

Пусть $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varepsilon^2$ — сфера, окружающая точку.

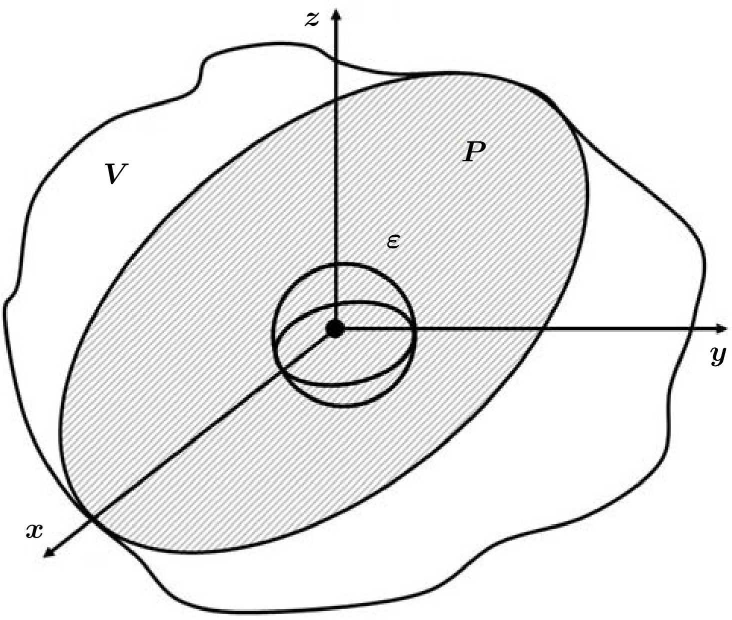


*Рис. 1.* Поверхность $S$ с $\varepsilon$-сферой

$$\oiint\limits_S Adydz + Bdzdx + Cdxdy + \iint\limits_{P^-} Adydz + Bdzdx + Cdxdy + \iint\limits_{P^+} Adydz + Bdzdx + Cdxdy +$$
$$+ \oiint\limits_\varepsilon Adydz + Bdzdx + Cdxdy = 0.$$

Поскольку интегралы по $P^-$ и $P^+$ вычисляются по разным сторонам плоскости $P$, то их сумма равна нулю. В результате получаем

$$\oiint\limits_S Adydz + Bdzdx + Cdxdy = -\oiint\limits_\varepsilon Adydz + Bdzdx + Cdxdy. \tag{11}$$

Вычислим правую часть формулы (11) для разных решений уравнений (9). Рассмотрим решение

$$\beta^1 = \frac{(x-x_0)}{r^3}, \quad \beta^2 = 0, \quad \beta^3 = -\frac{(z-z_0)}{r^3}, \quad \beta^4 = \frac{(y-y_0)}{r^3}. \tag{12}$$

Подставляем (12) в правую часть формулы (10) имеем

$$\oiint\limits_\varepsilon (\beta^1 w^1 + \beta^4 w^2 - \beta^3 w^3)dydz + (-\beta^4 w^1 + \beta^1 w^2 + \beta^3 w^3)dzdx + (\beta^3 w^1 - \beta^2 w^2 + \beta^1 w^3)dxdy. \tag{13}$$

В (13) переходим к следующей системе координат

$$x - x_0 = \varepsilon\cos\theta\cos\phi, y - y_0 = \varepsilon\cos\theta\sin\phi, z - z_0 = \varepsilon\sin\theta,$$

$$\oiint\limits_\varepsilon (\beta^1 w^1 + \beta^4 w^2 - \beta^3 w^3)dydz + (-\beta^4 w^1 + \beta^1 w^2 + \beta^3 w^3)dzdx + (\beta^3 w^1 - \beta^2 w^2 + \beta^1 w^3)dxdy =$$

$$= \oiint\limits_\varepsilon [(\cos\theta\cos\phi w^1 + \cos\theta\sin\phi w^2 - \sin\theta w^3)\cos^2\theta\cos\phi +$$

$$+(-\cos\theta\sin\phi w^1 + \cos\theta\cos\phi w^2)\cos^2\theta\sin\phi + (-\sin\theta w^1 + \cos\theta\sin\phi w^3)\cos\theta\sin\theta]d\theta d\phi =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta w^1 d\theta = -\frac{4\pi}{3} w^1(x_0, y_0 z_0).$$

Последнее выражение получено с использованием теоремы о среднем и при $\varepsilon \to 0$.

В результате получаем

$$\iint\limits_S Adydz + Bdzdx + Cdxdy = \frac{4\pi}{3} w^1(x_0, y_0, z_0). \tag{14}$$

Здесь

$$A = \frac{(x-x_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(y-y_0)}{r^3} w_0^2 + \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^3, \quad B = \frac{(y-y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^2 - \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^3,$$
$$C = -\frac{(z-z_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^3.$$

Далее полагаем

$$\beta^1 = \frac{(y-y_0)}{r^3}, \quad \beta^2 = \frac{(z-z_0)}{r^3}, \quad \beta^3 = 0, \quad \beta^4 = -\frac{(x-x_0)}{r^3}. \tag{15}$$

Подставляем (15) в (11), получаем аналогично (11)–(14)

$$\iint\limits_S Adydz + Bdzdx + Cdxdy = \frac{4\pi}{3} w^2(x_0, y_0, z_0), \tag{16}$$

где

$$A=\frac{(y-y_0)}{\alpha_0 r^3}w_0^1-\frac{(x-x_0)}{r^3}w_0^2,\quad B=\frac{(x-x_0)}{\alpha_0 r^3}w_0^1+\frac{(z-z_0)}{r^3}w_0^2,$$
$$C=\frac{(y-y_0)}{\alpha_0 r^3}w_0^2-\frac{(y-y_0)}{r^3}w_0^3.$$

Далее полагаем

$$\beta^1=\frac{(z-z_0)}{r^3},\quad \beta^2=-\frac{(y-y_0)}{r^3},\quad \beta^3=\frac{(x-x_0)}{r^3},\quad \beta^4=0. \tag{17}$$

Подставляем (17) в (11), получаем аналогично (11)–(14)

$$\iint\limits_S Adydz+Bdzdx+Cdxdy=\frac{4\pi}{3}w^3(x_0,y_0,z_0), \tag{18}$$

где

$$A=\frac{(z-z_0)}{\alpha_0 r^3}w_0^1-\frac{(x-x_0)}{r^3}w_0^3,\quad B=\frac{(x-x_0)}{r^3}w_0^2-\frac{(z-z_0)}{r^3}w_0^3,$$
$$C=\frac{(x-x_0)^2}{\alpha_0 r^3}w_0^1+\frac{(y-y_0)}{r^3}w_0^2+\frac{(z-z_0)}{r^3}w_0^3.$$

**Замечание 2.** В формулах (14), (16) и (18) опущена функция поскольку она является гармонической функцией без особенностей в области $V$ и интеграл от неё по поверхности $S$ равен нулю.

## 2. ДВУМЕРНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В двумерном случае, рассмотренная выше задача имеет некоторые особенности, поэтому решим её, обращая внимание на эти особенности.

Систему уравнений (1) перепишем следующим образом

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)u_{xx}+\lambda v_{xy}+\mu(u_{yy}+v_{xy})=0,\\ &\mu(u_{xy}+v_{xy})+(\lambda+2\mu)v_{yy}+\lambda u_{xy}=0.\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь для удобства обозначили $w^1=u, w^2=v$ — компоненты вектора деформаций, индексы внизу, как и ранее, означают производные по соответствующим переменным.

Известно, что система уравнений (2) эллиптического тип. Это определяет вид законов сохранения и решение краевых задач. Как и уравнения (1) система (19) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами

$$X=h^1\partial_u+h^2\partial_v, \tag{20}$$

где $h^1,h^2$ — произвольное решение уравнений Коши—Римана

$$h^1_x+h^2_y=0, h^1_y-h^2_x=0. \tag{21}$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (19), так же как это описано выше, на подалгебре, порождаемой (20). Для этого продолжим операторы (21) на первые производные. Имеем

$$\underset{1}{X}=X+h^1_x\partial_{u_x}+h^2_y\partial_{v_y}+h^1_y\partial_{u_y}+h^2_x\partial_{v_x}. \tag{22}$$

Дифференциальные инварианты для (22), с учётом (20), имеют вид

$$I_1 = x, \quad I_2 = y, \quad I_3 = u_x + v_y, \quad I_4 = u_y - v_x.$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_y = \theta(x, y), \quad u_y - v_x = \omega(x, y). \tag{23}$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (20).

Подставляя (23) в (19) получаем разрешающую систему

$$F_1 = (\lambda + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y = 0, \quad F_2 = (\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x = 0. \tag{24}$$

Повторяя почти дословно рассуждения выше, можно утверждать, что система (24) равносильна системе уравнений (19). Поэтому, построив решение системы (24), мы получим решение системы (19).

Пусть для системы (24) поставлена следующая краевая задача:

$$\theta|_L = \theta_0(x, y), \quad \omega|_L = \omega_0(x, y), \tag{25}$$

где $L$ — некоторая гладкая замкнутая кривая, $\theta_0(x, y)$, $\omega_0(x, y)$ — известные гладкие функции.

Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (24).

### 2.1. Законы сохранения

В силу линейности системы (24) она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В работе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (25).

Законом сохранения для системы уравнений (24) назовём выражение вида

$$A_x(x, y, \theta, \omega) + B_y(x, y, \theta, \omega) = \alpha F_1 + \beta F_2 = 0, \tag{26}$$

где $\alpha$, $\beta$ — некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно. $A$, $B$ компоненты сохраняющегося тока. Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = a^1\theta + a^2\omega, \quad B = b^1\theta + b^2\omega, \tag{27}$$

где $a^1$, $a^2$, $b^1$, $b^2$ — некоторые функции от $x$, $y$.

Подставляя (27) в (26), после несложных преобразований получаем

$$a^1 = \alpha(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = \beta\mu, \quad b^1 = \beta(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = -\alpha\mu,$$
$$a^1_x + b^1_y = 0, a^2_x + b^2_y = 0.$$

Отсюда имеем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0.$$

Из (26) следует

$$\iint\limits_S (A_x + B_y)dxdy = \oint\limits_L -Ady + Bdx. \tag{28}$$

### 2.2. Решение первой краевой задач

Пусть $(x_0, y_0) \in S$ такая точка, в которой компоненты сохраняющегося тока имеют особенности, тогда из (28) следует

$$\oint\limits_L -Ady + Bdx = -\oint\limits_\varepsilon -Ady + Bdx, \tag{29}$$

где $\varepsilon : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2$ — окружность радиуса $\varepsilon$ вокруг точки $(x_0, y_0) \in S$. Вычислим интеграл в правой части (29) для разных решений уравнений Коши—Римана. В качестве решений выберем такие, которые имеют особенность в точке $(x_0, y_0) \in S$. Пусть

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \beta = \frac{y - y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \tag{30}$$

тогда из правой части (29) имеем

$$\oint\limits_\varepsilon -Ady + Bdx = \oint\limits_\varepsilon -(\alpha(\lambda+2\mu)\theta + \beta\mu\omega)dy + (\alpha\mu\omega + \beta(\lambda+2\mu)\theta)dx. \tag{31}$$

Подставим (30) в (31) и сделаем замену переменных по формулам $x - x_0 = \varepsilon\cos\phi$, $y - y_0 = \varepsilon\sin\phi$ получаем

$$\begin{aligned}\oint\limits_\varepsilon -Ady + Bdx = \int\limits_0^{2\pi} [-((\lambda+2\mu)\theta + \mu\omega) + 2\sin\phi\cos\phi\mu\omega)]d\phi = \\ = -2\pi[(\lambda+2\mu)\theta(x_0,y_0) - \mu\omega(x_0,y_0)].\end{aligned} \tag{32}$$

В формуле (32) устремили $\varepsilon \to 0$ и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \beta = \frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

В результате получим

$$\oint\limits_\varepsilon -Ady + Bdx = -2\pi\mu\omega(x_0, y_0). \tag{33}$$

Формулы (32) и (33) позволяют, с учётом граничных условий (25) и равенства (14) определить значения функций $\theta$ и $\omega$ в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$. Они имеют следующий вид

$$2\pi[(\lambda+2\mu)\theta(x_0,y_0) - \mu\omega(x_0,y_0)] = \oint\limits_L -\frac{(\lambda+2\mu)(x-x_0)\theta_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}dy + \frac{\mu(y-y_0)\omega_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}dx,$$

$$2\pi\mu\omega(x_0,y_0) = \oint\limits_L \frac{(\lambda+2\mu)(y-y_0)\theta_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}dy + \frac{\mu(x-x_0)\omega_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}dx.$$

Теперь после восстановления решений разрешающей системы, найдём решения автоморфной системы, т. е. решения исходной системы уравнений (19). Имеем

$$F_3 = u_x + v_y - \theta(x,y) = 0, \quad F_4 = u_y - v_x - \omega(x,y) = 0. \tag{34}$$

Здесь в правой части стоят известные функции, которые найдены в предыдущем пункте. Найдём законы сохранения уравнений (34) в следующем виде

$$A = a^3 u + a^4 v + c^1, B = b^3 u + b^4 v + c^2,$$

где $a^3$, $a^4$, $b^3$, $b^4$, $c^1$, $c^2$ — некоторые функции от $x$, $y$.

Имеем

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \alpha F_3 + \beta F_4 = 0. \tag{35}$$

Расщепляя систему уравнений (35), получаем

$$a^3 = \alpha, \quad a^4 = -\beta, \quad b^3 = \beta, \quad b^4 = \alpha,$$
$$a^3_x + b^3_y = 0, \quad a^4_x + b^4_y = 0, \quad c^1_x + c^2_y = -\alpha\theta - \beta\omega.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0. \tag{36}$$

Пусть для системы (19) поставлена следующая краевая задача:

$$u|_L = u_0(x, y), \quad v|_L = v_0(x, y).$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint_L -Ady + Bdx = -\oint_\varepsilon -Ady + Bdx. \tag{37}$$

Пусть решение уравнений (36) имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{38}$$

Подставляем (38) в правую часть (37), получаем

$$\oint_\varepsilon -Ady + Bdx = \oint_\varepsilon -(\alpha u - \beta v + c^1)dy + (\beta u + \alpha v + c^2)dx =$$
$$= \oint_\varepsilon -(\alpha\cos\phi - \beta\sin\phi + c^1)dy - (\beta\sin\phi + \alpha\cos\phi + c^2)dx = -2\pi u(x_0, y_0).$$

Пусть решение уравнений (36) имеет вид

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{39}$$

Подставляем (39) в правую часть (37), получаем

$$\oint_\varepsilon -A_1dy + B_1dx = \oint_\varepsilon -(\alpha u - \beta v + c^1)dy + (\beta u + \alpha v + c^2)dx =$$
$$= \oint_\varepsilon -(-u\sin\phi - v\cos\phi + c^1)dy - (u\cos\phi - v\sin\phi + c^2)dx = -2\pi v(x_0, y_0).$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L -Ady + Bdx, \quad 2\pi v(x_0, y_0) = \oint_L -A_1dy + B_1dx,$$

где $c^1 = \int \alpha\theta dx$, $c^2 = \int \beta\omega dx$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены законы сохранения для уравнений пространственной и двумерной теории упругости, которые позволили первую решить краевые задачи для этих систем. В статье продолжено решение краевых задач с помощью законов сохранения, начатое работами [8, 9].

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на выполнение проекта «Разработка многофункциональных интеллектуальных материалов и структур на основе модифицированных полимерных композиционных материалов способных функционировать в экстремальных условиях» (проект FEFE-2020-0015). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. *Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985.
3. *Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И.* Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стеснённым вращением // Сиб. журн. индустр. матем. 2023. Т. 26, № 1. С. 5–19.
4. *Остросаблин Н. И.* Общее решение и приведение системы уравнений линейной изотропной упругости к диагональному виду // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. 12, № 2. С. 79–83.
5. *Остросаблин Н. И.* Диагонализация системы статических уравнений Ламе линейной изотропной упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 3. С. 87–98.
6. *Остросаблин Н. И.* Общее решение двумерной системы статических уравнений Ламе линейной теории упругости с несимметричной матрицей модулей упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 121, № 1. С. 61–71.
7. *Прудников В. Ю., Чиркунов Ю. А.* Групповое расслоение уравнений Ламе // Прикл. матем. и механика. 1988. Т. 52, № 3. С. 471–477.
8. *Бельмецев Н. Ф., Чиркунов Ю. А.* Точные решения уравнений динамической асимметричной модели теории упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 4. С. 38–50.
9. *Радаев Ю. Н.* Представление перемещений в пространственной гармонической задаче теории упругости с помощью двух винтовых векторов // Изв. РАН МТТ. 2021. № 2. С. 148–156.
10. *Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.* Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила—Теодореску // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 2. С. 101–109.
11. *Меграбов А. Г.* Законы сохранения и другие формулы для семейств лучей и фронтов и для уравнения эйконала // Сиб. журн. вычисл. матем. 2019. Т. 22, № 4. С. 483–497.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.9

# CONSERVATION LAWS AND SOLUTIONS OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF TWO- AND THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY


**S. I. Senashov**[a], **I. L. Savostyanova**[b]

*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, 660037 Russia*

E-mails: [a]sen@sibsau.ru, [b]ruppa@inbox.ru

Received 16.08.2022, revised 29.02.2024, accepted 03.03.2024

**Abstract.** If a system of differential equations admits a continuous transformation group, then, in some cases, the system can be represented as a combination of two systems of differential equations. These systems, as a rule, are of smaller order than the original one. This information pertains to the linear equations of elasticity theory. The first system is automorphic and is characterized by the fact that all of its solutions are obtained from a single solution using transformations in this group. The second system is resolving, with its solutions passing into themselves under the group action. The resolving system carries basic information about the original system. The present paper studies the automorphic and resolving systems of two- and three-dimensional time-invariant elasticity equations, which are systems of first-order differential equations. We have constructed infinite series of conservation laws for the resolving systems and automorphic systems. There exist infinitely many such laws, since the systems of elasticity equations under consideration are linear. Infinite series of linear conservation laws with respect to the first derivatives are constructed in this article. It is these laws that permit solving the first boundary value problem for the equations of elasticity theory in the two- and three-dimensional cases. The solutions are constructed by quadratures, which are calculated along the boundary of the studied domains.

**Keywords:** equations of two-dimensional elasticity, equations of three-dimensional elasticity, conservation laws, solution of boundary value problems.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.207

## REFERENCES

1. W. Nowacki, *Teoria sprężystości* (PWN, Warsaw, 1970; Mir, Moscow, 1975).
2. B. D. Annin, V. O. Bytev, and S. I. Senashov, *Group Properties of the Equations of Elasticity and Plasticity* (Nauka, Novosibirsk, 1985) [in Russian].
3. B. D. Annin, N. I. Ostrosablin, and R. I. Ugryumov, "Defining equations of the anisotropic moment linear theory of elasticity and the two-dimensional problem of pure shear with constrained rotation," J. Appl. Ind. Math. **17** (1), 1–14 (2023).
4. N. I. Ostrosablin, "The general solution and reduction to diagonal form of a system of equations of linear isotropic elasticity," J. Appl. Ind. Math. **4** (3), 354–358 (2010).
5. N. I. Ostrosablin, "Diagonalization of the system of static LamBŕe equations of isotropic linear elasticity," J. Appl. Ind. Math. **7** (1), 89–99 (2013).
6. N. I. Ostrosablin, "General solution for the two-dimensional system of static Lame's equations with an asymmetric elasticity matrix," J. Appl. Ind. Math. **12** (1), 126–135 (2018).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 2, pp. 333–343.

7. V. Yu. Prudnikov and Yu. A. Chirkunov, “Group foliation of LamBŕe equations,” Prikl. Mat. Mekh. **52** (3), 471–477 (1988).
8. N. F. Belmetsev and Yu. A. Chirkunov, “Exact solutions to the equations of a dynamic asymmetric pseudoelasticity model,” J. Appl. Ind. Math. **7** (1), 41–53 (2013).
9. Yu. N. Radaev, “Representation of displacements in a spatial harmonic problem of the theory of elasticity using two screw vectors,” Mech. Solids **56** (2), 263–270 (2021).
10. S. I. Senashov and I. L. Savostyanova, “Using conservation laws to solve boundary value problems of the Moisil–Teodorescu system,” Sib. Zh. Ind. Mat. **25** (2), 101–109 (2022) [in Russian].
11. A. G. Megrabov, “Conservation laws and other formulas for families of rays and wavefronts and for the eikonal equation,” Numer. Anal. Appl. **12** (4), 395–406 (2019).