УДК 517.95:532.64

ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ТОНКОМ ПОРОУПРУГОМ СЛОЕ

© 2024 П. В. Гилев[a], А. А. Папин[b]

*Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий,
просп. Ленина, 61, г. Барнаул 656049, Россия*

E-mails: [a]pavel.gilev.2000@mail.ru, [b]papin@math.asu.ru

Поступила в редакцию 02.11.2023 г.; после доработки 06.03.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

В работе рассматривается математическая модель совместного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. Данная модель является обобщением классической модели Маскета—Леверетта, в которой пористость считается заданной функцией пространственной координаты. В основе изучаемой модели лежат уравнения сохранения массы жидкостей и пористого скелета, закон Дарси для жидкостей, учитывающий движение пористого скелета, формула Лапласа для капиллярного давления, реологическое уравнение для пористости типа Максвелла и условие равновесия «системы в целом». В приближении тонкого слоя исходная задача сводится к последовательному определению пористости твёрдого скелета и его скорости, а затем выводится эллиптико-параболическая система для «приведённого давления» и насыщенности смачивающей фазы. В связи с вырождением на решении уравнений системы её решение понимается в обобщённом смысле. Доказательство теоремы существования проводится в четыре этапа: регуляризация задачи, доказательство физического принципа максимума для насыщенности, построение галёркинских приближений, предельный переход по параметрам регуляризации на основе метода компенсированной компактности.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, закон Дарси, насыщенность, пороупругость, разрешимость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.202

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В работе изучается следующая квазилинейная система составного типа:

$$\frac{\partial(s_i\phi\rho_i^0)}{\partial t} + \nabla\cdot(s_i\phi\vec{u}_i\rho_i^0) = 0, \tag{1}$$

$$s_i\phi(\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i - \rho_i^0\vec{g}), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial t} + \nabla\cdot((1-\phi)\vec{u}_3\rho_3^0) = 0, \tag{3}$$

$$p_2 - p_1 = p_c(s_1), \tag{4}$$

$$\nabla\cdot\vec{u}_3 = -\frac{1}{\xi(\phi)}p_e - \beta_t(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3\cdot\nabla p_e), \tag{5}$$

$$\nabla p_{tot} + \nabla\cdot\left(\frac{\eta}{2}(1-\phi)\left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right) = -\rho_{tot}\vec{g}. \tag{6}$$

Данная система описывает движение двух несмешивающихся жидкостей (нефть — вода) в пороупругой среде [1]. Здесь ρ_i^0, $\vec{u}_i$, s_i и p_i — соответственно истинная плотность, скорость, насыщенность и давление i-ой фазы ($i = 1$ — смачивающая фаза, $i = 2$ — несмачивающая фаза, $s_1 + s_2 = 1$, $i = 3$ — твёрдый деформируемый скелет), ϕ — пористость (доля объёма среды, приходящейся на пустоты), $p_e \equiv p_{tot} - p_f$ — эффективное давление, $p_{tot} \equiv \phi p_f + (1-\phi)p_3$ — общее давление, $p_f \equiv p_1 s_1 + p_2 s_2$ — давление жидкой фазы, $\rho_{tot} \equiv \phi(s_1\rho_1^0 + s_2\rho_2^0) + (1-\phi)\rho_3^0$ — общая плотность; $\eta(\phi)$, $\xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ — соответственно коэффициенты сдвиговой вязкости, объёмной вязкости и объёмной сжимаемости среды, $\vec{g}$ — плотность массовых сил; кроме того, $K_0(\phi)$ — тензор проницаемости, μ_i — динамическая вязкость i-ой жидкости, $k_{0i}(s_i)$ — относительная фазовая проницаемость, $p_c(s_1)$ — капиллярное давление есть заданные функции (модельные зависимости:

$$p_c = \bar{p}_c(1-s_1)/s_1, \quad \xi(\phi) = \eta/\phi^b, \quad \beta_t(\phi) = \phi^m \beta_\phi, \quad k_{0i} = \bar{k}_{0i} s_i^{n_i}, \quad K_0(\phi) = \phi^3 \bar{K}/(1-\phi)^2,$$

где $\bar{p}_c$, m, b, β_ϕ, $\bar{k}_{0i}$, $\bar{K}$, n_i — положительные параметры [2]).

Задача записана в эйлеровых координатах $\vec{x} = (x, y, z)$ и t, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ — оператор градиента, t — время. Истинные плотности принимаются постоянными, неизвестными функциями являются 14 скалярных величин: $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, p_1, p_2, p_3, s_1, ϕ. Для их определения служат также 14 скалярных уравнений: три уравнения неразрывности (1), (3), шесть уравнений закона Дарси (2), уравнение для капиллярного скачка (4), реологическое соотношение типа Максвела (5) и три уравнения баланса сил системы в целом (6).

Особенностью задач для сформулированной системы уравнений (1)–(6) двухфазной фильтрации жидкостей в пороупругой среде является возможное вырождение уравнений на решении (вследствие условий $k_{01}(0) = k_{02}(1) = 0$), переменная пористость ϕ, а так же необходимость обоснования физического принципа максимума для s_i и ϕ вида $0 \leqslant s_i \leqslant 1$, $0 < \phi < 1$.

Работы с использованием переменной пористости начались с 1920-х годов в связи с попытками математического моделирования процессов фильтрации в осадочных породах [3]. Сначала использовались простые зависимости пористости от глубины (см. обзор [4]), полученные на основе экспериментальных данных. Затем появились более сложные зависимости для пористости через эффективное давление [5]. Экспериментальные данные о неизвестной пористости содержатся в работах [6, 7]. В настоящей работе принята устоявшаяся форма записи уравнения для пористости (5).

В работах [8, 9] рассматриваются задачи двухфазной фильтрации в деформируемой среде с известной пористостью. В работах [10, 11] рассматриваются модельные задачи фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. Если пористость задана, а среда недеформируема, данная система уравнений есть классическая модель Маскета-Леверетта [12,13]. Обоснованию моделей для однофазной фильтрации посвящены работы [4, 14–17]. Численное исследование проводилось в [18–20].

Система (1)–(6) рассматривается в тонком слое $\Omega = \{(x,z) | -H \leqslant x \leqslant H; -L \leqslant z \leqslant L\}$ при фиксированном всюду значении y и при следующих дополнительных гипотезах: $\vec{u}_i = (0, u_i(x,z,t))$, $i = 1, 2$, $\vec{u}_3 = (0, u_3(x,t))$, $\vec{g} = (0, -g)$, $K_0(\phi) = \widetilde{K}_0(\phi)\delta_{ij}$. В (1)–(6) перейдём к безразмерным переменным по правилу:

$$x = H\bar{x}, \quad z = H\bar{z}, \quad t = T\bar{t}, \quad u_i = \frac{L}{T}\bar{u}_i, \quad p_i = P\bar{p}_i, \quad p_e = P\bar{p}_e,$$
$$p_f = P\bar{p}_f, \quad p_{tot} = P\bar{p}_{tot}, \quad \eta = PT\bar{\eta}, \quad \widetilde{K}_0 = L^2\bar{K}_0, \quad \mu_i = PT\bar{\mu}_i,$$

где T, L, H, P — характерные время, расстояния и давление, причём $H/L = \delta$ — малый параметр. Тогда Ω есть единичный квадрат, область изменения $\bar{t}$ — единичный отрезок $[0,1]$, а система уравнений (1)–(6) принимает следующий вид (штрихи опускается):

$$\frac{\partial s_i\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(s_i\phi u_i) = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

$$s_i\phi(u_i-u_3)=-K_0(\phi)\frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial z}-g\rho_i^0),\quad i=1,2, \tag{8}$$

$$s_1+s_2=1,\quad p_2-p_1=p_c(s_1), \tag{9}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}((1-\phi)u_3)=0, \tag{10}$$

$$a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+u_3\frac{\partial p_e}{\partial z})=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\big(\frac{\partial u_3}{\partial x}(1-\phi)\big)=0, \tag{12}$$

$$\delta^2\tfrac{\partial p_{tot}}{\partial z}+\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\eta(1-\phi)\tfrac{\partial u_3}{\partial x}\right)=\delta^2\rho_{tot}^0 g. \tag{13}$$

Следует отметить, что с учётом условия $\frac{\partial u_3}{\partial z}=0$ система, вообще говоря, переопределена. Поэтому для начальной пористости вводится следующее ограничение: $\phi(x,z,0)=\phi_0(x)$. Далее будет доказано, что $\phi(x,z,t)=\phi_0(x)$. Тогда уравнение (12) перейдёт в $\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=0$. Из $\frac{\partial p_i}{\partial x}=0$ и уравнения капиллярного скачка (9) вытекает, что $\frac{\partial p_c}{\partial x}=0$, а так как p_c монотонна по s_1, то $\frac{\partial s_1}{\partial x}=0$. С учётом этого и определения p_f также выводим, что $\frac{\partial p_f}{\partial x}=0$. Поскольку $p_{tot}=p_f+p_e$ и $\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=0$, то $\frac{\partial p_e}{\partial x}=0$. После формального предельного перехода при $\delta\to 0$, система (7)–(13) сводится к системе для нахождения $\phi(x,z,t)$ и $u_3(x,t)$:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}((1-\phi)u_3)=0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(1-\phi)\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)=0, \tag{15}$$

а так же к следующей системе для определения $s_i(z,t)$, $p_i(z,t)$, $u_i(x,z,t)$, $(i=1,2)$, $p_e(z,t)$ и $p_{tot}(z,t)$:

$$\frac{\partial s_i\phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(s_i\phi u_i)=0, \frac{\partial p_i}{\partial x}=0, \tag{16}$$

$$s_i\phi(u_i-u_3)=-K_0(\phi)\frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial z}-g\rho_i^0),\quad i=1,2, \tag{17}$$

$$s_1+s_2=1,\quad p_2-p_1=p_c(s_1), \tag{18}$$

$$a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+u_3\frac{\partial p_e}{\partial z})=0,\quad \frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=0. \tag{19}$$

Система (14)–(15) с краевыми и начальными условиями вида:

$$\begin{gathered} u_3(-1,t)=u_3^-(t),\quad u_3(1,t)=u_3^+(t),\\ \phi(x,z,0)=\phi_0(x) \end{gathered} \tag{20}$$

будет называться задачей 1.

Уравнения (16)–(19) сводятся к следующей эллиптико-параболической системе для $s\equiv s_1$ и $p\equiv p_1-\int_s^1\frac{k_{02}}{k(\xi)\mu_2}\frac{\partial p_c}{\partial\xi}d\xi$ [1,12]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K_0k(s)\frac{\partial p}{\partial z}+f\right)=0, \tag{21}$$

$$\tfrac{\partial s\phi}{\partial t}+\tfrac{\partial}{\partial z}\left(s\phi u_3-K_0\tfrac{k_{01}}{\mu_1}\tfrac{\partial p}{\partial z}\right)-\tfrac{\partial}{\partial z}\left(K_0a(s)\tfrac{\partial s}{\partial z}-f_0\right)=0, \tag{22}$$

где

$$f = K_0\left(\frac{k_{01}}{\mu_1}\rho_1 g + \frac{k_{02}}{\mu_2}\rho_2 g\right), \quad f_0 = K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\rho_1 g,$$
$$F = f_0 - bf, \quad v = s_1\phi u_1 + s_2\phi u_2 + (1-\phi)u_3,$$
$$k(s) = \frac{k_{01}}{\mu_1} + \frac{k_{02}}{\mu_2}, \quad b(s) = \frac{k_{01}}{\mu_1 k(s)},$$
$$a(s) = -\frac{1}{k(s)}\frac{k_{01}}{\mu_1}\frac{k_{02}}{\mu_2}\frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad v_1 = s\phi u_1.$$

Причём

$$s(z,0) = s_0(z), \quad s(-1,0) = s^-(t),$$
$$s(1,0) = s^+(t), \quad p(-1,t) = p^-(t), \quad p(1,t) = p^+(t). \tag{23}$$

Система (21)–(22) с начально-краевыми условиями (23) будет называться задачей 2.

Рассмотрим в Ω и Ω_T, ряд функциональных пространств, придерживаясь обозначений, принятых в [21]. Пусть $||\cdot||_{q,\Omega}$ — норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q \in [1,\infty]$. Положим для краткости $||\cdot||_q = ||\cdot||_{q,\Omega}$, $||\cdot|| = ||\cdot||_{2,\Omega}$. Так же используются пространства Гёльдера $C^\alpha(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, где k натуральное число, а $\alpha \in (0,1]$, и пространство Соболева $W^l_p(\Omega)$, l — натуральное и $p \in [1,\infty]$, с нормами:

$$||f||_{C^\alpha(\Omega)} \equiv |f|_{\alpha,\Omega} = |f|_{0,\Omega} + H^\alpha_x(f),$$
$$|f|_{0,\Omega} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|,$$
$$H^\alpha_x(f) = \sup_{x_1,x_2\in\Omega} |f(x_1) - f(x_2)||x_1 - x_2|^{-\alpha},$$
$$||f||_{C^{k+\alpha}(\Omega)} \equiv |f|_{k+\alpha,\Omega} = \sum_{m=0}^{k} ||D^m_x f||_{0,\Omega} + H^\alpha(D^k_x f),$$
$$||f||_{W^l_p(\Omega)} = \sum_{m=0}^{l} ||D^m_x f||_{p,\Omega}.$$

Для функций, определённых на Ω_T, нам потребуется пространство $L_{q,r}(\Omega_T)$ с нормой

$$||||\cdot||_{q,\Omega}||_{r,G}, G = (0,T), q, r \in [1,\infty],$$

пространство $L_r(0,T;W^l_p(\Omega))$ с нормой

$$||\cdot||_{L_r(0,T;W^l_p(\Omega))} = ||||\cdot||_{W^l_p(\Omega)}||_{r,G},$$

а так же $C^{k+\alpha,m+\beta}(\Omega_T)$, где k,m натуральные и $(\alpha,\beta) \in (0,1]$, с нормой

$$||f||_{C^{k+\alpha,m+\beta}(\Omega_T)} \equiv |f|_{k+\alpha,m+\beta,\Omega_T} = \sum_{l=0}^{k} ||D^l_x f||_{0,\Omega_T} + \sum_{j=1}^{m} ||D^j_t f||_{0,\Omega_T} +$$
$$+ H^\alpha_x(D^k_x f) + H^\beta_t(D^k_x f) + H^\alpha_x(D^m_t f) + H^\beta_t(D^m_t f),$$

где

$$H^\alpha_x(f(x,t)) = \sup_{x_1,x_2\in\Omega} |f(x_1,t) - f(x_2,t)||x_1 - x_2|^{-\alpha}$$

для всех $t \in (0,T)$,

$$H^\beta_t(f(x,t)) = \sup_{t_1,t_2\in(0,T)} |f(x,t_1) - f(x,t_2)||t_1 - t_2|^{-\beta}$$

для всех $x \in \Omega$. В случае $k = m$ и $\alpha = \beta$, используется обозначение $C^{k+\alpha}(\Omega_T)$.

Определение 1. Классическим решением задачи (14)–(15) называется совокупность функций ϕ и u_3, $\phi \in C^{1+\alpha}(\Omega_T)$, $u_3 \in C^{2+\alpha,1+\alpha}(\Omega_T)$, удовлетворяющих условиям (14)–(15) и начально-краевым условиям (20) как непрерывные в $\bar{\Omega}_T$ функции.

Определение 2. Ограниченные измеримые функции s и p называются обобщённым решением задачи 2, если:

1) $0 \leqslant s(z,t) \leqslant 1$ почти всюду в Ω_T.

2) $\frac{\partial p}{\partial z} \in L_2(\Omega_T), a\frac{\partial s}{\partial z} \in L_2(\Omega_T)$, где при $0 \leqslant s \leqslant 1$ функция $a\frac{\partial s}{\partial z}$ определяется формулой:

$$a\frac{\partial s}{\partial z} = \left|\frac{dp_c}{ds}\right| \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \in L_2(\Omega_T),$$
$$u(s) = \int_0^s \frac{1}{k(\xi)} \frac{k_{01}(\xi)}{\mu_1} \frac{k_{02}(\xi)}{\mu_2} d\xi.$$

3) p удовлетворяет краевым, а s — начально-краевым условиям в следующем смысле: $u[s_0(z,t)] = u_0$.

4) Для произвольный допустимых функций $\lambda(z,t)$ и $\psi(z)$ таких, что

$$\lambda(z,t) \in W_2^1(\Omega_T), \quad \psi(z) \in W_2^1(\Omega),$$
$$\lambda(-1,t) = \psi(-1) = \lambda(1,t) = \psi(1) = \lambda(z,T) = 0, \quad t \in [0,T], \quad z \in [-1,1],$$

почти всюду выполнены равенства:

$$L_1 \equiv -\left(\phi s, \lambda_t\right)_{\Omega_T} + \left(\vec{v}_1, \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_T} = -\left(\phi s, \lambda\right)_{\Omega}\big|_0^T,$$
$$L_2 \equiv \left(\vec{v}, \nabla\psi\right)_{\Omega} = 0.$$

Здесь

$$s_0(z,t) = \begin{cases} s^-(t), & x = -1, \\ s^+(t), & x = 1, \\ s^0(z), & t = 0, \end{cases}$$
$$p_0(t) = \begin{cases} p^-(t), & z = -1, \\ p^+(t), & z = 1. \end{cases}$$

Основным результатом данной работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если u_3^+ и $u_3^- \in C^1(0,T)$, $\phi^0(x) \in C^1(-1,1)$ и $0 < \phi^0(x) < 1$, $x \in [-1;1]$, то решение задачи 1 существует и даётся формулами:*

$$\phi \equiv \phi^0(x), \quad u_3 = \frac{u_3^+ - u_3^-}{I(1)} I(x) + u_3^-, \quad I(x) = \int_{-1}^x \frac{d\xi}{1-\phi^0(\xi)}. \tag{24}$$

Теорема 2. *При выполнении следующих условий:*

$$\frac{\partial p_c}{\partial s} < 0, \quad |k_{01}(s), k_{02}(s), u_3|_{C[0,1]} \leqslant M,$$

$$0 < M^{-1} \leqslant \left[\phi^0, k, K_0\right] \leqslant M, \text{ если } s \in [0,1],$$

$$0 < (a, k_{01}, k_{02}), \quad s \in (0,1),$$

$$a|_{s=0,1} = k_{01}(0) = k_{02}(1) = 0,$$

$$\left(\|\frac{\partial s_0}{\partial t}\|_{1,\Omega_T}; \|\frac{\partial s_0}{\partial z}\|_{2,\Omega_T}\right) \leqslant M,$$

$$\left(\|p_0\|_{2,\infty,\Omega_T}; \|\frac{\partial p_0}{\partial z}\|_{2,\infty,\Omega_T}\right) \leqslant M$$

существует по крайней мере одно обобщённое решение задачи 2.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Сначала докажем теорему 1.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{div} \vec{u}_3 = 0$, то из [22] имеем $\phi = \phi^0$. Зная $\phi(x)$ из (15) находится $u_3(x,t)$. Таким образом, решение задачи 1 существует, удовлетворяет уравнениям (14)–(15), условиям (20) и задаётся формулами (24). □

В силу того, что функции u_3 и ϕ зависят от переменной x, решение задачи 2 также, вообще говоря, зависит от переменной x как от параметра. Подобная параметрическая зависимость отсутствует в работе [12].

Проведём регуляризацию задачи. Продолжим каждую функцию вида $f(z,s)$ вне промежутка $0 \leqslant s(z,t) \leqslant 1$ по формуле

$$f_*(z,s) = \begin{cases} f(z,0), & s \leqslant 0, \\ f(z,s), & 0 < s < 1, \\ f(z,1), & s \geqslant 1. \end{cases}$$

и, кроме того, заменим $a(s)$ на $\bar{a}(s) = a_*(s) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а v и b на их стекловские усреднения по z и по s соответственно:

$$-(\phi s, \lambda_t)_{\Omega_t} + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\phi u_3, \lambda\right)_{\Omega_t} - \left(c(s)(u_3 - v_h)\frac{\partial s}{\partial z}, \lambda\right)_{\Omega_t} + \\ + \left(K_0 \bar{a}(s)\frac{\partial s}{\partial z} + F, \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} = -(\phi s, \lambda)_\Omega |_{t=0}, \quad (25)$$

где $c = (b_s^0)_*$, $b^0 = b_h$.

Лемма. *Пусть выполнены предположения (1)–(4) определения 2 и $s(z,t)$, $p(z,t)$ — обобщённое решение задачи 2_ε. Тогда почти всюду в Ω_T*

$$0 \leqslant s(z,t) \leqslant 1, \quad (z,t) \in \Omega_T.$$

Доказательство. Введём срезающую функцию $\bar{s} = max\{s(z,t) - 1, 0\}$ и обозначим $\Gamma = \partial\Omega$. В силу свойств срезки $\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} \in L_2(\Omega_T)$, $\bar{s}|_\Gamma = 0$, $\bar{s}|_{t=0} = 0$, и почти всюду выполнены равенства

$$\left(\phi s, \frac{\partial \bar{s}}{\partial t}\right)_{\Omega_t} = (\phi s, \bar{s})_\Omega|_{t=0} - \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial t}\phi, \bar{s}\right)_{\Omega_t}, \quad F(\bar{s}, z) = 0.$$

После всех замен получится следующее выражение:

$$\frac{1}{2}\|\sqrt{\phi}\bar{s}(t)\|^2_{\Omega,2} - \left((c(s)(u_3 - v_h) - \phi u_3)\frac{\partial s}{\partial z}, \bar{s}\right)_{\Omega_t} + \left(K_0\bar{a}(s)\frac{\partial s}{\partial z}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial z}\right)_{\Omega_t} = 0.$$

Отличием данного равенства от аналогичного из работы [12] является наличие слагаемого с u_3.

Третье слагаемое оценивается снизу значением $\left\|\frac{\partial s}{\partial z}\right\|^2_{2,\Omega_t}$, второе, после переноса в правую часть, можно оценить сверху, используя неравенство Коши. В результате получим неравенство:

$$y(t) = \|s\|^2_\Omega \leqslant C\int_0^t y(\tau)d\tau, \quad y(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $\bar{s} = 0$ или, что то же самое, $s \leqslant 1$ почти всюду. Теперь, вводя срезку $max(-s, 0)$, проделывая все те же шаги, придём к тому, что $s \geqslant 0$ почти всюду. □

Будем искать приближенное решение задачи 2 в виде:

$$s^N = \sum_{k=1}^N a_k^N(t)\lambda_k(z) + s_0(z,t), \quad p^N = \sum_{k=1}^N b_k^N\psi_k(z) + p_0(z,t),$$

где фундаментальные в $W_2^1(\Omega, [0,T]) = \{\lambda(z) \in W_2^1(\Omega), \lambda(-1) = \lambda(1) = 0\}$ системы функций λ_k и ψ_k нормированы следующим образом:

$$(\phi\lambda_k, \lambda_i)_\Omega = \delta_{ki}, \quad (\psi_k, \psi_i)_\Omega = \delta_{ki},$$

где δ_{ik} — символы Кронекера а $(\cdot,\cdot)_\Omega$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Подставим эти представления для s^N и p^N, а λ_k, и ψ_k вместо пробных функций, раскроем скобки и воспользуемся условиями нормировки. Получим следующие равенства:

$$A_k(t)\frac{da_k^N(t)}{dt} = \sum_{j=1}^N a_j^N(t)\omega_{jk} + \beta_k, \quad a_k^N(0) = 0, \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^N b_j^N\zeta_{jk} + \mu_k = 0, \tag{27}$$

$$\zeta_{jk} = \left(K_0(\phi)k(s^N)\frac{\partial\psi_j}{\partial z}, \frac{\partial\psi_k}{\partial z}\right)_\Omega,$$

$$\mu_k = -(K_0(\phi)k(s)p_0(z,t), \frac{\partial\psi_k}{\partial z})_\Omega - (f, \frac{\partial\psi_k}{\partial z})_\Omega,$$

$$\omega_{jk} = \left(\lambda_j(z)\phi u_3, \frac{\partial\lambda_k}{\partial z}\right)_\Omega + \left(c(s^N)(u_3 - v_h)\frac{\partial\lambda_j}{\partial z}, \lambda_k\right)_\Omega - \\ - \left(K_0\bar{a}(s^N)\frac{\partial\lambda_j}{\partial z}, \frac{\partial\lambda_k}{\partial z}\right)_\Omega + \left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial z}\phi u_3, \lambda_k\right)_\Omega,$$

$$\beta_k = -\left(\phi s_0, \lambda_k\right)_\Omega + \left(\frac{\partial s_0}{\partial z}\phi u_3, \lambda_k\right)_\Omega + ((\phi s_0)_t, \lambda_k)_\Omega + \\ + \left(c(s^N)(u_3 - v)\frac{\partial s_0}{\partial z}, \lambda_k\right)_\Omega - \left(K_0\bar{a}(s^N)\frac{\partial s_0}{\partial z}, \frac{\partial \lambda_k}{\partial z}\right)_\Omega - \left(F, \frac{\partial \lambda_k}{\partial z}\right)_\Omega.$$

Фиксируем $t = \bar{t}$. Докажем разрешимость задачи (26) и (27). В силу всех сделанных предположений, коэффициенты этой вспомогательной системы непрерывны по a_k^N, b_j^N, функции ω_{jk}, β_k, ζ_{jk} ограничены, а μ_k интегрируемы по $t \in [0;T]$ при всех значениях a_k^N, b_j^N. Подставим в ω_{jk} функцию $\bar{s}^N = \sum_{k=1}^N \bar{a}_k^N \lambda_k + s_0$. Тогда для определения b_k^N в каждый момент времени получаем нелинейную алгебраическую систему уравнений. В силу ортогональности $\frac{\partial \psi_k}{\partial z}$ имеем

$$\sum_{i,j=1}^N \zeta_{jk}\xi_i\xi_j = (K_0(\phi)k(s)\sum_{i=1}^N \xi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial z}, \quad \sum_{j=1}^N \xi_j \frac{\partial \psi_j}{\partial z}) \geqslant \nu(M)\sum_{i,j=1}^N \xi_i\xi_j.$$

В силу всех предположений $\nu(M) > 0$, откуда следует, что система (27) однозначно разрешима и её решение зависит от $\bar{a}_k^N$ непрерывно. Подставим полученные представления в v_h. Перейдём к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая, в силу указанных свойств коэффициентов, разрешима при всех $t \in [0, T]$.

Получим априорные оценки для $s^N(z,t)$ и $p^N(z,t)$ не зависящие от N.

Умножим (26) на a_k^N, а (27) на b_k^N с последующим суммированием и интегрированием по t первого равенства:

$$\left(\frac{\partial s^N}{\partial z}\phi u_3, (s^N - s_0)\right)_{\Omega_t} - \left(c(s^N)(u_3 - v_h)\frac{\partial s^N}{\partial z}, s^N - s_0\right)_{\Omega_t} + \\ + \left(K_0\bar{a}(s^N)\frac{\partial s^N}{\partial z} + F, \frac{\partial}{\partial z}(s^N - s_0)\right)_{\Omega_t} = 0,$$

$$\left(K_0(\phi)k(s^N)\frac{\partial p^N}{\partial z} + f, \frac{\partial}{\partial z}(p^N - p_0)\right)_\Omega = 0.$$

Тогда верны следующие оценки

$$\|s^N\|^2_{2,Q_t} + \left\|\frac{\partial s^N}{\partial z}\right\|^2_{2,Q_t} \leqslant C(M,h,\varepsilon)(A_0(t) + \|s^N\|^2_{\Omega_t,2}),$$

где

$$A_0(t) = \|s_0\|^2_{2,\Omega_t} + \|\frac{\partial s_0}{\partial z}\|^2_{2,\Omega_t} + \|\frac{\partial s_0}{\partial t}\|^2_{2,\Omega_t} + \|F\|^2_{2,\Omega_t} + \|\phi\|^2_{2,\Omega_t},$$

$$\left\|\frac{\partial p^N}{\partial z}\right\|^2_{2,\Omega} \leqslant C\left(\left\|\frac{\partial p_0}{\partial z}\right\|_{2,\Omega} + \|f\|^2_{2,\Omega}\right).$$

Кроме того

$$\|p^N\|^2_{2,\Omega} \leqslant \bar{C}(M)\left(\left\|\frac{\partial p_0}{\partial z}\right\|_{2,\Omega} + \|f\|_{2,\Omega_t}\right). \tag{28}$$

Полагая $y(t) = \|s^N(t)\|^2_{2,\Omega}$, приходим к дифференциальному неравенству: $y'(t) \leqslant c_1(N_0 + y(t))$, $y(0) = 0$, откуда

$$y(t) \leqslant c_1\int_0^t e^{C_1(t-\tau)}N_0(\tau)d\tau,$$

или окончательно

$$\|s^N\|_{V(\Omega_t)} = \|s^N\|_{2,\infty,\Omega_t} + \|\frac{\partial s}{\partial z}\|_{2,\Omega_t} \leqslant C(M,\varepsilon,h). \tag{29}$$

Полученные оценки гарантируют равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность решений задачи 2 по переменной z. Равностепенную непрерывность решений задачи 2 по переменной t получаем с помощью принципа компенсированной компактности из [12].

Отметим, что $\bar{C}$ из (28) зависит только от M, а C из (29) от M, ε, h, но не от N. Осуществим предельный переход по N при фиксированных ε и h. Из (29) следует компактность s^N, $\frac{\partial s^N}{\partial z}$ в $L_2(\Omega_t)$. Будем теперь считать, с учётом (28), v_h в (26) заданной функцией, т. е. рассмотрим систему (26)–(27), соответствующую одному параболическому уравнению. Тогда согласно известным результатам [12], последовательность $s^N(z,t)$ компактна в следующем смысле: из неё можно выделить подпоследовательность, $s^{N_k}(z,t)$, такую, что $s^{N_k}(z,t) \to s(z,t)$ почти всюду в Ω_t, $\frac{\partial s^{N_k}}{\partial z} \to \frac{\partial s}{\partial z}$ слабо в $L_2(\Omega_t)$ и t $(\phi s^{N_k},\lambda)_\Omega \to (\phi s,\lambda)_\Omega$ при почти всех.

На выбранной последовательности s^N функции p^N сходятся сильно. Действительно, пусть $w = p^N - p$, тогда из (26) имеем

$$\left(K^N\frac{\partial w}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial z}\right)_\Omega = \left((K^N-K)\frac{\partial p}{\partial z} + f - f^N,\frac{\partial w}{\partial z}\right)_\Omega,$$

где $K^N = K_0(\phi)k(s^{N_k})$, $K = K_0(\phi)k(s)$, откуда

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial z}\right\|^2_{2,\Omega} \leqslant C(M)\left(\left\|(K^N-K)\frac{\partial p}{\partial z}\right\|^2_{2,\Omega} + \|f-f^N\|^2_{\Omega,2}\right) \to 0,$$

так как s^N сходится к s п. в. в Ω_t, а K — ограничен.

Получим оценки, не зависящие от h. После применения неравенств Гёльдера и Коши получается неравенство

$$\|s\|^2_{V(\Omega_t)} = \|s\|_{2,\infty,\Omega_t} + \|\frac{\partial s}{\partial z}\|_{2,\Omega_t} \leqslant C(M,\varepsilon)\left(\|v_h\|^2_{2,\Omega_t} + \|\frac{\partial s}{\partial z}\|^2_{2,\Omega_t} + \|\frac{\partial s_0}{\partial z}\|^2_{2,\Omega_t}\right)$$
$$+ C(M,\varepsilon)\left(\|F\|^2_{2,\Omega_t} + \|\phi\|^2_{2,\Omega_t} + \|s_0\|_{2,\infty,\Omega_t}\right).$$

Учитывая свойства усреднения, получим следующую оценку:

$$\|v_h\|_{2,\Omega} \leqslant \|v\|_{2,\Omega} = \|u_3 - K_0k(s)\frac{\partial p}{\partial z} - f\|_{2,\Omega} \leqslant \left(\left\|\frac{\partial p_0}{\partial z}\right\|_{2,\Omega} + \|u_3\|^2_{2,\Omega} + \|f\|^2_{2,\Omega_t}\right),$$

более того

$$\|v_h - v\|_{2,\Omega} \to 0, h \to 0.$$

Таким образом,

$$\|s\|^2_{V(Q_t)} \leqslant C(\varepsilon,M).$$

Поскольку v и u_3 не зависят от z, $\operatorname{div} v = \operatorname{div} u_3 = 0$, $\lambda(-1,t) = \lambda(1,t) = 0$, то справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}(\lambda b_0), v - u_3\right)_{\Omega_t} = 0.$$

Поэтому имеем

$$\left(\frac{\partial b}{\partial s}(v-u_3)\frac{\partial s}{\partial z},\lambda\right)_{\Omega_t} + \left(b_0(v-u_3),\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} = 0.$$

Тогда равенство (25) можно переписать так:

$$L_1^\varepsilon(s,p,\lambda) = -(\phi s, \lambda_t)_{\Omega_t} - \left(s\phi u_3, \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} + \left(b_0(v-u_3), \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} + \\ + \left(K_0\bar{a}(s)\frac{\partial s}{\partial z} + F, \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} = -(\phi s, \lambda)_\Omega|_0^1 + \left(b_s(s)(v_h - v)\frac{\partial s}{\partial z}, \lambda\right)_{\Omega_t},$$

$$\left(b_s(s)(v_h - v)\frac{\partial s}{\partial z}, \lambda\right)_{Q_t} \to 0, \quad h \to 0,$$

так как

$$\left\|\left(c(v_h - v), \frac{\partial s}{\partial z}\lambda\right)_{\Omega_t}\right\|_{\Omega_t} \leqslant c\|v - v_h\|_{\Omega_t}\left\|\lambda\frac{\partial s}{\partial z}\right\|_{\Omega_t} \to 0, \quad h \to 0.$$

Таким образом, выполнено тождество

$$L_1^\varepsilon(s,p,\lambda) = -(\phi s, \lambda_t)_{\Omega_t} - \left(s\phi u_3, \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} + \left(b_0(v-u_3), \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} + \\ + \left(K_0\bar{a}(s)\frac{\partial s}{\partial z} + F, \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} = -(\phi s, \lambda)_\Omega|_{t=0}.$$

Теперь осуществим предельный переход по ε. Имеем, что $0 \leqslant s^\varepsilon(z,t) \leqslant 1$. Рассмотрим равенство

$$(\phi\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}, s^\varepsilon)^2_{\Omega,2} + \left(K_0\bar{a}(s)\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + F, \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z}\right)_{\Omega_t} = (\phi\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}, s_0(z,t))_{\Omega_t} + \\ + \frac{1}{2}\|\sqrt{\phi}s(0)\|^2_{\Omega,2} - \left(b_0(v-u_3), \frac{\partial}{\partial z}(s^\varepsilon - s_0)\right)_{\Omega_t} + \\ + \left(s\phi u_3, \frac{\partial}{\partial z}(s^\varepsilon - s_0)\right)_{\Omega_t} + \left(\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}\phi, s_0\right)_{\Omega_t} + \left(K_0\bar{a}(s^\varepsilon)\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + F, \frac{\partial s_0}{\partial z}\right)_{\Omega_t}.$$

Введём функцию

$$u(z,t) = \int_{s_0}^{s^\varepsilon} b(\xi)d\xi, \quad u|_S = 0, \quad b(s^\varepsilon) = \frac{k_{01}}{\mu_1 k(s^\varepsilon)},$$

$$(bv, \frac{\partial}{\partial z}(s^\varepsilon - s_0))_{\Omega_t} = (v, \frac{\partial u}{\partial z})_{\Omega_t} + B, \quad B = \left(v, (b(s_0) - b(s^\varepsilon))\frac{\partial s_0}{\partial z}\right)_{\Omega_t}, \quad S = \partial\Omega_t.$$

Нетрудно получить неравенства

$$\|v\|_\Omega \leqslant C(M)\left(\left\|\frac{\partial p_0}{\partial z}\right\|_\Omega + \|f\|_{\Omega_t}\right),$$

$$\|s^\varepsilon\|_{\Omega_t} + \left\|\sqrt{\bar{a}}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{\Omega_t} \leqslant \\ \leqslant C(M)\left(\|s_0(z,0)\|_{\Omega_t} + \|s_0\|_{\Omega_t} + \left\|\frac{\partial s_0}{\partial t}\right\|_{\Omega_t} + \|v\|_{\Omega_t} + \|F\|_{\Omega_t} + \|\phi\|^2_{2,\Omega_t}\right).$$

Поскольку $\lambda(-1,t) = \lambda(1,t) = \lambda(z,T) = 0$, то справедливо равенство

$$-(\phi s^\varepsilon - \phi s_0, \lambda_t)_{\Omega_t} + \left(B^\varepsilon, \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} = 0,$$

$$B^\varepsilon = K_0\bar{a}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} - bv - \phi u_3 s^\varepsilon + F, \quad \|B^\varepsilon\|_{2,\Omega_t} \leqslant C(M).$$

По принципу компенсированной компактности [12] из s^ε можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Осуществляя предельный переход в равенстве

$$-\left(\phi s^\varepsilon, \lambda_t\right)_{\Omega_t} - \left(s^\varepsilon \phi u_3, \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} + \left(b_0(v-u_3), \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} + \\ + \left(K_0 a(s^\varepsilon)\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + F, \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} + \varepsilon\left(K_0 a(s^\varepsilon)\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)_{\Omega_t} = -\left(\phi s^\varepsilon, \lambda\right)_\Omega|_{t=0},$$

получим интегральное тождество из определения 2.

Теорема 2 доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания Института математики и информационных технологий по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (проект FZMW-2024-0003). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Папин А. А., Подладчиков Ю. Ю.* Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Изв. АГУ. 2015. № 1–2. С. 131-135; DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-24
2. *Connolly J. A. D., Podladchikov Y. Y.* Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. 1998. V. 11, N 2. P. 55–84.
3. *Athy L. F.* Density, porosity, and compaction of sedimentary rocks // Am. Assoc. Pet. Geol. Bull. 1930. V. 14, N 1. P. 1–24.
4. *Lee J. J.* Modelling and simulation of compacting sedimentary basins: Ph.D. Dissertation. Oxford: University of Oxford, 2019.
5. *Terzaghi K.* Der Grundbruch an Stauwerken und seine Verhütung // Die Wasserkraft. 1922. N 17. P. 445–449.
6. *Waldner P. A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H.* Effect of snow structure on water flow and solute transport // Hydrol. Process. 2008. V. 18, N 7. P. 1271–1290.
7. *Хасанов Р. Р., Смирнова А. Р.* Экспериментальные исследования физических характеристик предварительно обжатых глинистых грунтов при замачивании // Междунар. науч.-исслед. журн. 2017. № 12(66). С. 178–182; DOI: 10.23670/IRJ.2017.66.130
8. *Shelukhin V. V* A poroelastic medium saturated by a two-phase capillary fluid // Contin. Mech. Thermodyn. 2014. V. 26, N 5. P. 619–638; DOI: 10.1007/s00161-013-0321-x
9. *Jardani A., Revil A.* Seismoelectric couplings in a poroelastic material containing two immiscible fluid phases // Geophys. J. Int. 2015. V. 202, N 2. P. 850–870; DOI: 10.1093/gji/ggv176
10. *Папин А. А., Сибин А. Н.* Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Изв. АГУ. 2016. № 1. С. 152–156; DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-27
11. *Гилев П. В., Папин А. А.* Исследование задачи двухфазной фильтрации в пороупругой среде в приближении двумерной ячейки Хеле—Шоу // Сб. тезисов «Евразийской конференции по прикладной математике». 2021. С. 31.

12. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.

13. *Алексеев Г. В., Хуснутдинова Н. В.* О разрешимости первой краевой задачи для уравнения одномерной фильтрации двухфазной жидкости // Доклады АН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С.310–312.

14. *Simpson M., Spiegelman M., Weinstein M. I.* Degenerate Dispersive Equations Arising in the Study of Magma Dynamics // Nonlinearity. 2007. V. 20, N 1. P. 21–49; DOI: 10.1088/0951-7715/20/1/003

15. *Papin A. A., Tokareva M. A.* On local solvability of the system of the equations of one dimentional motion of magma // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2017. V. 10, N 3. P. 385–395; DOI: 10.17516/1997-1397-2017-10-3-385-395

16. *Virts R., Papin A., Tokareva M.* Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium // J. Phys. Conf. Ser. 2020. Article 012041; DOI: 10.1088/1742-6596/1666/1/012041

17. *Токарева М. А., Папин А. А.* Глобальная разрешимость системы уравнений одномерного движения вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 2(78). С. 81–93; DOI: 10.1134/S1990478919020169

18. *Morency C., Tromp J.* Spectral-element simulations of wave propagation in porous media // Geophys. J. Int. 2008. V. 175, N 1. P. 301–345.

19. *Chengwei Z., Chong P., Wei W., Chun W.* A multi-layer SPH method for generic water-soil dynamic coupling problems. Part I: Revisit, theory, and validation // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2022. V. 396. Article 115106; DOI: 10.1016/j.cma.2022.115106

20. *Бочаров О. Б., Рудяк В. Я., Серяков А. В.* Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физико-техн. пробл. разраб. полезн. ископ. 2014. № 2. С. 54–68.

21. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

22. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95:532.64

FILTRATION OF TWO IMMISCIBLE INCOMPRESSIBLE FLUIDS IN A THIN POROELASTIC LAYER

© 2024 **P. V. Gilev[a], A. A. Papin[b]**

Altai State University, Barnaul, 656049 Russia

E-mails: [a]pavel.gilev.2000@mail.ru, [b]papin@math.asu.ru

Received 02.11.2023, revised 06.03.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The paper considers a mathematical model of the filtration of two immiscible incompressible fluids in deformable porous media. This model is a generalization of the Musket—Leverett model, in which porosity is a function of the space coordinates. The model under study is based on the equations of conservation of mass of liquids and porous skeleton, Darcy's law for liquids, accounting for the motion of the porous skeleton, LaplaceвЂ™s formula for capillary pressure, and a Maxwell-type rheological equation for porosity and the equilibrium condition of the "system as a whole". In the thin layer approximation, the original problem is reduced to the successive determination of the porosity of the solid skeleton and its speed, and then the elliptic-parabolic system for the "reduced" pressure and saturation of the fluid phase is derived. In view of the degeneracy of equations on the solution, the solution is understood in a weak sense. The proofs of the results are carried out in four stages: regularization of the problem, proof of the maximum principle, construction of Galerkin approximations, and passage to the limit in terms of the regularization parameters based on the compensated compactness principle.

Keywords: two-phase filtration, Darcy's law, saturation, poroelasticity, solvability.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.202

REFERENCES

1. A. A. Papin and Yu. Yu. Podladchikov, "Isothermal motion of two immiscible fluids in a poroelastic medium," *Izv. Altaisk. Gos. Univ.*, (1–2), 131-135 (2015) [in Russian]. https://doi.org/10.14258/izvasu(2015)1.2-24
2. J. A. D. Connolly and Yu. Yu. Podladchikov, "Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock," Geodin. Acta **11** (2), 55–84 (1998).
3. L. F. Athy, "Density, porosity, and compaction of sedimentary rocks," Am. Assoc. Pet. Geol. Bull. **14** (1), 1–24 (1930).
4. J. J. Lee, "Modelling and simulation of compacting sedimentary basins," *Ph.D. Dissertation* (Univ. Oxford, Oxford, 2019).
5. K. Terzaghi, "Der Grundbruch an Stauwerken und seine VerhBËutung," Die Wasserkraft (17), 445–449 (1922).
6. P. A. Waldner, M. Schneebeli, U. Schultze-Zimmermann, and H. Fluhler, "Effect of snow structure on water flow and solute transport," Hydrol. Process. **18** (7), 1271–1290 (2008).
7. R. R. Khasanov and A. R. Smirnova, "Experimental studies of physical characteristics of precompressed clay soils during soaking," Mezhdunar. Nauchn.–Issled. Zh. (12 (66)), 178–182 (2017). https://doi.org/10.23670/IRJ.2017.66.130
8. V. V. Shelukhin, "A poroelastic medium saturated by a two-phase capillary fluid," Contin. Mech. Thermodyn. **26** (5), 619–638 (2014). https://doi.org/10.1007/s00161-013-0321-x

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 2, pp. 234–245.

9. A. Jardani and A. Revil, “Seismoelectric couplings in a poroelastic material containing two immiscible fluid phases,” Geophys. J. Int. **202** (2), 850–870 (2015). https://doi.org/10.1093/gji/ggv176

10. A. A. Papin and A. N. Sibin, “Self-similar solution of the problem of piston displacement of liquids in a poroelastic medium,” *Izv. Altaisk. Gos. Univ.*, (1), 152–156 (2016) [in Russian]. https://doi.org/10.14258/izvasu(2016)1-27

11. P. V. Gilev and A. A. Papin, “Study of the problem of two-phase filtration in a poroelastic medium in the approximation of a two-dimensional HeleвЂ"Shaw cell,” Sb. tezisov Evraziisk. konf. prikl. mat (Coll. Abstr. Eurasian Conf. Appl. Math.) (2021), p. 31 [in Russian].

12. S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, *Boundary Value Problems of Mechanics of Inhomogeneous Fluids* (Nauka, Novosibirsk, 1983) [in Russian].

13. G. V. Alekseev and N. V. Khusnutdinova, “On the solvability of the first boundary value problem for the equation of one-dimensional filtration of a two-phase fluid,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **202** (2), 310–312 (1972) [in Russian].

14. M. Simpson, M. Spiegelman, and M. I. Weinstein, “Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics,” Nonlinearity **20** (1), 21–49 (2007). https://doi.org/10.1088/0951-7715/20/1/003

15. A. A. Papin and M. A. Tokareva, “On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma,” J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **10** (3), 385–395 (2017). https://doi.org/10.17516/1997-1397-2017-10-3-385-395

16. R. Virts, A. Papin, and M. Tokareva, “Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium,” J. Phys. Conf. Ser., 012041 (2020). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1666/1/012041

17. M. A. Tokareva and A. A. Papin, “Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium,” J. Appl. Ind. Math. **13** (2), 350–362 (2019). https://doi.org/10.1134/S1990478919020169

18. C. Morency and J. Tromp, “Spectral-element simulations of wave propagation in porous media,” Geophys. J. Int. **175** (1), 301–345 (2008).

19. Z. Chengwei, P. Chong, W.Wei, and W. Chun, “A multi-layer SPH method for generic water-soil dynamic coupling problems. Part I: Revisit, theory, and validation,” Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **396**, 115106 (2022). https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115106

20. O. B. Bocharov, V. Ya. Rudyak, and A. V. Seryakov, “The simplest models of deformation of a poroelastic medium saturated with fluids,” Fiz.-Tekh. Probl. Razrab. Polezn. Iskop. (2), 54–68 (2014) [in Russian].

21. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].

22. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].