УДК 519.642

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

© 2024 С. В. Солодуша

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, ул. Лермонтова, 130, г. Иркутск 664033, Россия

E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Поступила в редакцию 20.11.2023 г.; после доработки 07.03.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

Важным этапом построения интегральных моделей нелинейных динамических систем на основе аппарата рядов Вольтерра является задача идентификации ядер Вольтерра. В статье рассмотрен новый класс двумерных интегральных уравнений, которые возникают при восстановлении несимметричных ядер в полиноме Вольтерра второй степени, где $x(t)$ — входная вектор-функция времени. Стратегия выбора тестовых сигналов, используемых для решения этой задачи, основана на применении кусочно-линейных функций (имеющих фронт нарастания). Для выделенного типа уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования построена явная формула обращения. Исследуются вопросы существования и единственности решения соответствующих уравнений в классе $C_{[0,T]}$.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение Вольтерра I рода, идентификация, формула обращения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.208

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели, использующие многомерные интегральные уравнения вольтерровского типа, занимают заметное место в различных прикладных направлениях, например, в макроэкономике [1, 2], в электроэнергетике [3], при описании динамических развивающихся систем [4, 5], при решении ряда краевых задач [6]. Для моделирования соответствующих процессов и явлений используют системы обыкновенных дифференциальных уравнений, конечномерные (алгебраические) уравнения и различные классы интегральных уравнений Вольтерра, объединение которых нередко приводит к качественно новым математическим объектам, описываемым, в том числе, интегральными уравнениями Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования [7]. Как отмечено в [8], стр. 134, интегральные уравнения Вольтерра с двумя переменными пределами интегрирования являются мало изученными за исключением некоторых частных случаев.

Данная работа посвящена исследованию неклассических (по терминологии [5]) интегральных уравнений Вольтерра I рода, тесно связанных с проблемой математического моделирования динамических систем с помощью универсального аппарата полиномов Вольтерра (отрезков ряда Вольтерра) [9]:

$$\begin{gathered} y(t)=\sum_{m=1}^{N}\sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant\ldots\leqslant\mu_m\leqslant 2} f_{\mu_1\ldots\mu_m}(t),\ t\in[0,T], \\ f_{\mu_1\ldots\mu_m}(t)=\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t K_{\mu_1\ldots\mu_m}(s_1,\ldots,s_m)\prod_{j=1}^{m}x_{\mu_j}(t-s_j)ds_j. \end{gathered} \tag{1}$$

В (1) $x(t) = (x_1(t),\, x_2(t))^T$ есть вектор-функция времени t, функции $K_{\mu_1\ldots\mu_m}$ (ядра Вольтерра) симметричны по переменным $s_1, \ldots, s_m$, соответствующим совпадающим индексам $\mu_1, \ldots, \mu_m$. В статье развивается подход [5] к идентификации несимметричных ядер Вольтерра в линейном уравнении

$$f_{12}(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^t K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) x_1(t-\lambda_1) x_2(t-\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \tag{2}$$

где отклик $f_{12}(t)$ обусловлен вкладом соответствующего слагаемого в (1), отвечающего одновременному изменению компонент $x_1(t)$ и $x_2(t)$ входного вектора $x(t)$. В соответствии с [5], стр. 160, заметим, что для корректной постановки задачи решения (2) как интегрального уравнения относительно функции K_{12} двух переменных необходимо задать двумерный континуум откликов на тестовые входные воздействия. Задачи в такой постановке рассмотрены в [5].

В отличие от ранее известных результатов, рассмотрим случай однопараметрического семейства тестовых сигналов $x(t)$ из класса кусочно-линейных функций

$$\xi_\nu^{(c)}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leqslant 0, \\ \frac{\lambda}{\nu}, & 0 < \lambda \leqslant \nu, \\ c, & \nu < \lambda, \end{cases} \tag{3}$$

где $c = \mathrm{const}$, параметр ν — длительность нарастания сигнала.

1. О СТРАТЕГИИ ВЫБОРА ТЕСТОВОГО СИГНАЛА

Уравнение

$$y_2(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^t K_2(\lambda_1, \lambda_2) x(t-\lambda_1) x(t-\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$$

относительно функции $K_2(\lambda_1,\, \lambda_2)$, симметричной по переменным λ_1, λ_2, для скалярного входного сигнала $x(\lambda) \equiv \xi_\nu^{(1)}(\lambda)$ вида (3), где $c = 1$, рассмотрено в статье [10]. Векторность входа в (2), с одной стороны, усложняет задачу идентификации, так как функция K_{12} не обладает свойством симметричности относительно своих аргументов. С другой стороны, появляется возможность варьировать вид тестовых сигналов для разных компонент $x_1(t)$, $x_2(t)$ вектор-функции $x(t)$.

Введём две группы тестовых сигналов, имеющих аналитическое представление

$$x_{1T}(t) = e(t), \quad x_{2\nu}(t) = \xi_\nu^{(1)}(t), \tag{4}$$

$$x_{1\nu}(t) = \xi_\nu^{(1)}(t), \quad x_{2T}(t) = e(t), \tag{5}$$

$0 \leqslant \nu \leqslant t \leqslant T$, $e(t)$ — функция Хевисайда. Для упрощения изложения введём следующие обозначения:

$$s_1 = t, \quad s_2 = t - \nu. \tag{6}$$

Подстановка (4), (5) в (2) в терминах новых переменных (6) приводит к линейным относительно K_{12} уравнениям

$$\int\limits_0^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_2}{s_1 - s_2} d\lambda_2 + \int\limits_0^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = f_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2), \tag{7}$$

$$\int\limits_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_0^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_1}{s_1 - s_2} d\lambda_2 + \int\limits_0^{s_2} d\lambda_1 \int\limits_0^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = f_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2), \tag{8}$$

$$s_1, s_2 \in \Delta = \{(s_1, s_2) : 0 \leqslant s_2 \leqslant s_1 \leqslant T\},$$

где правые части $f_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) \equiv f_{12}^{(1)}(t, \nu)$, $f_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) \equiv f_{12}^{(2)}(t, \nu)$ есть отклики динамической системы на входы (4), (5) соответственно. По терминологии [5], стр. 175, в совокупности (7), (8) определяют парное интегральное уравнение относительно функции K_{12}.

Следуя [11], в предположении достаточной гладкости функций $f_{12}^{(1)}$, $f_{12}^{(2)}$, путём дифференцирования (7), (8) по переменной s_2 перейдём к

$$\int_0^{s_1} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_2}{s_1 - s_2} d\lambda_2 = (s_1 - s_2) \left(f_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) \right)'_{s_2}, \tag{9}$$

$$\int_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_1}{s_1 - s_2} d\lambda_2 = (s_1 - s_2) \left(f_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) \right)'_{s_2}. \tag{10}$$

Вычитая попарно (9) из (7) и (10) из (8), в итоге получим парное уравнение

$$\begin{gathered} \int_0^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = g^{(1)}(s_1, s_1 - s_2), \\ \int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_0^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = g^{(2)}(s_1, s_1 - s_2), \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$g^{(i)}(s_1, s_1 - s_2) = f_{12}^{(i)}(s_1, s_1 - s_2) - (s_1 - s_2) \left(f_{12}^{(i)}(s_1, s_1 - s_2) \right)'_{s_2}, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Формулы обращения (11), (12) имеют вид

$$K_{12}(s_1, s_2) = \left(g^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) \right)''_{s_1 s_2}, \quad K_{12}(s_2, s_1) = \left(g^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) \right)''_{s_1 s_2}, \quad s_1 \geqslant s_2. \tag{13}$$

Отметим, что хотя сигналы (4), (5) обеспечивают идентификацию ядра $K_{12}(p, q)$, несимметричного на $0 \leqslant p$, $q \leqslant T$, вторая группа сигналов совпадает на участке $[T - \nu, T]$ с первой группой. Следовательно, отклики на них не формируют новую информацию о динамической системе. Для оптимизации вида тестовых сигналов в [5], стр. 179, предложено использовать понятие кода тестового сигнала [12].

Руководствуясь понятием кода, представленного в [12] с целью оптимизации с точки зрения суммарной длительности входных воздействий, выделим иные группы тестовых сигналов

$$x_{1\nu}(t) = e(t - \nu), \quad x_{2\nu}(t) = \xi_\nu^{(0)}(t) \tag{14}$$

и

$$x_{1\nu}(t) = \xi_\nu^{(0)}(t), \quad x_{2\nu}(t) = e(t - \nu), \tag{15}$$

где $\xi_\nu^{(0)}(t)$ определяется по (3) для $c = 0$.

Подстановка (14), (15) в уравнение (2) с учётом обозначения (6) даёт

$$\begin{gathered} \int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_2}{s_1 - s_2} d\lambda_2 = q_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2), \\ \int_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_1}{s_1 - s_2} d\lambda_2 = q_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2), \end{gathered} \tag{16}$$

где через $q_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) \equiv p^{(1)}(s_1, s_2)$, $q_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) \equiv p^{(2)}(s_1, s_2)$ обозначены отклики динамической системы на входы вида (14), (15). Рассмотрим далее специфику линейного парного уравнения (16) относительно несимметричного на $\Omega_2 = \{(p, q) : 0 \leqslant p, q \leqslant T\}$ ядра Вольтерра $K_{12}(p, q)$.

2. О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ (16)

Предполагая достаточную гладкость функций $q_{12}^{(1)}$, $q_{12}^{(2)}$ ($p^{(1)}$, $p^{(2)}$ соответственно), рассмотрим вопрос о существовании единственного непрерывного решения (16). Сформулируем следующую лемму.

Лемма. *Пусть в уравнении (16) относительно функции $K_{12}(\lambda_1, \lambda_2)$, несимметричной на $\Omega_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) :\, 0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2 \leqslant T\}$, правые части*

$$p^{(i)}(s_1, s_2) \in C_{\Delta}^{(1)}, \quad \Delta = \{(s_1, s_2) :\, 0 \leqslant s_2 \leqslant s_1 \leqslant T\}, \quad i = 1, 2,$$

и, кроме того,

$$p^{(1)}(0, 0) = 0, \quad p^{(2)}(0, 0) = 0. \tag{17}$$

При условии существования $p^{(i)}(s_1, s_2)$ таких, что справедливо

$$p^{(i)}(s_1, s_2) + (s_1 - s_2)\left(p^{(i)}(s_1, s_2)\right)'_{s_1} = y^{(i)}(s_1, s_2), \tag{18}$$

уравнение (16) эквивалентно

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{s_2} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = y^{(1)}(s_1, s_2), \\ &\int\limits_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = y^{(2)}(s_1, s_2). \end{aligned} \tag{19}$$

Доказательство. Схема доказательства леммы основана на применении эквивалентных преобразований. Дифференцируя (16) по s_1 (в силу (17) операция дифференцирования в (18) законна):

$$\begin{aligned} \left(p^{(1)}(s_1, s_2)\right)'_{s_1} &= \frac{1}{s_1 - s_2}\left(\int\limits_0^{s_2} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 - p^{(1)}(s_1, s_2)\right), \\ \left(p^{(2)}(s_1, s_2)\right)'_{s_1} &= \frac{1}{s_1 - s_2}\left(\int\limits_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 - p^{(2)}(s_1, s_2)\right) \end{aligned} \tag{20}$$

и суммируя (16) с (20), домноженным на $(s_1 - s_2)$, в итоге приходим к

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{s_2} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = p^{(1)}(s_1, s_2) + (s_1 - s_2)\left(p^{(1)}(s_1, s_2)\right)'_{s_1}, \\ &\int\limits_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = p^{(2)}(s_1, s_2) + (s_1 - s_2)\left(p^{(2)}(s_1, s_2)\right)'_{s_1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Пусть правые части уравнения (21)

$$p^{(i)}(s_1, s_2) + (s_1 - s_2)\left(p^{(i)}(s_1, s_2)\right)'_{s_1} = y^{(i)}(s_1, s_2), \quad i = 1,\, 2.$$

В принятых обозначениях (21) принимает вид (19). □

Замечание. В условиях леммы $p^{(1)}(s_1,s_2)$, $p^{(2)}(s_1,s_2)$ — правые части (16), полученные из (19), которые автоматически удовлетворяют (17). Следует отметить, что условие (17) имеет место в силу [10], стр. 221:

$$\int\limits_0^{s_2} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1,\lambda_2)\frac{s_1-\lambda_2}{s_1-s_2}d\lambda_2 \to 0 \quad \text{при} \quad s_1\to s,\ s_2\to s,$$
$$\int\limits_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1,\lambda_2)\frac{s_1-\lambda_1}{s_1-s_2}d\lambda_2 \to 0 \quad \text{при} \quad s_1\to s,\ s_2\to s.$$

Используя результаты леммы, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Соотношения*

$$\Big(y^{(i)}(s_1,s_2)\Big)''_{s_1s_2} \in C_\Delta, \quad i=1,\,2, \quad \Delta=\{(s_1,s_2): 0\leqslant s_2\leqslant s_1\leqslant T\}, \tag{22}$$

$$y^{(1)}(s,0)=y^{(2)}(s,0)=0, \tag{23}$$

$$y^{(1)}(s,s)=y^{(2)}(s,s)=0, \tag{24}$$

$$\Big(y^{(1)}(s_1,s_2)\Big)''_{s_1s_2}\bigg|_{s_1=s_2=s} = \Big(y^{(2)}(s_1,s_2)\Big)''_{s_1s_2}\bigg|_{s_1=s_2=s} \qquad \forall s\in[0,T] \tag{25}$$

необходимы и достаточны для существования решения (19) в классе C_{Ω_2}. Решение (19) единственно в указанном классе и определяется по формулам

$$K_{12}(s_2,s_1)=\Big(y^{(1)}(s_1,s_2)\Big)''_{s_1s_2}, \quad K_{12}(s_1,s_2)=\Big(y^{(2)}(s_1,s_2)\Big)''_{s_1s_2}. \tag{26}$$

Доказательство. Доказательство этого факта основано на обобщении результатов [10] (см. теорему 1 о разрешимости двумерного уравнения I рода относительно симметричного на Ω_2 ядра Вольтерра).

Прокомментируем условия утверждения. Из (22), (25) следует непрерывность решения (19). Условие (22) — стандартное условие на гладкость входных данных, так как нам потребуется дважды дифференцировать (19). Равенство (23) — условие корректного задания $y^{(1)}(s,0)$ и $y^{(2)}(s,0)$ $\forall s\in[0,T]$. Кроме того, условия (23), (24) обеспечивают справедливость тождественного равенства при прямой подстановке (26) в (19) с учётом области интегрирования (например, в первом уравнении (19) при подстановке используется правая часть формулы (26) для $K_{12}(s_2,s_1)$, которая определяет значения ядра в области, где первый аргумент не превосходит второго). Наконец, выполнение (23), (24) гарантирует тривиальность решения $\big(\psi^{(i)}(s_1,s_2)\big)'_{s_1s_2}=0$, $i=1,2$, где $\psi^{(i)}=V_{2,i}K_{12}-y^{(i)}$, $V_{2,i}$ — оператор, определяемый левой частью i-го уравнения в (19). □

Обратимся теперь к уравнению (16).

Теорема 2. *Пусть в уравнении (16) относительно непрерывной функции $K_2(\lambda_1,\lambda_2)$, несимметричной на $\Omega_2=\{(\lambda_1,\lambda_2):\ 0\leqslant\lambda_1,\,\lambda_2\leqslant T\}$, правые части*

$$p^{(i)}(s_1,s_2)\in C^{(3)}_\Delta, \quad \Delta=\{(s_1,s_2):\ 0\leqslant s_2\leqslant s_1\leqslant T\},$$

и, кроме того, выполнено равенство (17) и условия теоремы 1 применительно к линейной комбинации $p^{(i)}(s_1,s_2)$ ($i=1,2$) и их производных вида (18). Тогда решение уравнения (16) существует и единственно в классе несимметричных непрерывных на Ω_2 функций.

Доказательство. Дифференцируя (16), перейдём к эквивалентному (по лемме) интегральному уравнению (19). С учётом выполнения условий данной теоремы, существует непрерывное решение уравнения (19) (согласно теореме 1), а значит, и уравнения (16).

Единственность решения уравнения (16) следует (в силу леммы) из единственности решения уравнения (19), которая показана в теореме 1. □

3. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем на конкретном примере процедуру определения ядра K_{12}, несимметричного на Ω_2.

Пример 1. Пусть отклики динамической системы на группу входных возмущений (4), (5) равны

$$f_{12}^{(1)}(t,\nu)=\frac{1}{12}t\left(2t-\nu\right)\left(6t^2+2t\nu-\nu^2\right),\quad f_{12}^{(2)}(t,\nu)=\frac{1}{6}t\left(2t-\nu\right)\left(3t^2-4t\nu+2\nu^2\right),$$

так, с учётом обозначения (6), правые части уравнений (7), (8) имеют вид

$$f_{12}^{(1)}(s_1,s_1-s_2)=\frac{1}{12}s_1\left(s_1+s_2\right)\left(7s_1^2-s_2^2\right),\quad f_{12}^{(2)}(s_1,s_1-s_2)=\frac{1}{6}s_1\left(s_1+s_2\right)\left(s_1^2+2s_2^2\right) \tag{27}$$

соответственно. Найдём решение (7), (8) по формуле (13). Принимая во внимание (27), из (12) имеем

$$g^{(1)}(s_1,s_1-s_2)=\frac{1}{3}s_1s_2\left(2s_1-s_2\right)\left(2s_1+s_2\right),\quad g^{(2)}(s_1,s_1-s_2)=-\frac{1}{3}s_1s_2\left(s_1-2s_2\right)\left(s_1+2s_2\right).$$

Так как

$$\Big(g^{(1)}(s_1,s_1-s_2)\Big)'_{s_1}=4s_1^2s_2-\frac{1}{3}s_2^3,\quad \Big(g^{(2)}(s_1,s_1-s_2)\Big)'_{s_1}=-s_1^2s_2+\frac{4}{3}s_2^3,$$

то

$$K_{12}(s_1,s_2)=4s_1^2-s_2^2,\quad K_{12}(s_2,s_1)=4s_2^2-s_1^2.$$

Проиллюстрируем далее, что правая часть уравнения (16) удовлетворяет условиям теоремы 1.

Пример 2. Пусть $K_{12}(s_1,s_2)=s_1$, $K_{12}(s_2,s_1)=s_2$, $s_1\geqslant s_2$. Функции $y^{(1)}(s_1,s_2)$, $y^{(2)}(s_1,s_2)$ можно получить непосредственно из (19):

$$y^{(1)}(s_1,s_2)=\frac{1}{2}s_2^2\left(s_1-s_2\right),\quad y^{(2)}(s_1,s_2)=\frac{1}{2}s_2\left(s_1^2-s_2^2\right). \tag{28}$$

С другой стороны, из (16) имеем

$$p^{(1)}(s_1,s_2)=\frac{1}{4}s_2^2\left(s_1-s_2\right),\quad p^{(2)}(s_1,s_2)=\frac{1}{6}s_2\left(s_1+2s_2\right)\left(s_1-s_2\right).$$

Далее, следуя лемме и с учётом (18), приходим к (28). Откуда

$$y^{(1)}(s,0)=y^{(2)}(s,0)=0,\quad y^{(1)}(s,s)=y^{(2)}(s,s)=0,$$

$$\left(y^{(1)}(s_1,s_2)\right)''_{s_1s_2}\big|_{s_1=s_2=s}=s_2\big|_{s_2=s}=\left(y^{(2)}(s_1,s_2)\right)''_{s_1s_2}\big|_{s_1=s_2=s}=s_1\big|_{s_1=s}=s.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен новый тип двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с переменными как верхним, так и нижним пределами интегрирования. Сформулированы условия эквивалентности выделенных парных интегральных уравнений вида (16), связанных с идентификацией ядер Вольтерра по кусочно-линейным входным сигналам, другому типу парных интегральных уравнений вида (19), возникающих при использовании сигналов из класса кусочно-постоянных функций. Сформулированы и доказаны теоремы о существовании единственного решения $K_{12}(p, q)$ уравнений (16), (19) в классе непрерывных функций, несимметричных на $0 \leqslant p,\ q \leqslant T$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00409; https://rscf.ru/project/22-21-00409/). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушков В. М.* Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие сист. и машины. 1977. № 2. С. 3–6.
2. *Бойков И. В., Тында А. Н.* Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 9. С. 1214–1223.
3. *Markova E. V., Sidler I. V.* Numerical solution of the age structure optimization problem for basic types of power plants // Yugosl. J. Oper. Res. 2019. V. 29, N 1. P. 81–92; DOI: 10.2298/YJOR171015009M
4. *Апарцин А. С.* Об интегральных уравнениях Вольтерра I рода в теории развивающихся систем // Численные методы оптимизации и анализа. 1992. С. 58–67.
5. *Апарцин А. С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода. Теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.
6. *Волкодавов В. Ф., Родионова И. Н.* Формулы обращения некоторых двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Изв. вузов. Матем. 1998. № 9. С. 30–32.
7. *Ботороева М. Н., Булатов М. В.* Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования // Изв. ИГУ Сер. Матем. 2017. Т. 20. С. 3–16; DOI: 10.26516/1997-7670.2017.20.3
8. *Асанов А. А., Чоюбеков С. М.* Решение неклассических интегральных уравнений Вольтерра I рода с вырожденным нелинейным ядром // Междунар. науч.-исслед. журнал. 2018. № 4(70). С. 134–138; DOI: 10.23670/IRJ.2018.70.029
9. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
10. *Солодуша С. В.* О новом классе двумерных интегральных уравнений I рода типа Вольтерра с переменными пределами интегрирования // Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 216–225; DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-216-225
11. *Solodusha S. V.* Identification of Symmetric Volterra Kernels Using Piecewise Linear Test Signals // Proc. 16th Int. Conf. Stab. Oscil. Nonlinear Control Syst. 2022; DOI: 10.1109/STAB54858.2022.9807575
12. *Апарцин А. С.* Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (векторный случай). Иркутск, 1996. (Препр. / СЭИ СО РАН; № 8).

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.642

ON SOME LINEAR TWO-DIMENSIONAL VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

© 2024 **S. V. Solodusha**

Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Irkutsk, 664033 Russia

E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Received 20.11.2023, revised 07.03.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. The problem of identifying Volterra kernels is an important stage in the construction of integral models of nonlinear dynamical systems based on the tool of Volterra series. The paper considers a new class of two-dimensional integral equations that arise when recovering nonsymmetric kernels in a Volterra polynomial of the second degree, where $x(t)$ is the input vector function of time. The strategy for choosing test signals used to solve this problem is based on applying piecewise linear functions (with a rising edge). An explicit inversion formula is constructed for the selected type of Volterra equations of the first kind with variable integration limits. The questions of existence and uniqueness of solutions of the corresponding equations in the class $C_{[0,T]}$ are studied.

Keywords: two-dimensional Volterra integral equation of the first kind, identification, inversion formula.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.208

REFERENCES

1. V. M. Glushkov, "On one class of dynamic macroeconomic models," Upr. Sist. Mash. (2), 3–6 (1977) [in Russian].
2. I. V. Boikov and A. N. Tynda, "Approximate solution of nonlinear integral equations of the theory of developing systems," Differ. Equations **39** (9), 1277–1288 (2003).
3. E. V. Markova and I. V. Sidler, "Numerical solution of the age structure optimization problem for basic types of power plants," Yugosl. J. Oper. Res. **29** (1), 81–92 (2019). https://doi.org/10.2298/YJOR171015009M
4. A. S. Apartsin, "On Volterra integral equations of the first kind in the theory of developing systems," in *Numerical Methods of Optimization and Analysis* (1992), 58–67.
5. A. S. Apartsin, *Nonclassical Volterra Equations of the First Kind. Theory and Numerical Methods* (Nauka, Novosibirsk, 1999) [in Russian].
6. V. F. Volkodavov and I. N. Rodionova, "Inversion formulas for some two-dimensional Volterra integral equations of the first kind," Russ. Math. **42** (9), 28–30 (1998).
7. M. N. Botoroeva and M. V. Bulatov, "Applications and methods of numerical solution of one class of integro-algebraic equations with variable integration limits," Izv. IGU Ser. Mat. **20** (), 3–16 (2017) [in Russian]. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.3
8. A. A. Asanov and S. M. Choyubekov, "Solution of non-classical Volterra integral equations of the first kind with a degenerate nonlinear kernel," Mezhdunar. Nauchn.-Issled. Zh. **4** (70), 134–138 (2018) [in Russian]. https://doi.org/10.23670/IRJ.2018.70.029

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 2, pp. 344–351.

9. V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations* (Dover, New York, 1959; Nauka, Moscow, 1982).
10. S. V. Solodusha, "On a new class of two-dimensional integral equations of the first kind of Volterra type with variable limits of integration," Tr. IMM UrO RAN **28** (4), 216–225 (2022) [in Russian]. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-4-216-225
11. S. V. Solodusha, "Identification of symmetric Volterra kernels using piecewise linear test signals," *Proc. 16th Int. Conf. Stab. Oscil. Nonlinear Control Syst.* (2022). https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807575
12. A. S. Apartsin, "Theorems of the existence and uniqueness of solutions of Volterra equations of the first kind related to the identification of nonlinear dynamic systems (vector case)," *Preprint of SEI SO RAN*, Irkutsk, 1996, no. 8 [in Russian].