СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 2. С. 121–132

УДК 517.927.25

ОЦЕНКИ СВЕРХУ КРАТНОСТИ ТОЧЕК СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

© 2024 **А. А. Уртаева**

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, ул. Ватутина, 44–46, г. Владикавказ 362025, Россия

E-mail: urtaeva-96@mail.ru

Поступила в редакцию 05.12.2023 г.; после доработки 11.03.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

Работа посвящена изучению модели плоской балочной конструкции, описываемой краевой задачей четвёртого порядка на геометрическом графе. Во внутренних вершинах (узлах) графа задаются условия упруго-шарнирного соединения балок. Изучаются свойства точек спектра соответствующей спектральной задачи. Доказываются оценки сверху для кратности собственных значений. Показано, что кратность точек спектра зависит от структуры графа (количество граничных вершин, циклов и т. п.). Приводится пример, показывающий, что полученные оценки являются точными.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение, кратность собственного значения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.209

В настоящей работе рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения четвёртого порядка на геометрическом графе (пространственной сети) Γ:

$$L_\lambda u \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) - \lambda\rho(x)u = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{1}$$

где $\partial\Gamma$ — множество граничных вершин Γ. Задача (1) представляет собой модель балочной конструкции [1–6]. Во внутренних точках рёбер производная $du/d\Gamma$ имеет классическую форму u', а в узлах сети оператор L_λ задаётся наборами условий для упругого шарнирного соединения балок. Мы изучаем вопрос о кратности собственных значений задачи (1) и даём точную оценку кратности собственных значений этой задачи.

Ещё при изучении уравнений второго порядка на графах был установлен факт, что кратность собственных значений краевых задач на графах существенно зависит от структуры графа. На сегодняшний день получены точные оценки сверху для собственных значений задачи Штурма—Лиувилля на графе с различными условиями стыковки в узловых вершинах графа [7–13].

Стоит сразу отметить, что изучение свойств решений дифференциальных уравнений четвёртого порядка на сети является существенно более сложной, нежели аналогичная задача для уравнения Штурма-Лиувилля. Даже модели физического происхождения оказываются очень трудными для анализа (см., например, [5, 6, 12–15]). Кроме того, отметим, что качественные свойства решений уравнения на сети существенно зависят от условий трансмиссии в узловых точках [3, 4, 6, 14, 16]. Наибольшие продвижения в изучении качественных свойств краевых задач четвёртого порядка на графах имеются для уравнения с условиями упруго-шарнирного сочленения стержней. Для такой краевой задачи в работе [6] получены условия разрешимости, установлен принцип максимума, на основе которого доказана положительная обратимость краевой задачи и положительность её функции Грина. В [17, 18] изучались свойства решений уравнения (1) (положительность, колеблемость, распределение нулей, неосцилляция). Как показывают результаты этих работ дифференциальный оператор L_λ задачи (1), порождаемый условиями упруго-шарнирного сочленения, наследует почти все основные качественные свойства оператора Штурма—Лиувилля на сети (теоремы штурмовского типа [17, 18], принцип максимума [6], условия простоты собственных значений [2], осцилляционная спектральная теорема [19]). В этой связи естественным становится вопрос о кратности точек спектра оператора L_λ. В работе [2] были сформулированы достаточные условия, обеспечивающие простоту собственных значений оператора L_λ и получена оценка кратности собственных значений для случая, когда граф является деревом. В частности, было доказано, что кратность любого собственного значения задачи (1) на графе-дереве не превосходит $|\partial\Gamma| - 1$, где $|\partial\Gamma|$ — число граничных вершин графа Γ. Отметим, что аналогичная оценка имеет место и для оператора Штурма—Лиувилля на сети (см. [13]). В той же работе [2] было указано, что аналогия в оценках кратностей собственных значений задачи (1) и собственных значений задачи Штурма—Лиувилля на графе распространяется и на случай графа произвольной структуры. В данной работе приводится детальное доказательство этого факта. В конце статьи приводится пример, показывающий, что получаемые оценки являются неулучшаемыми.

1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В данной работе мы используем терминологию и обозначения работ [4, 6]. На протяжении всей статьи $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ обозначает связный и конечный *геометрический граф* без петель, с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством точек рёбер графа $E(\Gamma)$. *Ребро* графа — это интервал конечной длины, а*вершина* графа — это концевая точка одного или нескольких рёбер. Ребра графа обозначаются γ_i, вершины обозначаются a, b и т. д. Для любой вершины $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов рёбер, инцидентных вершине a, и через $|I(a)|$ обозначим количество элементов множества $I(a)$. Множество *внутренних* вершин ($a \in V(\Gamma)$, $I(a) \geqslant 2$) обозначим через $J(\Gamma)$, а через $\partial\Gamma$ обозначим множество *граничных* вершин ($a \in V(\Gamma), I(a) = 1$). Далее будем предполагать, что $\Gamma = E(\Gamma) \cup J(\Gamma)$ и $\partial\Gamma \neq \varnothing$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф.

Подграфом графа Γ называется любое связное подмножество Γ. Граф не имеющий циклов называется *деревом*. Граф — дерево Γ называем *цепочкой*, если $|I(a)| = 2$ для любой вершины $a \in J(\Gamma)$. Граф — цепочку, будем обозначать через $\Gamma(a, b)$, где $a, b \in \partial\Gamma$.

Введём функциональные пространства:

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \to \mathbb{R} \,|\, u - \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\};$$
$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \to \mathbb{R} \,|\, u - \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Каждая функция $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) имеет предел $\lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, $i \in I(a)$, в каждой вершине $a \in V(\Gamma)$; обозначим его через $u_i(a)$. Обратим внимание, что $u_k(a)$ не обязательно равно $u_i(a)$ или $u(a)$, где $k, i \in I(a)$ $(k \neq i)$. Пространство непрерывных на Γ функций определяется равенством

$$C(\Gamma) = \{u \in C[\Gamma] |\, u_i(a) = u(a) \ (\forall a \in J(\Gamma)) \vee (\forall i \in I(a))\}.$$

Теперь определим производную функции на графе. Для этого зададим функцию $\mu(x) \in C[E(\Gamma)]$, линейно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset E(\Gamma)$ на интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$, где l_i — длина γ_i. Положим $u_i'(x) := \lim\limits_{\gamma_i \ni y \to x} (u_i(y) - u_i(x))/(\mu_i(y) - \mu_i(x))$, $x \in \overline{\gamma}_i$. Аналогично определяются производные более высокого порядка.

Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) мы обозначаем пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) в любой вершине $a \in V(\Gamma)$ определено множество производных $u_i^{(j)}(a)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, вдоль рёбер, смежных с a. Производные нечётного порядка зависят от ориентации рёбер. В дальнейшем при записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению «от вершины», которые мы будем обозначать $u_{i\nu}^{(k)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали). Для чётной производной ориентация не важна, и поэтому, для краткости, вместо $u_{i\nu}''(a)$ пишем $u_i''(a)$.

Под дифференциальным уравнением $L_\lambda u = 0$, $x \in \Gamma$, мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на рёбрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - \lambda\rho(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma) \tag{2}$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i \in I(a), \tag{3}$$

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')_\nu'(a) - \lambda\rho(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \tag{4}$$

Уравнение порождаемое соотношениями (2)–(4) возникает при моделировании малых деформаций плоской стержневой системы, состоящей из тонких прямолинейных стержней, с условиями упруго-шарнирного соединения (см. [1, 3, 6, 8, 10, 19]). В этом случае равенства (2)–(4) можно трактовать следующим образом: $u(x)$ обозначает смещение балки при выходе из состояния равновесия; условия (3) описывают классические локальные условия в узлах графа — перемещения всех стержней системы являются непрерывными и имеется упруго-шарнирное сочленение в вершине a (см. [20], раздел 5.18). Последнее условие — это условие динамического равновесия.

Решением дифференциального уравнения $L_\lambda u = 0$, $x \in \Gamma$, будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4[\Gamma] \cap C(\Gamma)$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине — условиям (3), (4).

Всюду далее полагаем:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf\limits_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$ и $\rho \in C[\Gamma]$, $\rho(x) > 0$ на $E(\Gamma)$, $\rho(x) \geqslant 0$ на $J(\Gamma)$;
- $\beta_i(a), \vartheta_i(a) \geqslant 0$ и $\beta_i(a)+\vartheta_i(a) > 0$ для любой вершины $a \in V(\Gamma)$ и любого индекса $i \in I(a)$;
- $\vartheta_i(a_i) + \vartheta_i(b_i) > 0$ для любого ребра $\gamma_i = (a_i, b_i) \subset E(\Gamma)$.

Первая серия предположений определяются физическим смыслом задачи, вторая также учитывает физический смысл и несёт предположение невырожденности самих условий. А третья серия обеспечивает невырожденность задачи (1) при $\lambda = 0$ (см. [6] или [10], гл. 8).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [19] показано, что спектр Λ задачи (1) состоит из последовательности положительных собственных значений

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$$

не имеющей конечных предельных точек. Поэтому вопрос о кратности собственных значений удобно обсуждать в форме вопроса о размерности пространства решений краевой задачи

$$L_\lambda u = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0,$$

при $\lambda > 0$. Обозначим это пространство через $\mathcal{S}(L_\lambda)$. Очевидно, что $\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leqslant 4n$, где n — число рёбер графа Γ.

Лемма 1. [2] *Пусть* $u \in \mathcal{S}(L_\lambda)$ *и для некоторой вершины* $a \in J(\Gamma)$ *выполнены равенства*

$$u(a) = 0, \quad (p_i u_i'')'_\nu(a) = 0, \quad i \in I(a) \setminus i_0.$$

Тогда $u(x) \equiv 0$ *на всех рёбрах графа, примыкающих к вершине* a.

Теорема 1. [2] *Пусть граф* Γ *является деревом. Тогда* $\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leqslant |\partial\Gamma| - 1$, *где* $|\partial\Gamma|$ — *число граничных вершин графа* Γ.

Лемма 2. *Пусть* Γ — *дерево. Если функция* $u \in \mathcal{S}(L_\lambda)$ *тождественно равна нулю на всех граничных рёбрах графа, кроме может быть одного, то* $u \equiv 0$ *на* Γ.

Доказательство. Рассмотрим теперь функцию $u \in \mathcal{S}(L_\lambda)$, тождественно равную нулю на всех граничных рёбрах графа, кроме может быть ребра γ_0, примыкающего к граничной вершине $a_0 \in \partial\Gamma$.

Прежде чем продолжить доказательство введём следующую терминологию.

Граничные вершины графа Γ кроме a_0 назовём вершинами *нулевого порядка.* Вершину $b \in J(\Gamma)$ назовём вершиной *первого порядка*, если все смежные с ней вершины кроме одной являются вершинами нулевого порядка. Вершину графа Γ назовём вершиной *второго порядка*, если все смежные с ней вершины кроме одной являются вершинами порядка не выше первого. Вершину $b \in V(\Gamma)$ назовём вершиной *третьего порядка*, если все смежные с ней вершины кроме одной являются вершинами не выше второго порядка, и так далее.

Граф Γ конечен, и поэтому любая вершина графа, отличная от a_0, имеет конечный порядок. Более того, максимальный порядок имеет внутренняя вершина графа, смежная с a_0.

Пусть b_1 — произвольная вершина 1-го порядка. Из свойств функции $u \in \mathcal{S}(L_\lambda)$ следует, что выполнены тождества $u_i(x) \equiv 0$ для всех индексов $i \in I(b_1) \setminus i_1$, где $i_1 \in I(b_1)$. Тогда из леммы 2 следует, что $u(x) \equiv 0$ и на ребре γ_{i_0}. Таким образом, $u(x) \equiv 0$ на всех рёбрах графа, примыкающих к вершинам нулевого и первого порядка. Если максимальный порядок вершин графа равен единице, то $u(x) \equiv 0$ на Γ и теорема доказана.

В противном случае рассмотрим произвольную вершину $b_2 \in J(\Gamma)$ второго порядка. Из определения вершины второго порядка и предыдущих рассуждений следует, что $u(x) \equiv 0$ на всех рёбрах, примыкающих к b_2, кроме может быть одного. Опять, привлекая лемму 2, заключаем, что $u_i(x) \equiv 0$, для любого $i \in I(b_2)$. Таким образом, $u(x) \equiv 0$ на всех рёбрах графа, примыкающих к вершинам нулевого, первого и второго порядков. Если максимальный порядок вершин графа равен двум, то $u(x) \equiv 0$ на Γ и теорема доказана. В противном случае продолжаем наши рассуждения.

Для завершения доказательства леммы остаётся ещё раз заметить, что максимальный порядок вершин графа конечен. Поэтому через конечное число шагов мы получим, что $u(x) \equiv 0$ на Γ. □

3. ОЦЕНКИ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В данном пункте приводятся доказательства основных результатов статьи. Для того, что бы сформулировать эти результаты, напомним некоторые понятия из работы [13].

Пусть Γ — произвольный граф с циклами. Вершину a_0, лежащую на каком-либо цикле, назовём *разбивающей*, если $\Gamma \backslash \{a_0\}$ не является связным. Граф $\Gamma \backslash \{a_0\}$ распадается на подграфы: деревья и подграф Γ_0, который может содержать циклы. Присоединяем вершину a_0 подграфу Γ_0. Подграф Γ_0 также может разбиваться на связные компоненты некоторыми вершинами лежащими на его циклах. После такого разбиения снова образуем подграфы типа Γ_0, присоединяя к ним вершины, с помощью которых они разбивались. Продолжая этот процесс и далее мы получим некоторое количество подграфов. Каждый из них является либо деревом, либо связным объединением циклов, не допускающим дальнейшего разбиения описанного выше типа. Такое объединение циклов назовём *гнездом.* Гнездо назовём *граничным*, если ему принадлежит лишь одна разбивающая вершина. Количество таких гнёзд обозначим через $\zeta(\Gamma)$. Остальные гнёзда назовём внутренними (их количество не играет принципиальной роли для дальнейшего). Будем также граф называть *графом-гнездом*, если он имеет циклы, но не имеет разбивающих вершин.

Теорема 2. *Пусть граф* Γ *является графом-гнездом. Тогда* $\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leqslant \eta(\Gamma) + 1$, *где* $\eta(\Gamma)$ *— цикломатическое число графа* Γ.

Доказательство. Пусть $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$ — произвольный набор функций из $\mathcal{S}(L_\lambda)$, где $d \geqslant \eta(\Gamma) + 2$. Покажем, что данная система функций линейно зависима. Для этого мы последовательно построим их нетривиальную линейную комбинацию равную тождественно нулю на Γ.

Шаг 1. Зафиксируем произвольную вершину $a_0 \in J(\Gamma)$. Для сокращения записи введём обозначение $k_0 = |I(a_0)|$. Из функций $u^{[j]}$, можно получить $d-1$ решений $v^{[j]}$, $j = \overline{1, d-1}$, из $\mathcal{S}(L_\lambda)$, каждое из которых равно нулю в выбранной вершине a_0. Так, если каждая из функций $u^{[j]}$ равна нулю в вершине a_0, то в качестве таких решений $v^{[j]}$ можно взять любые $d-1$ функций из набора $u^{[j]}$. В противном случае, если некоторая функция не равна нулю в вершине a_0, пусть для определённости это будет u^d, определяем набор функций:

$$v^{[j]}(x) = u^{[d]}(a_0)u^{[j]}(x) - u^{[d]}(x)u^{[j]}(a_0), \quad j = \overline{1, d-1}.$$

Рассмотрим теперь произвольный индекс $i_1 \in I(a_0)$. Из функций $v^{[j]}$, можно получить $d-2$ решений из $\mathcal{S}(L_\lambda)$, каждое из которых равно тождественно нулю на ребре γ_{i_1}, примыкающем к вершине a_0. Так, если некоторая функция не равна тождественно нулю на ребре γ_{i_1}, пусть для определённости это будет $v^{[d-1]}$, то строим набор функций:

$$y^{[j]}(x) = (p(v^{[d-1]})'')'(a_0)v^{[j]}(x) - v^{[d-1]}(x)(p(v^{[j]})'')'(a_0), \quad j = \overline{1, d-2}.$$

Очевидно, что $y^{[j]}(a_0) = 0$, $(p(y^{[j]})'')'(a_0) = 0$. Поэтому, из леммы 1, следует, что $y^{[j]}(x) \equiv 0$ на γ_{i_1}. Если же каждая из функций $v^{[j]}$ равна тождественно нулю на ребре γ_{i_1}, то выберем любые $d-2$ из них и переобозначим их через $y^{[j]}$, $j = \overline{1, d-2}$.

Рассмотрим далее ребро γ_{i_2} с произвольным индексом $i_2 \in I(a_0) \backslash i_1$. Если хотя бы одна из функций $\{y^{[j]}\}_1^{d-2}$ не тождественный нуль на ребре γ_{i_2}, то строим линейные комбинации $w^{[j]}(x)$, $j = \overline{1, d-3}$ такие, что $w^{[j]}(x) \equiv 0$ на ребре γ_{i_2}. Если же для всех $j = \overline{1, d-2}$ соответствующие сужения функций $y^{[j]}$ на ребро γ_{i_2} тождественно равны нулю, то берём любые $d-3$ из них и переобозначим их через $w^{[j]}$, $j = \overline{1, d-3}$.

Далее берём произвольный индекс $i_3 \in I(a_0) \setminus \{i_1, i_2\}$ и начинаем строить функции тождественно нулевые на ребре γ_{i_3}. И т.д. В итоге, через $k_0 - 1$ шагов мы получим набор функций $z^{[j]}$, $j = \overline{1, d - k_0}$ таких, что $z^{[j]}(x) \equiv 0$ на всех рёбрах звёзды $\Gamma(a_0)$ кроме, может быть одного ребра. Тогда из леммы 2, следует, что $z^{[j]} \equiv 0$ на звезде $\Gamma(a_0)$.

Рассмотрим граф $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma(a_0)$. Если $\partial\Gamma_1 \neq \varnothing$, то из $\partial\Gamma = \varnothing$ следует, что все граничные вершины подграфа Γ_1 являются граничными и для звезды $\Gamma(a_0)$. Поэтому каждая граничная вершина подграфа Γ_1 является концевой для одного ребра звезды $\Gamma(a_0)$ и одного ребра из Γ_1. А поскольку все функции $z^{[j]}(x) \equiv 0$ на $\Gamma(a_0)$, то из леммы 2 вытекает, что все функции $z^{[j]}(x) \equiv 0$ на всех граничных рёбрах подграфа Γ_1. Если Γ_1 является деревом, то ввиду леммы 2 все функции $z^{[j]}(x) \equiv 0$ на Γ_1, а стало быть и на всём Γ. Поскольку каждая из функций $z^{[j]}(x)$ есть нетривиальная линейная комбинация набора $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$, то функции $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$ линейно зависимы и теорему можно считать доказанной.

Далее рассмотрим случай, когда Γ_1 содержит циклы. В этом случае каждая граничная вершина графа Γ_1 является концом некоторой ветви (может быть даже состоящей из одного ребра), «прикреплённой» к внутренней вершине графа Γ_1, лежащей на каком-нибудь цикле в Γ_1. Причём, как и в рассмотренном выше случае, все функции $z^{[j]}$ равны тождественно нулю на всех граничных рёбрах графа Γ_1. Тогда из леммы 2 следует, что все функции $z^{[j]}$ тождественно равны нулю на всех ветвях графа Γ_1, прикреплённых к вершинам, лежащим на циклах.

Шаг 2. Удалим из Γ_1 все его ветви и обозначим получаемый граф через $\widehat{\Gamma}_1$. Несложно видеть, что

$$\eta(\widehat{\Gamma}_1) = \eta(\Gamma) - (k_0 - 1).$$

Возможны два варианта: $\widehat{\Gamma}_1$ — гнездо или $\widehat{\Gamma}_1$ имеет разбивающие вершины. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Пусть $\widehat{\Gamma}_1$ — гнездо. Фиксируем произвольную вершину $a_1 \in \Gamma_1$, к которой примыкает ребро из $\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_1$. Обозначим, через k_1 степень вершины a_1 в графе $\widehat{\Gamma}_1$. Далее, мы можем повторить все предыдущие рассуждения и построить из имеющихся $d - k_0$ решений $z^{[j]}$, ровно $d - k_0 - (k_1 - 1)$ функций $\widehat{u}^{[j]}$, равных тождественно нулю на звезде $\widehat{\Gamma}_1(a_1) \subset \widehat{\Gamma}_1$. Здесь стоит отметить, что для этого нам требуется $k_1 - 1$ шагов, поскольку все функции $z^{[j]}$ уже равны нулю в вершине a_1.

Рассмотрим теперь случай, когда $\widehat{\Gamma}_1$ имеет разбивающую вершину. В этом случае $\widehat{\Gamma}_1$ имеет хотя бы одно граничное гнездо $\widehat{\Gamma}_{\rm bn}$, которое связано с $\widehat{\Gamma}_1 \backslash \widehat{\Gamma}_{\rm bn}$ разбивающей вершиной a_2. Поскольку граф Γ не имеет разбивающих вершин, то по крайней мере одна из вершин гнезда $\widehat{\Gamma}_{\rm bn}$, отличная от a_2, является концевой для некоторого ребра из $\Gamma \backslash \widehat{\Gamma}_1$ (иначе вершина a_2 окажется разбивающей для исходного графа Γ). Следовательно, все функции $z^{[j]}$ равны нулю в этой вершине, которую мы обозначим a_3. Как и выше, полагая, что k_1 — степень вершины a_3 в графе $\widehat{\Gamma}_1$, из функций $z^{[j]}$ можно получить $d - k_0 - (k_1 - 1)$ линейно независимых решений $\widehat{u}^{[j]}$ тождественно равных нулю на звезде $\Gamma(a_3) \subset \widehat{\Gamma}_1$.

Далее, рассуждая как и на первом шаге доказательства, либо получим, что все функции $\{\widehat{u}^{[j]}\}_{j=1}^{d-k_0-(k_1-1)}$ равны тождественно нулю и теорему можно считать доказанной, либо придём к графу $\widehat{\Gamma}_2 \subset \widehat{\Gamma}_1$, все рёбра которого лежат на циклах, и $\widehat{u}^{[j]} \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_2$. При этом в $\widehat{\Gamma}_2$ существует неразбивающая вершина такая, что все решения $\widehat{u}^{[j]}$ равны нулю в этой вершине.

Поскольку Γ — конечный граф, то через конечное число шагов мы получим оценку

$$\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leqslant k_0 + (k_1 - 1) + \ldots + (k_n - 1).$$

Учитывая, что $k_i = \eta(\widehat{\Gamma}_i) + 1$, где $\eta(\widehat{\Gamma}_i)$ — количество циклов, устранённых на i-ом шаге, получаем

$$\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leqslant k_0 + 1 + \sum_{i=1}^{n} \eta(\widehat{\Gamma}_i) = \eta(\Gamma) + 1.$$

$\square$

Теорема 3. *Пусть $\partial\Gamma \neq \varnothing$. Тогда кратность любого собственного значения краевой задачи* (1) *не превосходит*

$$|\partial\Gamma| + \zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) - 1. \tag{5}$$

Доказательство. Если граф Γ является деревом, то $\zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) = 0$ и оценка следует из теоремы 2. Поэтому далее рассматривается случай графа с циклами.

В целях краткости записи введём обозначение $k = |\partial\Gamma|$. Пусть $\{a_i\}_1^k$ — множество всех граничных вершин графа Γ. Рассмотрим произвольный набор $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$ функций из $\mathcal{S}(L_\lambda)$, где $d > |\partial\Gamma| + \zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) - 1$. Покажем, что элементы рассматриваемого набора линейно зависимы.

С помощью линейных комбинаций функций $u^{[j]}$ можно построить $d - 1$ функций $v^{[j]}$, $j = \overline{1, d-1}$, каждая из которых тождественно равна нулю на ребре, примыкающем к граничной вершине a_1. Для этого, если все функции $u^{[j]}$, $j = \overline{1, d}$, равны тождественно нулю на ребре, примыкающем к граничной вершине a_1, можно выбрать любые $d-1$ из них. Если же хотя бы одна из них (например $u^{[d]}$) не равна тождественно нулю этом ребре, то полагаем

$$v^{[j]}(x) = (p(u^{[d]})'')'(a_1)u^{[j]}(x) - u^{[d]}(x)(p(u^{[j]})'')'(a_1), \quad j = \overline{1, d-1}.$$

Очевидно, что $v^{[j]}(a_1) = 0$ и $(p(u^{[j]})'')'(a_1) = 0$. Поэтому из леммы 2 следует, что $v^{[j]}(x) \equiv 0$ на граничном ребре, примыкающем к вершине a_1.

Аналогично из функций $v^{[j]}$, $j = \overline{1, d-1}$, можно последовательно построить $d-(k-1)$ функций $z^{[j]}$, каждая из которых, тождественно равна нулю на всех граничных рёбрах графа Γ кроме, быть может, примыкающего к вершине $a_k \in \partial\Gamma$.

Поскольку граф Γ содержит циклы и $\partial\Gamma \neq \varnothing$, в Γ можно выделить множество ветвей графа, каждая из которых «прикреплена» к какой-нибудь вершине, лежащей на циклах. Очевидно, что каждая граничная вершина графа Γ является граничной и для какой-то одной из таких ветвей. Пусть $b \in J(\Gamma)$ — вершина, к которой «прикреплена» ветвь, для которой вершина a_k является граничной. Поскольку функции $z^{[j]}$, $j = \overline{1, d-(k-1)}$ тождественно равны нулю на всех рёбрах графа, которые примыкают к вершинам из $\Gamma \setminus a_k$, то ввиду леммы 2 все функции $z^{[j]}$, $j = \overline{1, d-k-1}$, тождественно равны нулю на всех ветвях графа, кроме, быть может, цепочки $\Gamma_0(a_k, b)$. Удалим из графа Γ множество его ветвей за исключением цепочки $\Gamma_0(a_k, b)$ и обозначим полученный граф, через Γ_1.

Предположим, что в графе Γ_1 есть граничные гнёзда. Рассмотрим произвольное граничное гнездо $\Gamma_{\mathrm{bn}} \subset \Gamma_1$. Выберем в нём произвольную вершину $c \in J(\Gamma_{\mathrm{bn}})$, не являющуюся разбивающей. Тогда, отправляясь от вершины c, мы можем повторить доказательство теоремы 3 для графа Γ_{bn} и получить из функций $z^{[j]}$ ровно $d-(k-1)-(\eta(\Gamma_{\mathrm{bn}})+1)$ линейно независимых решений тождественно равных нулю на гнезде Γ_{bn}.

С остальными граничными гнёздами, поступаем аналогично. В итоге получим

$$d-(k-1) - \sum_{\Gamma_{\mathrm{bn}} \subset \Gamma_1} (\eta(\Gamma_{\mathrm{bn}})+1) = d - |\partial\Gamma| - \zeta(\Gamma) - \sum_{\Gamma_{\mathrm{bn}} \subset \Gamma_1} \eta(\Gamma_{\mathrm{bn}}) + 1$$

функций $y^{[j]}$, обращающихся в нуль на всех граничных гнёздах графа Γ.

Удалим из графа Γ_1 все его граничные гнёзда. Он распадётся на конечное число подграфов $\hat{\Gamma}^i$. Поскольку граф Γ_1 содержит только одну ветвь (цепочку $\Gamma_0(a_k, b)$), то любой из подграфов $\hat{\Gamma}^i$ либо является графом-деревом, либо состоит из ветвей, каждая из которых «прикреплена» к внутренней вершине графа Γ_1, лежащей на каком-нибудь цикле в Γ_1. Рассмотрим произвольную вершину c_1, являющуюся граничной для некоторого подграфа $\hat{\Gamma}^i$. Из наших рассуждений следует, что каждая из функций $y^{[j]}$ тождественно равна нулю на всех рёбрах исходного графа Γ кроме, быть может, граничного ребра ветви в подграфе $\hat{\Gamma}^i$, примыкающей к c_1. В силу леммы 2 получаем, что все функции $y^{[j]}$ тождественно равны нулю на граничном ребре ветви $\hat{\Gamma}^i$ примыкающем к c_1. Учитывая лемму 2, можно утверждать, что все функции $y^{[j]}$ тождественно равны нулю на всех ветвях подграфов $\hat{\Gamma}^i$, кроме $\Gamma_0(a_k, b)$. Обозначим через $\widetilde{\Gamma}^i$ подграф, получаемый из $\hat{\Gamma}^i$ удалением всех его ветвей отличных от $\Gamma_0(a_k, b)$.

Для каждого подграфа $\widetilde{\Gamma}^i$ можно повторить предыдущие рассуждения. Нужно только заметить, что граничные гнёзда графа $\widetilde{\Gamma}^i$ заведомо имеют вершины, в которых все функции $y^{[j]}$ равны нулю, а ветвей, отличных от $\Gamma_0(a_k, b)$, не имеют. Как было показано при доказательстве теоремы 3, зануление всех функций $y^{[j]}$ на таком граничном гнезде $\widetilde{\Gamma}^i_{\mathrm{bn}} \subset \widetilde{\Gamma}^i$ приводит к сокращению набора линейно независимых функций на цикломатическое число этого гнезда $\eta(\widetilde{\Gamma}^i_{\mathrm{bn}})$. Поэтому в конечном итоге мы придём к набору из

$$\kappa = d - |\partial\Gamma| - \zeta(\Gamma) - \sum_{\Gamma_{\mathrm{bn}} \subset \Gamma_1} \eta(\Gamma_{\mathrm{bn}}) - \sum_i \sum_{\widetilde{\Gamma}^i_{\mathrm{bn}} \subset \widetilde{\Gamma}^i} \eta(\widetilde{\Gamma}^i_{\mathrm{bn}}) + 1$$

линейно независимых функций $\widetilde{y}^{[j]}$, $j = \overline{1, \kappa}$, отличных от нуля только на цепочке $\Gamma_0(a_k, b)$. Привлекая лемму 2, окончательно получаем, что $\widetilde{y}^{[j]} \equiv 0$ на Γ.

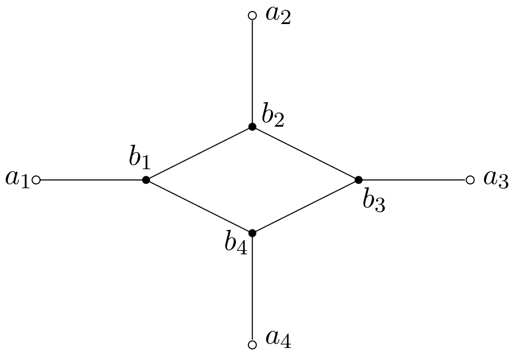
Теперь для завершения доказательства остаётся лишь заметить, что

$$\sum_{\Gamma_{\mathrm{bn}} \subset \Gamma_1} \eta(\Gamma_{\mathrm{bn}}) + \sum_i \sum_{\widetilde{\Gamma}^i_{\mathrm{bn}} \subset \widetilde{\Gamma}^i} \eta(\widetilde{\Gamma}^i_{\mathrm{bn}}) = \eta(\Gamma),$$

то есть $\kappa \geqslant 1$. Стало быть исходный набор функций $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$ линейно зависим. □

Следующий пример показывает, что полученная в теореме 3 оценка (5) является неулучшаемой.

Пример. Рассмотрим спектральную краевую задачу (1) на графе Γ, изображённом на следующем рисунке.



В данном случае $|\partial\Gamma| = 4$, $\eta(\Gamma) = 1$ и $\zeta(\Gamma) = 0$. Согласно формуле (5) кратность любого собственного значения задачи (1) не превосходит четырёх.

Предполагая, что длина всех восьми рёбер графа Γ равна единице, рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{gathered} u_k^{IV} - \lambda u_k = 0, \quad x \in \gamma_k, \\ u \in C(\Gamma), \quad u_k'(b_i) = 0, \quad k \in I(b_i), \quad \sum_{k \in I(b_i)} u_{k\nu}'''(b_i) = 0, \quad b_i \in J(\Gamma); \\ u(a_i) = u'(a_i) = 0, \quad a_i \in \partial\Gamma. \end{gathered} \tag{6}$$

Вычислим характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (6). Учитывая положительность собственных значений, нас интересуют значения $\Delta(\lambda)$ при $\lambda > 0$. Прямые вычисления показывают, что при $\lambda > 0$ характеристический определитель краевой задачи (6) равен

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = 1152\lambda^8 \left(\cos\sqrt[4]{\lambda}\cosh\sqrt[4]{\lambda} - 1\right)^4 \left(\cosh\sqrt[4]{\lambda}\sin\sqrt[4]{\lambda} + \cos\sqrt[4]{\lambda}\sinh\sqrt[4]{\lambda}\right)^2 \\ \times \left(5\cos 2\sqrt[4]{\lambda} - 5\cosh 2\sqrt[4]{\lambda} + 16\sin\sqrt[4]{\lambda}\sinh\sqrt[4]{\lambda} - 9\sin 2\sqrt[4]{\lambda}\sinh 2\sqrt[4]{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Нули $\Delta(\lambda)$ суть собственные значения краевой задачи (6), причём кратность собственного значения совпадает с кратностью соответствующего нуля определителя $\Delta(\lambda)$. Очевидно, что собственные значения, удовлетворяющие уравнению

$$\cos\sqrt[4]{\lambda}\cosh\sqrt[4]{\lambda} - 1 = 0,$$

имеют кратность четыре.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2024-1447). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровских А. В., Мустафокулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвёртого порядка на пространственной сети // Доклады РАН. 1995. Т. 345, № 6. Р. 730–732.
2. *Кулаев Р. Ч., Уртаева А. А.* О кратности собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка на графе // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 7. С. 882–889; DOI: 10.31857/S0374064122070020
3. *Кулаев Р. Ч.* О функции Грина краевой задачи на графе-пучке // Изв. вузов. Матем. 2013. Т. 2. С. 56–66.
4. *Кулаев Р. Ч.* Неосцилляция уравнения четвёртого порядка на графе // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 12. С. 79–118.
5. *Покорный Ю. В., Мустафокулов Р.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвёртого порядка на графе // Изв. вузов. Матем. 1999. Т. 2. С. 75–82.
6. *Borovskikh A. V., Lazarev K. P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci. 2004. V. 119, N 6. P. 719–738.
7. *Mercier D., Régnier V.* Control of a network of Euler—Bernoulli beams // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 342, N 2. P. 874–894.
8. *Xu G. Q., Mastorakis N. E.* Differential equations on metric graph. Zografou: Wseas Press, 2010.
9. *Lubary J. A.* On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs // Lect. Notes Pure Appl. Math. 2001. V. 219. P. 135–146.
10. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В. , Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2007.
11. *Kuchment P.* Quantum graphs. I. Some basic structures // Waves Random Media. 2004. V. 14, N 1. P. S107–S128.
12. *Kuchment P.* Quantum graphs. II. Some spectral properties of quantum and combinatouial graphs // J. Phys. A Math. Gen. 2005. V. 38, N 22. P. 4887–4900.
13. *Диаб А. Т., Калдыбекова Б. К., Пенкин О. М.* О кратности собственных значений в задаче Штурма—Лиувилля на графах // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 4. С. 489–501.
14. *Кулаев Р. Ч.* Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2015. V. 51, N 4. С. 445–458.
15. *Кулаев Р. Ч.* Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 2. С. 161–173.
16. *Кулаев Р. Ч.* О свойстве неосцилляции уравнения на графе // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 85–97.
17. *Кулаев Р. Ч., Уртаева А. А.* Теоремы Штурма о распределении нулей для уравнения четвёртого порядка на графе // Матем. заметки. 2022. Т. 112, № 6. С. 947–952.

18. *Kulaev R. Ch.* The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph // Mediterr. J. Math. 2022. V. 19. Article 73.
19. *Kulaev R. Ch., Urtaeva A. A.* Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network // Math. Methods Appl. Sci. 2023. V. 46, N 14. P. 15743–15763; DOI: 10.1002/mma.9424
20. *Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver Jr. W.* Vibration Problems in Engineering, 5th Edition. Hoboken: Wiley InterScience, 1990.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.927.25

UPPER BOUNDS FOR THE EIGENVALUE MULTIPLICITIES OF A FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR ON A GRAPH

A. A. Urtaeva

Khetagurov North Ossetian State University, Vladikavkaz, 362025 Russia

E-mail: urtaeva-96@mail.ru

Received 05.12.2023, revised 11.03.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The paper studies a model of a planar beam structure described by a fourth-order boundary value problem on a geometric graph. Elastic-hinge joint conditions are posed at the interior vertices of the graph. We study the properties of the spectral points of the corresponding spectral problem, prove upper bounds for the eigenvalue multiplicities, and show that the eigenvalue multiplicities depend on the graph structure (the number of boundary vertices, cycles, etc.). We give an example showing that our estimates are sharp.

Keywords: beam equation, quantum graph, eigenvalue, multiplicity.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.209

REFERENCES

1. A. V. Borovskikh, R. Mustafokulov, K. P. Lazarev, and Yu. V. Pokornyi, "On one class of fourth-order differential equations on a spatial network," Dokl. Ross. Akad. Nauk **345** (6), 730–732 (1995) [in Russian].
2. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, "On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph," Differ. Equations **58** (7), 869–876 (2022).
3. R. Ch. Kulaev, "The Green function of the boundary-value problem on a star-shaped graph," Russ. Math. **57** (2), 48–57 (2013).
4. R. Ch. Kulaev, "Disconjugacy of fourth-order equations on graphs," Sb. Math. **206** (12), 1731–1770 (2015).
5. Yu. V. Pokornyi and R. Mustafokulov, "On the positivity of the Green's function of linear boundary value problems for fourth-order equations on a graph," Russ. Math. **43** (2), 71–78 (1999).
6. A. V. Borovskikh and K. P. Lazarev, "Fourth-order differential equations on geometric graphs," J. Math. Sci. **119** (6), 719–738 (2004).
7. D. Mercier and V. RBŕegnier, "Control of a network of Euler—Bernoulli beams," J. Math. Anal. Appl. **342** (2), 874–894 (2008).
8. G. Q. Xu, N. E. Mastorakis, *Differential Equations on Metric Graph* (Wseas Press, Zografou, 2010).
9. J. A. Lubary, "On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs," Lect. Notes Pure Appl. Math. **219** (Marcel Dekker, New York, 2001), 135–146.
10. Yu. V. Pokornyi, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, and S. A. Shabrov, *Differential Equations on Geometric Graphs* (Fizmatlit, Moscow, 2007) [in Russian].
11. P. Kuchment, "Quantum graphs. I. Some basic structures," Waves Random Media **14** (1), S107–S128 (2004).
12. P. Kuchment, "Quantum graphs. II. Some spectral properties of quantum and combinatorial graphs," J. Phys. A Math. Gen. **38** (22), 4887–4900 (2005).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 2, pp. 352–360.

13. A. T. Diab, B. K. Kaldybekova, and O. M. Penkin, “On the multiplicity of eigenvalues of the Sturm–Liouville problem on graphs,” Math. Notes **99** (4), 492–502 (2016).

14. R. Ch. Kulaev, “Oscillation of the Green function of a multipoint boundary value problem for a fourthorder equation,” Differ. Equations **51** (4), 449–463 (2015).

15. R. Ch. Kulaev, “Criterion for the positiveness of the Green function of a many-point boundary value problem for a fourth-order equation,” Differ. Equations **51** (2), 163–176 (2015).

16. R. Ch. Kulaev, “On the disconjugacy property of an equation on a graph,” Sib. Math. J. **57** (1), 64–73 (2016).

17. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, “Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph,” Math. Notes **111** (6), 977–981 (2022).

18. R. Ch. Kulaev, “The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph,” Mediterr. J. Math. **19**, 73 (2022).

19. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, “Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network,” Math. Methods Appl. Sci. **46** (14), 15743–15763 (2023). https://doi.org/10.1002/mma.9424

20. S. P. Timoshenko, D. H. Young, and W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering* (Wiley Inter-Science, Hoboken, 1990), 5th Ed.