СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 2. С. 43–65

УДК 519.862

ПРОБЛЕМА ВЕРИФИКАЦИИ ТЕОРИИ РЫНОЧНОГО СПРОСА

© 2024 В. К. Горбунов[1a], А. Г. Львов[2b]

[1] *Ульяновский государственный университет,*
ул. Льва Толстого, 42, г. Ульяновск 432017, Россия,
[2] *ООО Уайт Партнерс,*
ул. Таганская, 17–23, г. Москва 109147, Россия

E-mails: [a]vkgorbunov@mail.ru, [b]aglvov@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2023 г.; после доработки 24.04.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

Цель данной статьи — познакомить прикладных математиков, интересующихся возможностями приложений методов решения обратных задач математического моделирования проблем естествознания и техники к экономике, с нашими работами по проблеме верификации теории рыночного (коллективного) спроса, разработанной первым автором на основе пересмотра в рамках общенаучной методологии нереалистичной аксиоматической теории индивидуального спроса — базовой для современной неоклассической экономической теории. При этом искусственный объект индивидуалистической теории — рациональный и независимый индивид, максимизирующий свою функцию полезности, заменён «статистическим ансамблем потребителей» исследуемого рынка, и постулаты индивидуалистической теории стали научными гипотезами теории рыночного спроса. Верификация новой теории заключается в выяснении вопроса о рационализируемости статистического рыночного спроса коллективной функцией полезности. Эта проблема относится к обратным задачам математических теорий реальных явлений, которые обычно некорректно поставлены и решаются неоднозначно с привлечением дополнительной информации об искомом решении. Наш метод верификации теории рыночного спроса является развитием непараметрического анализа потребительского (индивидуального) спроса Африата—Вэриана с использованием для регуляризации «экономических индексов» спроса, что позволяет получать решения с различными содержательными свойствами.

Ключевые слова: холистическая теория рыночного спроса, методологические вопросы, обратная задача, экономические индексы.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.204

ВВЕДЕНИЕ

Современная неоклассическая экономическая теория (Economics), составляющая основу экономического образования и исследований в большинстве стран мира, содержит нереалистичную математическую теорию индивидуального спроса (ТИС) на многопродуктовых потребительских рынках, но не содержит реалистичной теории рыночного спроса (ТРС), которая представляла бы реальный интерес для экономистов и правительств [1, 2]. Следствием этого провала является отсутствие обоснованных методов анализа рыночного спроса, в частности, расчёта экономических (аналитических) индексов цен и количеств потребления, отражающих потребительские предпочтения населения, вместо множества формульных индексов, не имеющих общепринятых теоретических обоснований и дающих различные оценки динамики рынков [3]. Экономический подход к проблеме индексных чисел был предложен советским экономистом А. А. Конюсом [4] и получил широкое развитие в западных исследованиях (см. обзоры П. Самуэльсона и С. Свэми [5] и В. Э. Диверта [6]), но пока он относится только к индивидам/домохозяйствам.

Второе фундаментальное следствие отсутствия признанной экономическим мэйнстримом ТРС — отсутствие в Economics теории экономического равновесия, которая определяла бы цены, эффективные для реальных экономик, что повысило бы обоснованность формирования экономической политики, внутренней и внешней, соответствующей национальным интересам. Признанная мэйнстримом теория общего равновесия [1], гл. 17, основана на известной статье К. Эрроу и Ж. Дебре [7], где стороной спроса является совокупность индивидуальных потребностей, соответствующих ТИС. Многими авторами установлено, что такое представление о реальной экономике является *«путешествием по неверной дороге»* [1, 8], разд. 17E.

Нерешённость основных проблем экономической теории и практики породила в последние три десятилетия множество критических работ о состоянии экономической науки и её методологии. Здесь мы ограничимся статьями Алана Кирмана [8–10] и работами двух авторитетных критиков Economics. Во-первых, это Джеффри Ходжсон, чья книга [11] содержит глубокий критический анализ методологии Economics — *методологического индивидуализма*, сущность которого и его влияние на экономические исследования и политику лаконично выразил Кеннет Эрроу: *«Краеугольным камнем общепринятой экономической теории является требование объяснять все явления в терминах действий и реакций отдельных людей. Наше поведение при оценке экономических исследований, при рецензировании статей и результатов исследований, а также при их продвижении, включает критерий, согласно которому объясняемое нами поведение и предлагаемая нами политика объяснимы в терминах индивидов, а не других социальных категорий»*. [12], стр. 1.

Второй критик — Морис Алле, который в своей Нобелевской лекции [13], стр. 13–14, проанализировал, в частности, причины трудностей в признании и распространении новых прогрессивных идей из-за *«тирании господствующих доктрин»*, порождённой *«истеблишментом»*. Алле, по образованию инженер и физик, считал естественным использовать *научную методологию*[1] в экономических исследованиях, понимая при этом, что в силу специфики экономических объектов это не всегда возможно. Он понимал, что экономические учения не станут в полной мере похожими на естественные науки, потому что их «исходный материал» тесно связан с экономическими интересами и идеологиями [14], стр. 28. Но при этом существуют объективные законы коллективного человеческого поведения, и эти законы выявляются объективным научным анализом.

Отметим также учебник известных методологов Марселя Баумана и Джона Дэвиса [15], описывающий историю, основные принципы и факты становления методологии экономической теории, *понимаемой как наука.*

Неоклассический подход к экономической теории, основанный на строгой формализации и использовании математики, был заложен в 1870-х Уильямом Стэнли Джевонсом (1835–1882) и Леоном Вальрасом (1834–1910). Они фактически заложили (каждый по-своему) основы программы «Экономика как Наука», создав математические модели индивидуального потребительского спроса в своих классических книгах [16] и [17] соответственно. Вальрас также заложил основы теории экономического равновесия. Но программа пересмотра основных экономических теорий наподобие естественных, уже в конце 19 в. встретила жёсткое сопротивление со стороны большинства исследователей-экономистов, и это сопротивление продолжается. Глубокому анализу этого сопротивления посвящено эссе Клода Хилингера [18].

Противники «онаучивания (scientization)» экономической теории объясняют свою позицию существенными различиями в природных и социальных явлениях и отрицают легитимность (естественно)научного подхода к экономическим проблемам. Однако Естественные Науки и Социальные Науки являются Науками, поэтому в их определениях и методологии должна быть общность, согласующаяся с коренным понятием «Наука».

[1] Западная классификация наук относит дисциплину-экономику к социальным/гуманитарным наукам отдельно от естественных наук/(Science по умолчанию).

Под Наукой мы понимаем систему *нетривиальных знаний, обоснованных логически и эмпирически, о некоторой системе реальных объектов*. Сущность принципов *научного исследования/научной методологии* заключается в *объективности, доказательности выдвигаемых теорий и проверяемости их выводов фактами (верификации)*. В рамках этой методологии можно исследовать многие экономические явления. Однако мы не знаем конструктивного научного решения другими авторами проблем экономической теории, отмеченных выше.

Реалистическая ТРС создана в книгах первого автора [19,20] как пересмотр ТИС в рамках научной методологии. Кроме того, в статьях [21–23] мы разработали метод верификации ТРС на основе непараметрического анализа (индивидуального) спроса Африата-Вэриана [24–26].

Задача верификации математической теории является обратной задачей этой теории, проверяющей совпадение теоретических расчётов с данными измерений/наблюдений соответствующих характеристик исследуемого объекта. В нашем случае ключевой проблемой непараметрического анализа является решение *неравенств Африата*, определяющих значения функции полезности, рационализирующей статистический спрос, т. е. цены и количества реализованных товаров и услуг (благ) на некотором временном промежутке. Из-за неизбежных ошибок в данных такая задача, как правило, некорректно поставлена и в случае совместности неравенств имеет множество решений, возможно неустойчивое относительно исходных данных.

Решение некорректных задач заключается в их регуляризации с привлечением дополнительной информации об искомом решении и, если есть, о погрешностях исходных данных. Данные о погрешностях позволяют использовать методы регуляризации класса невязок А. Н. Тихонова и др. [27]. Однако для рыночных статистик характерно отсутствие оценок погрешностей исходных данных. В этом случае регуляризация некорректной задачи может быть обеспечена некоторым сочетанием малого возмущения уравнений и/или неравенств математической модели исследуемого объекта, обеспечивающего их регулярность (совместность и устойчивость множества решений), и введения критерия отбора, реализующего дополнительные условия. Для обратной задачи ТРС оказалось продуктивным использование аналитических индексов цен и количеств рыночных продаж вместе с наиболее обоснованными формульными индексами Фишера. Основой наших методов регуляризации являются релаксационно-штрафной метод решения вырожденных экстремальных задач [28] и методы регуляризации вырожденных уравнений и неравенств с параметризованными данными [29, 30].

Статья организована следующим образом. В разделе 1 анализируется микроэкономическая проблема теории спроса и «теоремы о невозможности» У. Гормана и П. Самуэльсона. В разделе 2 представлены содержательные и формальные основы *холистической (целостной)* теории рыночного спроса и аналитических индексов. В разделе 3 кратко обсуждается эвристический параметрический метод анализа рыночного спроса Р. Стоуна и Э. Дитона и представлен наш метод непараметрической верификации. Ввиду ограничения размера статьи мы ограничиваемся в основном вариантом метода в предположении гомотетичности потребительских предпочтений, и в разделе 4 приведён пример реализации нашего метода для этого случая. Раздел 5 — заключение.

1. МОДЕЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНОГО СПРОСА И ПРОБЛЕМА АГРЕГИРОВАНИЯ

1.1. Модель индивидуального потребительского спроса

Современная математическая ТИС базируется на моделях рационального потребительского выбора Джевонса [16] и Вальраса [17], которые независимо переоткрыли аналогичный принцип Германа Госсена (1810–1858) для общей задачи получения максимального удовлетворения при ограниченных ресурсах, которая была недооценена его современниками и забыта.

Рассмотрим эту модель для рынка n благ, количества которых представлены вектором x неотрицательного ортанта евклидова пространства E^n_+, а цены — вектором $p \in E^{n*}_+$. Для дальнейшего рассмотрения проблемы рыночного (коллективного) спроса отметим характеристики индивидуального потребителя/домохозяйства индексом h. Каждый индивид имеет бюджет w_h и потребительские предпочтения, представленные *порядковой функцией полезности* $u_h\colon E^n_+ \to R_+$ [1][2], разд. 3.C и 3.D.

Согласно Джевонсу и Вальрасу, *рациональность h-потребителя* понимается как максимизация функции полезности на множестве благ, доступных ему при данных ценах p и бюджете w_h. Аналитическая теория спроса выводится из предположений о регулярности, когда функция полезности считается дважды дифференцируемой, возрастающей и строго квазивогнутой. Условия регулярности обеспечивают однозначность и дифференцируемость функции спроса

$$x^h\left(p, w_h\right) = \arg\max\left\{u_h(x) : \langle p, x\rangle \leqslant w_h, x \geqslant 0\right\}. \tag{1}$$

Запись (1) является моделью индивидуального потребительского спроса, и означает, что *функция полезности $u_h(\cdot)$ рационализирует спрос $x^h(\cdot,\cdot)$*. Эта модель означает, что каждый индивид знает все цены рынка и способен решать задачи определения своей функции полезности и максимизации этой функции на множестве благ, доступных по данным ценам, поглощая весь бюджет. Но эти предположения очевидно далеки от реальности и модель (1) должна рассматриваться как схоластический постулат (догма) теории искусственной экономики. Однако живучесть этой теории стимулирует дополнительную формальную аргументацию её непригодности для научного познания и экономической практики.

1.2. Агрегирование потребителей

В первой половине 20-го века многие экономисты-теоретики считали, что рыночный спрос может быть определён с помощью модели, подобной (1). Проверка этой гипотезы в рамках методологического индивидуализма заключается в следующем. Эта методология диктует, что рыночный спрос формируется заданным набором индивидов H как сумма их спросов (1):

$$\overset{\frown}{x}\ (p, w_1, \ldots, w_H) = \sum_{h=1}^{H} x^h(p, w_h). \tag{2}$$

Распределение бюджета между потребителями $\{w_1, \ldots, w_H\}$ неизвестно, и задача состоит в том, чтобы найти условия на индивидуальные предпочтения, при которых существует коллективная *функция полезности* $u(\cdot)$, рационализирующая аддитивный рыночный спрос (2) в зависимости от цен p и совокупного бюджета $w = w_1 + \ldots + w_H$. Это означает, что аддитивный спрос (2) может быть представлен *холистической моделью* класса (1):

$$x(p, w) \triangleq \arg\max\left\{u(x) : \langle p, x\rangle \leqslant w, x \geqslant 0\right\}. \tag{3}$$

В 1953 г. Уильям Горман [31] опубликовал результат: *равенство спросов — аддитивного* (2) *и коллективного* (3) *имеет место тогда и только тогда, когда все индивидуальные траектории Энгеля* $E^h\left(p\right) = \left\{x = x^h(p, w_h) : w_h \geqslant 0\right\}$ *являются параллельными прямыми.* Это выражается аналитически *формой Гормана* — функциями спроса, аффинными относительно бюджета

$$x^h_i(p, w_h) = a^h_i(p) + b_i(p) w_h, \quad i = \overline{1, n}, \quad h = \overline{1, H}. \tag{4}$$

Общность коэффициента $b_i(p)$ для всех потребителей означает их одинаковую реакцию относительно дополнительных покупок по мере увеличения их бюджета! Суммирование равенств (4) по h даёт аналогичную аффинную структуру рыночного спроса (3):

$$x_i(p, w) = a_i(p) + b_i(p) w, \quad \text{где} \quad a_i(p) = \sum_{h=1}^{H} a^h_i(p). \tag{5}$$

---

[2]Джевонс и Вальрас предполагали, что полезность поддаётся измерению, соответственно, функция полезности была кардинальной.

Результат Гормана не учитывает, что если все бюджеты $w_h = 0$, то $x^h(p, 0) = 0$. В этом случае все траектории Энгеля начинаются от центра координат и, благодаря своей параллельности, сливаются в один луч! Анализируя результат Гормана, Пол Самуэльсон [32] отметил это. Следствием уточнения Самуэльсона является то, что в формулах (4) и (5) коэффициенты $a_i^h(p) = a_i(p) = 0$, $i = \overline{1,n}$, $h = \overline{1,H}$, т. е. *все функции спроса — индивидуальные* (1) *и рыночная* (3) *однородны относительно бюджетов и имеют одинаковую ценовую структуру*:

$$x^h(p, w_h) = x(p)w_h, \quad h = \overline{1,H}, \quad x(p,w) = x(p)w. \tag{6}$$

В терминах предпочтений, равенство (6) означает, что *все индивидуальные предпочтения одинаковы и гомотетичны*[3]*!* Ввиду нереальности этого вывода логическим следствием «теорем о невозможности» Гормана—Самуэльсона является то, что модели класса (1) в общем случае не могут быть использованы для формализации как индивидуального, так и коллективного рыночного поведения потребителей. Самуэльсон необоснованно разрешил эту дилемму в пользу нереалистичной индивидуалистической модели (1), отрицая экономическую легитимность модели (3) для рыночного спроса. И современная Economics приняла этот вывод как постулат.

Отметим, что нереалистичное условие Гормана «агрегирования потребителей» является также условием существования *репрезентативного потребителя* [1], разд. 4.D, что формально подтверждает вербальные аргументы Кирмана [9], стр. 119, о том, что *«репрезентативный агент заслуживает достойного погребения, как подход к экономическому анализу, который является не только примитивным, но и в корне ошибочным»*.

2. ХОЛИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЫНОЧНОГО СПРОСА

2.1. Основы научной холистической теории рыночного спроса

2.1.1. Объект теории.

Реалистическая ТРС представлена в книгах [19, 20] первого автора как пересмотр микроэкономической ТИС в рамках научной методологии, основными принципами которой являются: *объективность, доказательность, верификация.* ТРС формально повторяет ТИС, но с заменой искусственного объекта — рационального и независимого индивида — на реальный рынок, представленный в виде целостного объекта *торговой статистикой цен и суммарных количеств продаж*:

$$\left\{p^t, x^t : t = \overline{0,T}\right\}, \quad e_t = \left\langle p^t, x^t \right\rangle. \tag{7}$$

В отличие от микроэкономической ТИС, в представляемой ТРС нет предположений о том, что люди являются рациональными и независимыми агентами экономики, знающими всё о рыночных ценах и благах. Чтобы заменить этот нереалистичный объект исследования реальным, уместно определить изменчивую совокупность покупателей рынка в терминах теории нечётких множеств Лотфи Заде [33].

Понятие *«нечёткое множество»* отражает ситуацию, когда некоторые элементы данного *«универсального множества»* U можно рассматривать как элементы, принадлежащие некоторому подмножеству $C \subseteq U$, возможно, не полностью, но в некоторой степени, определяемой *функцией принадлежности* $\mu_C\colon U \to [0,1]$.

В нашем случае U — это множество потенциальных покупателей исследуемого рынка (например, население региона), нечёткое подмножество C множества U состоит из тех людей, которые совершили покупку на рынке за время его наблюдения, и для каждого человека

[3]Потребительские предпочтения *гомотетичны*, если эквивалентность двух наборов благ x и y ($x \sim y$) сохраняется при масштабировании, т. е. $\alpha x \sim \alpha y$ при всех $\alpha > 0$. Известно, что это свойство предпочтений эквивалентно структуре регулярного спроса $x(p,w) = x(p)w$ [17], стр. 141–143.

$u \in U$ его степень принадлежности $\mu_C(u)$ равна доле его расходов на этом рынке от всех его рыночных расходов. Нечёткое множество C называется *«Статистическим ансамблем потребителей» (САП).*

Понятие САП является лишь концептуальным и не наблюдаемым для реальных рынков, как и индивидуальные функции полезности. Оно представляет структуру реального рынка, в отличие от ТИС, представляющей рынок фиксированным набором заданного числа потребителей.

2.1.2. Математическая модель.

Следующие основы ТРС являются предположениями, которые являются не постулатами ТИС, а *гипотезами*, подлежащими проверке:

- *На исследуемом рынке наблюдается статистическая стабильность в отношении зависимости количеств продаж благ от цен на них и совокупных расходов всех потребителей на рынке*;

- *Большинство людей хотят быть рациональными, эти желания определяют доминирующее поведение потребителей на рынке, и САП является носителем отношений коллективных предпочтений, которые могут быть восстановлены с помощью торговой статистики.*

Третьей основой является *гипотетическая холистическая модель рыночного спроса*, представляющая собой гипотезу Госсена—Джевонса—Вальраса *о рациональном потребительском выборе как*

- *максимизация коллективной функции полезности $u(\cdot)$, которая предполагается неубывающей, ненасыщаемой*[4] *и квазивогнутой, на множестве благ, достижимых при данных ценах p и совокупных затратах e всех потребителей на рынке*:

$$D\left(p,e\right) = \arg\max\left\{u(x) : \langle p,x\rangle \leqslant e, x \geqslant 0\right\}. \tag{8}$$

В регулярном случае, когда функция полезности является *дважды дифференцируемой*, *возрастающей* и *строго квазивогнутой*, *соответствие рыночного спроса* $D(\cdot,\cdot)\colon E_+^{n+1} \to 2^{E_+^n}$, становится *однозначной и непрерывно дифференцируемой функцией рыночного спроса* $x(\cdot,\cdot)\colon E_+^{n+1} \to E_+^n$, *и общая модель ТРС* (8) становится *регулярной моделью*

$$x(p,e) = arg\max\left\{u(x) : \langle p,x\rangle \leqslant e, x \geqslant 0\right\}. \tag{9}$$

Вся формальная ТИС [1], гл. 3, переносится на холистическую ТРС, выведенную из моделей (8) и (9). Здесь мы приводим два теоретических факта, используемых в дальнейшем при описании методов верификации ТРС.

Во-первых, это так называемые *условия интегрируемости* [1], разд. 3.Н, которые представляют критерий того, что дифференцируемая функция спецификации $x(\cdot,\cdot)\colon E_+^{n+1} \to E_+^n$ является функцией спроса (9), порождённой некоторой (в общем случае неизвестной) регулярной функцией полезности $u(\cdot)$:

- *однородность нулевой степени*, т. е. $x(\alpha p, \alpha e) = x(p,e)$, $\forall \alpha > 0$;

- *расходное тождество* (закон Вальраса) $\langle p, x(p,e)\rangle = e$;

- *отрицательная полуопределенность и симметричность матрицы Слуцкого*

$$S_{ij}(p,e) = \frac{\partial x_i(p,e)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,e)}{\partial e} x_j(p,e), \quad i,j = \overline{1,n}.$$

[4]Неубывающая функция $u(\cdot)$ называется ненасыщаемой, если в любой окрестности точки $x \in E_+^n$ существует такая точка $x' \in E_+^n$, что $u(x') > u(x)$.

Условия интегрируемости используются в параметрическом методе верификации Ричарда Стоуна [34].

Второй факт представляет собой *двойственную* (или *взаимную*) *задачу* по отношению к исходной проблеме (8):

$$e(p,c) = \min\left\{\langle p,x\rangle : u(x) \geqslant c, x \geqslant 0\right\}. \tag{10}$$

Величина $e(p,c)$ определяет минимальные затраты при ценах p, обеспечивающие данный уровень потребления c, и называется *функцией расходов*. Эта функция вогнута по отношению к ценам p, что обеспечивает свойство отрицательной полуопределенности матрицы Слуцкого. Кроме того, через функцию расходов определяются аналитические индексы рыночного спроса, представленные ниже и используемые в непараметрическом варианте метода верификации.

2.1.3. Гомотетические предпочтения.

Этот случай важен для нашего метода верификации. Известно [1], стр. 50, что *предпочтения потребителя являются гомотетическими тогда и только тогда, когда они допускают представление через линейно однородную функцию полезности* $u(\cdot)$ (т. е. такую, что $u(\alpha x) = \alpha u(x)$ для любого $\alpha > 0$). В этом случае спрос имеет структуру $x\,(p,e) = x\,(p)\,e$, множитель Лагранжа задачи (8) не зависит от затрат e, т. е. $\lambda\,(p,e) \equiv \lambda\,(p) = u\,(x(p))$ [20], стр. 141–143, и выполняется тождество (факторизация Шепарда) [5], стр. 570:

$$e(p,u(x)) = \frac{u(x)}{\lambda(p)}, \quad p > 0, \quad x > 0. \tag{11}$$

Гомотетичность — это нереалистичное свойство предпочтений для детализированных многопродуктовых рынков. Самуэльсон и С. Свэми подчеркнули это [5], стр. 592, и назвали *предположение о гомотетичности «гипотезой Санта—Клауса»*, дарящего исследователю красоту, богатство и упрощение соответствующих теорий и методов решения задач. Но гипотеза гомотетичности часто не отвергается при верификации модели (8) с использованием агрегированных данных (7). Естественно рассматривать это как следствие грубости модели (8) и недостаточности конечного числа данных для единственного построения *истинной функции полезности* (если такая функция существует). Соответственно, на первом этапе решения обратной задачи полезно принять гипотезу гомотетичности, чтобы использовать решение простой задачи как хорошее приближение к решению более сложного негомотетического случая. Это упрощение можно понимать как аналог линеаризации нелинейных процессов в естественных науках. Во многих случаях этого может быть достаточно для анализа заданной торговой статистики.

2.2. Аналитические индексы

2.2.1. Индексы Фишера.

Существует множество подходов к построению индексов спроса [3], которые дают разные результаты оценки ситуации на потребительских рынках, и нет единого мнения о том, какой индекс является «лучшим». В нашем методе решения обратной задачи ТРС в качестве дополнительной информации используются аналитические индексы цен и количеств, более известные как экономические индексы [3–6]. Эти индексы определяются в рамках теории спроса и отражают потребительские предпочтения населения, значит, они имеют теоретический базис и являются объективными. Однако, из-за отсутствия в Economics теории рыночного спроса эти индексы относятся к индивидам, и до настоящего времени органы статистики используют в основном бинарные индексы, определяемые по различным формулам по статистическим парам «цены-количества» продаж в двух сравниваемых периодах — базовом (p^s,x^s) и текущем (p^t,x^t). Наиболее распространёнными на практике являются формульные индексы цен и количеств Э. Ласпейреса и Г. Пааше, соответственно:

$$P^L_{\mathrm{st}} = \frac{\langle p^t,x^s\rangle}{\langle p^s,x^s\rangle}, \quad Q^L_{st} = \frac{\langle p^s,x^t\rangle}{\langle p^s,x^s\rangle} \quad \text{и} \quad P^P_{st} = \frac{\langle p^t,x^t\rangle}{\langle p^s,x^t\rangle}, \quad Q^P_{st} = \frac{\langle p^t,x^t\rangle}{\langle p^t,x^s\rangle}. \tag{12}$$

Индексы Пааше часто дают заниженные значения относительно индексов Ласпейреса:

$$P_{st}^P \leqslant P_{st}^L, \quad Q_{st}^P \leqslant Q_{st}^L. \tag{13}$$

Этот эффект назван эффектом Гершенкрона в честь американского статистика А. Гершенкрона. В случае гомотетических предпочтений этот эффект является обязательным [20], стр. 201.

В нашем методе верификации используются средние геометрические индексов Ласпейреса и Пааше (12), называемые индексами Фишера:

$$P_{st}^F = \sqrt{P_{st}^L P_{st}^P} = \sqrt{\frac{\langle p^t, x^s\rangle}{\langle p^s, x^s\rangle}\frac{\langle p^t, x^t\rangle}{\langle p^s, x^t\rangle}}, \quad Q_{st}^F = \sqrt{Q_{st}^L Q_{st}^P} = \sqrt{\frac{\langle p^s, x^t\rangle}{\langle p^s, x^s\rangle}\frac{\langle p^t, x^t\rangle}{\langle p^t, x^s\rangle}}. \tag{14}$$

Эти индексы являются наилучшими с точки зрения практической индексологии по отношению к критериям Фишера [3], гл. 16, и могут использоваться в качестве ориентиров для построения аналитических индексов в процедуре верификации ТРС.

2.2.2. Индексы Конюса—Фишера.

Общее определение аналитических (экономических [5]) индексов выглядит следующим образом:

$$P(p^t, p^s; x) = \frac{e(p^t, u(x))}{e(p^s, u(x))}, \quad Q(x^t, x^s; p) = \frac{e(p, u(x^t))}{e(p, u(x^s))}. \tag{15}$$

Здесь векторы количеств x и цен p являются *ситуациями сравнения.*

Для приложений ситуации сравнения в (15) должны быть заданы. Пары индексов $\Big(P_{st}^{KL} \triangleq P(p^t, p^s; x^s),\ Q_{st}^{KL} \triangleq Q(x^t, x^s; p^s)\Big)$ и $\Big(P_{st}^{KP} \triangleq P(p^t, p^s; x^t),\ Q_{st}^{KP} \triangleq Q(x^t, x^s; p^t)\Big)$ называются индексами цен и количеств *Конюса—Ласпейреса* и *Конюса—Пааше* соответственно. Для верификации ТРС используются индексы *Конюса—Фишера* (KF) $P_{st}^{KF} \triangleq (P_{st}^{KL} P_{st}^{KP})^{1/2}$ и $Q_{st}^{KF} \triangleq (Q_{st}^{KL} Q_{st}^{KP})^{1/2}$. Согласно определениям (15), равенству $e(p^s, u(x^s)) = e_s$ и обозначению $u(x^s) = u_s$,

$$P_{st}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^t, u_s)e_t}{e_s e(p^s, u_t)}}, \quad Q_{st}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^s, u_t)e_t}{e_s e(p^t, u_s)}}. \tag{16}$$

Таким образом, вычисление пары индексов (16) сводится к двум задачам (10) с параметрами (p^t, u_s) и (p^s, u_t).

2.2.3. Инвариантные индексы.

В случае гомотетических предпочтений аналитические индексы упрощаются. Используя факторизацию Шепарда (11) и обозначение $\lambda(p^s) = \lambda_s$, получаем из (15) формулы

$$P(p^t, p^s) \equiv P_{st} = \frac{\lambda_s}{\lambda_t}, \quad Q(x^t, x^s) \equiv Q_{st} = \frac{u_t}{u_s}\,, \quad t = \overline{0, T}. \tag{17}$$

Эти индексы удовлетворяют всем критериям Фишера [3], стр. 571–575, и являются идеальными. Как сказано в п. 2.1.3, гомотетический случай является упрощающей идеализацией действительности, но во многих случаях это предположение не отвергается, и инвариантные индексы (17) могут быть использованы как в качестве окончательной оценки экономической динамики (7), так и в качестве начального приближения при расчёте более реалистичных общих индексов Фишера (16).

3. ВЕРИФИКАЦИЯ ТРС

Коллективная функция полезности $u(\cdot)$ называется *рационализирующей торговую статистику* (7), если соответствующий спрос (8) аппроксимирует эту статистику, т. е. $x(p^t, e_t) \simeq x^t,\ t = \overline{0, T}$. Приближённость этих равенств объясняется неизбежностью ошибок, возникающих в процессе формирования данных (7) путём агрегирования и усреднения групп товаров, сходных по потребительским свойствам (яблоки, фрукты, продукты питания) [3], гл. 9. Общепринятых методов агрегирования и оценок соответствующих ошибок не существует.

Верификация ТРС по статистике (7) заключается в проверке возможности рационализации (7) функцией полезности в некотором классе. Конструктивная верификация состоит в построении такой функции или, в предположении регулярности, интегрируемых функций спроса по конечному множеству данных (7), т. е. в решении обратной задачи ТРС, которая, как правило, некорректна и требует регуляризации путём привлечения дополнительной информации об искомом решении.

3.1. Параметрический метод

3.1.1. Анализ спроса Стоуна.

Параметрический метод конструктивной верификации ТРС, заключающийся в построении функций рыночного спроса интегрируемого класса по торговой статистике (7), был впервые разработан Ричардом Стоуном и применён к реальной британской статистике 1920–1938 годов (для шести групп товаров) [34] в наивный период теории спроса до открытия «теоремы о невозможности» Гормана, и Стоун эвристически наложил на модельные функции *рыночного спроса* «условия интегрируемости», разработанные в рамках регулярной ТИС.

В наших нотациях параметрический *«анализ спроса»* Стоуна состоит в построении интегрируемой функции рыночного спроса $x_i(p, e; w)$, $i = \overline{1, n}$, где $w = (w_1, \ldots, w_k)$ — вектор параметров из допустимого множества W. В этом случае возникает стандартная задача оценки параметров w, исходя из условия наилучшего, в некотором смысле, совпадения значений спроса модели со статистическими данными (7):

$$x\left(p^t, e_t; w\right) \simeq x^t, \quad t = \overline{0, T}. \tag{18}$$

Из-за отсутствия надёжной вероятностной информации о статистических ошибках данных (7) обоснованное применение традиционных статистических методов для выбора «хорошей» системы функций спроса исключается, но может быть использован нелинейный метод наименьших квадратов (МНК), т. е. минимизация функции

$$\varphi(w) = \frac{1}{n(T+1)} \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i\left(p^t, e_t; w\right) - x_i^t}{x_i^t} \right)^2 \tag{19}$$

при условии $w \in W$. Минимальное значение (19) на множестве W является *показателем качества аппроксимации* системы (18) — чем меньше это значение, тем выше качество аппроксимации. Вопрос о рационализации статистики (7) решается здесь на основе некоторого верхнего значения показателя качества, которое может быть установлено экспертами-статистиками. Если это значение превышено, то гипотеза рационализируемости не принимается для использованного класса функций спроса.

Стоун использовал один из простейших классов интегрируемых функций спроса (п. 2.1.2), названных им *линейными системами расходов (linear expenditure systems)*[5]:

$$x_i(p, e) = \frac{\alpha_i}{p_i} \left[e - \sum_{i=1}^{n} \gamma_k p_k \right] + \gamma_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{20}$$

[5]Системе функций спроса (20) соответствует система *линейных функций расходов* $e_i(p, e) = \langle p_i, x_i(p, e) \rangle$. Эти функции спроса введенны Л. Клейном и Х. Рубином [35] без явного использования регулярной модели спроса (9), но как функции спроса, удовлетворяющие условиям интегрируемости. Р. Джири показал [36], что функции спроса (20) рационализируются функцией полезности $u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \gamma_i)^{\alpha_i}$, $0 < \alpha_i < 1$, $0 \leqslant \gamma_i$, названной позже функцией Джири—Стоуна.

Что касается проблемы обычной некорректности обратных задач, то заметим, что задача МНК (19) при условии $w \in W$ может быть вычислительно устойчивой из-за строгих ограничений, неявно накладываемых на параметрический класс функций спроса условиями интегрируемости. Можно сказать, что введение условий интегрируемости в задачу МНК является аналогом сокращения множества искомых функций в *методах подбора и квазирешений* некорректно поставленных задач [27], гл. I. Стоун использовал простой класс функции спроса (20), и его результаты были успешны и высоко оценены (премия имени Нобеля 1984). Для более гибких классов минимум функционала (19) на W должен быть меньше. Однако это достигается за счёт увеличения числа параметров k, и в этом случае вычислительная обусловленность задачи МНК может быть хуже.

3.1.2. Современный анализ спроса.

Анализ спроса Стоуна был разработан его последователями, уже принимая во внимание результат «невозможности» Гормана. Было предложено несколько систем рыночного спроса, также эвристически, с введением на ненаблюдаемые и невычисляемые индивидуальные функции спроса условий «агрегации по потребителям» Гормана (4) или некоторого их ослабления, как это требует методология Economics. Наиболее известные работы в этой области были выполнены Энгусом Дитоном (учеником Стоуна и лауреатом премии имени Нобеля 2015) и Джоном Мюльбауэром [37–39]. Опуская более подробное изложение этих результатов, отметим, что требование соответствия методов анализа реальных рынков нереалистичной теории ТИС логически не обосновано, и это лишь снижает возможности метода Стоуна. Но даже при таком неоправданном усложнении *примеры эвристического анализа реального рыночного спроса Стоуном, Дитоном и их последователями являются примерами успешной верификации ТРС, созданной в рамках научной методологии.*

Параметрический метод верификации ТРС имеет фатальный недостаток, заключающийся в том, что вывод о нерационализируемости статистики (7) в любом конечном множестве параметрических классов интегрируемых функций спроса не означает, что эта статистика принципиально нерационализируема в других классах.

3.2. Непараметрический метод верификации

3.2.1. Теорема Африата, неравенства и функция.

Метод непараметрической верификации основан на непараметрическом подходе к анализу спроса, основные факты которого изложены в известной статье Сиднея Африата [24] и его разработке Холлом Вэрианом в [25, 26]. Африат представил несколько эквивалентных критериев рационализации статистики (7) при очень слабых ограничениях, допускающих нерегулярный спрос (8). Вэриан разработал для них вычислительные методы в [25]. Наш метод верификации, предложенный в первоначальном варианте в [19], основан на критерии *неравенств Африата*, который решает проблему рационализуемости статистики (7) в широком классе ненасыщаемых функций полезности. Мы приводим здесь теорему Африата из [25] частично — только те факты, которые используются в нашем методе.

Определение. Функция полезности $u(\cdot)$ *рационализирует данные* (7), если выполняются равенства [25], стр. 946:

$$u\left(x^t\right) = \max\left\{u\left(x\right) : \left\langle p^t, x\right\rangle \leqslant e_t, x \geqslant 0\right\}, \quad t = \overline{0,T}. \tag{21}$$

Введём *перекрёстные расходы* $e_{ts} = \left\langle p^t, x^s\right\rangle$, коэффициенты $a_{ts} = e_{ts} - e_t$, *числа Африата* $\{u_\tau, \lambda_\tau\}$, где $u_t = u(x^t)$, $\lambda_t \equiv \lambda(p^t, e_t)$ — множители Лагранжа экстремальных задач (21), и систему *неравенств Африата*

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \leqslant 0, \quad s, t = \overline{0,T} \wedge s \neq t. \tag{22}$$

Теорема. *Торговая статистика* (7) *рационализируется неубывающей ненасыщаемой функцией полезности тогда и только тогда, когда существует положительное решение системы неравенств* (22). *Если* $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{0,T}\}$ *— положительное решение этой системы, то функция*

$$\bar{u}(x) = \min_{\tau} \{u_\tau + \lambda_\tau \langle p^\tau, x - x^\tau \rangle\} \tag{23}$$

рационализирует данные (7).

Отметим, что определение рационализируемости данных (7) и теорема Африата предполагают отсутствие погрешностей в данных. Для анализа реальных данных учёт неизбежных ошибок в них необходим.

В цитируемых работах Африата и Вэриана кусочно-линейная вогнутая функция (23) играет лишь техническую роль в доказательстве теоремы. Но эта функция, именуемая в дальнейшем *функцией Африата*, сводит вычисление функции затрат (10), определяющей аналитические индексы (15) и (16), к задаче линейного программирования (ЛП):

$$e(p, w) = \min \left\{ \langle p, x \rangle : \langle p^0, x \rangle \geqslant w, \lambda_\tau \langle p^\tau, x \rangle \geqslant w - u_\tau + \lambda_\tau e_\tau, \tau = \overline{1,T}, x \geqslant 0 \right\}. \tag{24}$$

3.2.2. Гомотетические предпочтения.

Условия рационализируемости статистики (7) при дополнительном допущении *гомотетичности предпочтения* были исследованы Вэрианом в [26]. В этом и только в этом случае функция расхода представляется в виде факторизации Шепарда (11) [5], стр. 570. Подставляя в (11) статистические данные, получаем дискретный вариант этой характеристики гомотетичности предпочтений:

$$u_t = \lambda_t e_t, \quad t = \overline{0,T}. \tag{25}$$

Подстановка этих равенств в общие неравенства Африата (22) превращает последние в систему *гомотетических неравенств Африата*

$$u_s - \lambda_t e_{ts} \leqslant 0, \quad s, t = \overline{0,T} \wedge s \neq t, \tag{26}$$

и функция Африата (23) принимает вид $\hat{u}(x) = \min\limits_{\tau} \{\lambda_\tau \langle p^\tau, x \rangle\}$.

Задача вычисления $2(T+1)$ чисел Африата $\{u_t, \lambda_t\}$ упрощается за счёт использования равенств (25), которые разлагают систему гомотетических неравенств (26) на две операционально эквивалентные системы, каждая из которых определяет только одну часть $(T+1)$ чисел Африата — $\{\lambda_t\}$ или $\{u_t\}$. Далее используются только гомотетические λ-*неравенства Африата*:

$$\lambda_s e_s \leqslant \lambda_t e_{ts}, \quad s, t = \overline{0,T} \wedge s \neq t. \tag{27}$$

Решение системы (27) $\{\lambda_t\}$ определяет числа $\{u_t\}$ равенствами (25).

3.2.3. Известные методы решения неравенств Африата.

Вэриан разработал комбинаторные алгоритмы для решения неравенств Африата — общих (22) и гомотетических (27). Для последних он адаптировал известный алгоритм Варшалла, предназначенный для нахождения минимального стоимостного пути между вершинами связного графа (см. также [40]). Эти алгоритмы не адаптированы для учёта неизбежных ошибок данных, возможной некорректности и необходимости регуляризации соответствующих задач, позволяющей выбирать из множества решений регуляризованных систем неравенств решения с желаемыми свойствами.

Для общих неравенств Африата известны подходы линейного программирования. Диверт [41] предложил для обеспечения совместности системы (22) задачу ЛП — минимизировать сумму искусственных переменных (slack variables), аддитивно добавляемых к неравенствам (22). А. Флейссиг и Ж. Уитни [42] усовершенствовали этот подход, используя только одну аддитивную релаксационную переменную[6]. В обоих случаях, как и в методах Вэриана, определяется некоторое решение из множества решений системы неравенств. Кроме того, минимально возмущённые совместные системы неравенств неустойчивы (в метрике Хаусдорфа) и могут стать несовместными при малых вариациях их коэффициентов (подробнее в разд. 3.3).

В упомянутых и других известных нам работах других авторов проблема содержательных решений неравенств Африата и их возможной неустойчивости не рассматривалась. Наконец, все эти и другие авторы, работающие в рамках экономического мейнстрима, относят свои исследования к отдельному человеку и, похоже, не намерены развивать их для реальных рынков. К редким исключениям относится эвристическое применение алгоритма Вэриана к агрегированным рыночным данным в [25].

Принципиальная множественность решений неравенств Африата, их возможная несовместность и неустойчивость по отношению к вариациям коэффициентов e_{ts} или a_{ts}, определяемых неточными данными (7), означает, что задача решения этих неравенств некорректна и требуется её регуляризация.

3.3. Регуляризация неравенств Африата

3.3.1. О регуляризации систем неравенств.

В связи с отсутствием каких-либо оценок погрешностей исходных данных (7), регуляризация задачи решения систем неравенств Африата выполняется методами [28–30] с учётом явной параметризации данных и с использованием аппарата многозначных отображений, в частности, понятия *непрерывности по Хаусдорфу*[7].

Регуляризация задачи решения системы неравенств заключается в обеспечении *регулярности её множества решений* и введении критерия выбора из этого множества. Регулярность этого множества означает его *локальную хаусдорфову непрерывность* относительно исходных данных [30], стр. 424. Согласно лемме 1.4 из [43], *регулярность множества решений системы линейных неравенств обеспечивается её ограниченностью и строгой совместностью, т. е. совместностью соответствующей системы строгих неравенств*[8], что соответствует условию Слейтера о регулярности задач выпуклого программирования и выполнению некоторой априорной оценки $\lambda_t \leqslant C$ для общей системы. Регулярность систем неравенств Африата является одним из достаточных условий корректности их решения. Вторым достаточным условием является строгая выпуклость критерия выбора решения [29], стр. 579. В нашем методе верификации выбираются *экономически значимые* решения, и это делается с помощью аналитических индексов, определяемых этими решениями.

3.3.2. Редукция неравенств Африата.

Система общих неравенств Африата (22) имеет две степени свободы из-за алгебраической однородности и вхождения u-чисел в систему разностями $u_s - u_t$. Это позволяет накладывать на решения системы два «начальных» условия:

$$\lambda_0 = 1, \quad u_0 = e_0. \tag{28}$$

Подстановка условий (28) в (22) сводит эту систему однородных неравенств к неоднородной системе с переменными $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1,T}\}$:

$$\begin{gathered} e_0 - \lambda_t a_{t0} \leqslant u_t, \quad u_s \leqslant e_0 + a_{0s} \equiv e_{0s}, \\ u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \leqslant 0, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \neq t. \end{gathered} \tag{29}$$

[6]Аналогично релаксационно-штрафному методу Горбунова [28].

[7]Многозначное отображение $A(\cdot)$ из векторного пространства X в пространство Λ с метрикой $\rho(\cdot,\cdot)$ называется *непрерывным по Хаусдорфу* в точке x^0, если $h(A(x), A(x^0)) \to 0$ при $x \to x^0$, где $h(A,B) = \max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\}$, $\beta(A,B) = \sup\{\inf\{\rho(a,b) : b \in B\} : a \in A\}$, $A \subseteq \Lambda$ и $B \subseteq \Lambda$.

[8]Топологически это означает, что множество решений рассматриваемой системы неравенств является телесным.

Система (29) называется*общей редуцированной системой неравенств Африата.* Для решения задачи рационализации статистики (7) и построения рационализирующей функции (23) необходимо строго положительное решение (29). Но численный анализ не приспособлен к строгим неравенствам, и в дальнейшем мы принимаем по умолчанию неотрицательные условия $u_t \geqslant 0$, $\lambda_t \geqslant 0$, $t = \overline{1,T}$ системы (29) и её вариантов, которые возникнут ниже. Если эта система неотрицательно непротиворечива, то она имеет, в общем случае, выпуклое множество решений, которое является многогранником, возможно, вырожденным в точку. Второе неравенство в (29) означает ограниченность многогранника относительно u-чисел.

Рассмотрим случай *гомотетических предпочтений.* Подстановка условия $\lambda_0 = 1$ из (28) в алгебраически однородную λ-*систему* (27) сводит её к неоднородной *редуцированной* λ-*системе неравенств Африата*

$$e_0 \leqslant \lambda_t e_{t0}, \quad e_s \lambda_s \leqslant e_{0s}, \quad \lambda_s e_s \leqslant \lambda_t e_{ts}, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \neq t. \tag{30}$$

Первый и второй блоки системы (30) определяют двусторонние оценки возможных значений решений этой системы. Эти оценки и равенства (25) определяют также оценки u-чисел в предположении гомотетичности:

$$\frac{e_0}{e_{t0}} \leqslant \lambda_t \leqslant \frac{e_{0t}}{e_t}, \quad \frac{e_0 e_t}{e_{t0}} \leqslant u_t \leqslant e_{0t}, \quad t = \overline{1,T}. \tag{31}$$

Оценки (31) означают, что система (30) имеет выпуклое множество решений, которое является ограниченным многогранником, возможно вырожденным, в пространстве всех чисел Африата $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1,T}\}$. Далее ограничимся проблемой верификации ТРС с гипотезой гомотетичности предпочтений, с которой продуктивно начинать анализ реальной статистики (7).

3.3.3. Регуляризация.

Для постановки корректных задач для экономически значимых решений неравенств Африата, общей (29) или гомотетичной λ-*системе* (30), необходимо обеспечить их регулярность в соответствии с п. 3.3.1. Для этого достаточно проверить, является ли соответствующая система строго совместной. Проверка регулярности и регуляризация нерегулярной системы осуществляется двухэтапным вариантом релаксационно-штрафного метода [28] для неравенств Африата, разработанным в [21–23]. Первым этапом является регуляризация систем.

Ограничиваясь гипотезой гомотетичности, рассмотрим λ-*систему* (30). Для того, чтобы уточнить, является ли она регулярной, и, если регулярность отсутствует, регуляризовать её, вводится параметр аддитивной релаксации r в правую части системы. Для обеспечения независимости значения r по отношению к масштабу данных (7) и уменьшения ошибок вычислений, связанных с различными масштабами чисел Африата λ и u, неравенства перед релаксацией нормализуются так, чтобы все аддитивные члены и коэффициент перед r стали единичного порядка:

$$-\lambda_t \leqslant -\frac{e_0}{e_{t0}} + \frac{e_t}{e_{t0}} r, \quad \lambda_s \leqslant \frac{e_{0s}}{e_s} + r, \quad \lambda_s - \lambda_t \frac{e_{ts}}{e_s} \leqslant \sqrt{\frac{e_t}{e_s}} r, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \neq t. \tag{32}$$

Система неравенств (32), называемая далее *релаксированной нормированной* λ-*системой Африата*, очевидно, совместна при достаточно больших значениях параметра r, и её множество решений представляет собой выпуклый ограниченный многогранник. Вопросы непротиворечивости и регулярности исходной системы (30), а также адекватности модели (8) (при гомотетической гипотезе) рыночной статистике (7) решаются путём анализа *минимальной релаксации* в пространстве переменных $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_T, r\}$, обеспечивающей совместность неравенств (32):

$$r_\lambda = \arg\min \{r : \ (32), \lambda \geqslant 0\}. \tag{33}$$

Если величина $r_\lambda > 0$ настолько велика, что не может быть объяснена возможными ошибками в данных, то гипотеза адекватности модели (8) с гомотетичными предпочтениями, представляемыми линейно однородной функцией полезности $u(\cdot)$, должна быть отвергнута. Предположим, что $r_\lambda \leqslant 0$ или $r_\lambda > 0$ *несущественно*, так что это может быть объяснено погрешностями данных (7) и гипотеза гомотетичности предпочтений не отвергается.

Если $r_\lambda < 0$ *существенно*, то λ-система (30) регулярна и в нормированной системе (32) релаксация должна быть опущена, т. е. $r = 0$.

Предположим, что $r_\lambda \approx 0$ или $r_\lambda > 0$ несущественно. Система (32) с $r = r_\lambda$ совместна, но остаётся нерегулярной, так как соответствующая система строгих неравенств будет несовместной. Для гарантии регулярности системы (32) параметр релаксации r_λ должен быть увеличен на малую величину *сверхрелаксации* $\rho > 0$, так что полная релаксация r будет равна сумме

$$r_\lambda^\rho = r_\lambda + \rho. \tag{34}$$

Нечёткие понятия *существенно отрицательный/положительный*, *почти нулевой*, *малый* могут быть уточнены путём численного анализа влияния вариаций соответствующих величин на значения выходных показателей расчётов, вариации которых не должны превышать требуемой точности (обратная задача оценки допустимых погрешностей исходных данных). В рассматриваемой задаче расчётными выходными показателями являются инвариантные индексы (17). Общепринятый уровень точности представления индексов спроса составляет 0,001 (0,1%), поэтому сверхрелаксацию ρ можно считать малой, если вызванные ею возмущения в индексах (17), определяемых числами $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_T, u_1, \ldots, u_T\}$, не превышают 0,0005 (0,05%). Подробнее о выборе ρ см. [21], стр. 99–100.

Таким образом, задача верификации ТРС с гипотезой гомотетичности предпочтений может быть конструктивно решена путём решения нормализованной регулярной λ-*системы* (32) с релаксационным параметром (34), которую запишем компактно как

$$-\lambda_t e_{t0} \leqslant -e_0 + e_t r_\lambda^\rho, \quad \lambda_s e_s \leqslant e_{0s} + r_\lambda^\rho e_s, \quad \lambda_s e_s - \lambda_t e_{ts} \leqslant r_\lambda^\rho \sqrt{e_s e_t}, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \neq t. \tag{35}$$

Эта система и задача её решения значительно проще, чем аналогичная задача для общей системы (29), из-за вдвое меньшей размерности и ограниченности множества решений. Эту задачу полезно решать даже тогда, когда гипотеза гомотетичности отвергнута, но принята гипотеза адекватности модели (8) для общих предпочтений. При этом решение системы (35) будет хорошим начальным приближением для искомого решения более сложной регуляризованной общей системы Африата.

3.4. Содержательные задачи решения неравенств Африата

3.4.1. Общие замечания.

Формулировка содержательных задач для регулярных неравенств Африата — гомотетичной или её общего аналога (см. [21–23]) — основана на следующих соотношениях. Каждое решение $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_T, u_1, \ldots, u_T\}$ общей системы определяет функцию полезности Африата (23), которая, в свою очередь, определяет функцию расхода (24), а та, в свою очередь, определяет общие индексы Конюса (16). В гомотетическом случае индексы Конюса становятся инвариантными (17), определяемыми числами Африата непосредственно. Таким образом, экономический смысл решения неравенств Африата неявно проявляется через аналитические индексы, отражающие динамику рынка (7) с учётом потребительских предпочтений населения.

3.4.2. Содержательные задачи для λ-неравенства Африата.

После получения положительного качественного результата о рационализуемости статистики (7) в гомотетическом случае встаёт вопрос о выборе решения регуляризованной λ-системы Африата (35).

Аналитические (в нашем случае инвариантные) индексы спроса позволяют выбирать экономически содержательные решения со свойствами *оптимизма, пессимизма* и *объективности.* Мы ограничим эту задачу, используя только базовые индексы (17) с $s = 0$. Учитывая условия (28) и равенства (25), получаем

$$P_{0t} = \frac{1}{\lambda_t}, \quad Q_{0t} = \frac{u_t}{u_0} = \frac{\lambda_t e_t}{e_0}, \quad t = \overline{1,T}. \tag{36}$$

Чтобы показать *оптимистический* характер экономической динамики на рынке, представленном статистикой (7), квалифицированному аналитику желательно найти решение (35), определяющее низкие индексы цен P_{0t} и высокие количественные индексы Q_{0t}. Формулы (36) показывают, что индексы цен P_{0t} уменьшаются, а количественные индексы Q_{0t} одновременно увеличиваются с увеличением λ_t. Если аналитик хочет показать *пессимистичную* оценку динамики рынка, то он будет искать решение (35) с противоположными свойствами: высокими ценовыми индексами и низкими количественными индексами. Это достигаются за счёт уменьшения множителя λ_t.

Задача увеличения всех чисел $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_T\}$ является многокритериальной, и здесь мы упрощаем её для оптимистического и пессимистического вариантов, рассматривая только конечные показатели динамики P_{0T} и Q_{0T}. Соответственно, *оптимистической задачей* для λ-системы (35) является задача ЛП

$$\lambda_T^{Max} = \arg\max\{\lambda_T : \ (35)\}, \tag{37}$$

и *пессимистической задачей* решения (35) является задача ЛП

$$\lambda_T^{\min} = \arg\min\{\lambda_T : \ (35)\}. \tag{38}$$

В третьей, *объективной задачей*, выбор решения системы (35) ориентирован на близость соответствующих инвариантных индексов цен $\{P_{0t}\}$ к бинарным индексам цен Фишера $\{P_{0t}^F\}$ из (14), которые являются лучшими в классе формульных индексов [3], гл. 16.

Если составить сумму квадратов разностей $P_{0t} - P_{0t}^F = \lambda_t^{-1} - P_{0t}^F$, то получится невыпуклый критерий, который усложнит дальнейшую оптимизацию. Это усложнение преодолевается переходом к обратным индексам: инвариантным $P_{t0} = \lambda_t$ и Фишера P_{t0}^F. Таким образом, мера отклонения между этими обратными индексами цен становится квадратичной:

$$F(\lambda) = \sum_{t=1}^{T} \left(\lambda_t - P_{t0}^F\right)^2. \tag{39}$$

Соответственно, объективной задачей решения λ-системы (35) является задача квадратичного программирования.

$$F(\lambda^F) = \min\{F(\lambda) : \ (35)\}. \tag{40}$$

Для задачи (35) выполняются классические условия корректности из [26,27], приведённые в п. 3.3.1, а именно регулярность допустимого множества (35) и строгая выпуклость функционала (39). Решением задачи (40) является проекция «точки Фишера» $\left(P_{10}^F, \ldots, P_{T0}^F\right)$ на множество решений системы (35).

Задачи ЛП (37) и (38) с нестрого вогнутой или выпуклой целевой функцией соответственно, и теоретически такие ЛП могут быть вырождены, если вектор коэффициентов целевой функции $(0, \ldots, 0, 1)$ ортогонален границе допустимого многогранника, которая определяется активным множеством уравнений в вершине решения. Эта проблема может быть преодолена регуляризацией Тихонова с использованием функции (39) в качестве стабилизатора.

Полученные решения могут быть приняты как окончательные, если гипотеза гомотетичности не отвергнута, или как начальное приближение для решения более реалистичных задач для общих неравенств Африата, представленных в [21–23].

4. ПРИМЕР

В таблице 1 представлен искусственный набор данных из международного «Руководства по индексу потребительских цен» [3], гл. 19, использованный в расчётах множества (десятков) различных формульных индексов *«Для того чтобы читатель смог получить представление о том, насколько индексы цен могут отличаться друг от друга при использовании набора реальных данных...»* (стр. 439)[9]. Статистика по 6 потребительским товарам примерно соответствует опыту большинства промышленно развитых стран за период с 1973 по середину 1990-х годов. Таким образом, один период соответствует примерно пяти годам. Представлены следующие блага: 1 — сельскохозяйственная продукция, 2 — энергоносители, 3 — традиционные промышленные товары, 4 — высокотехнологичные промышленные товары, 5 — традиционные услуги, 6 — высокотехнологичные услуги. Последняя строка представляет собой элементарные индексы цен p_i^4/p_i^0 и количеств x_i^4/x_i^0, а также расходов e_4/e_0.

Таблица 1

Цены и количества продаж [3], стр. 440

Период		Цены						Количества						Расходы
t	годы	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
0	1973-77	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	2.0	1.0	4.5	0.5	10.00
1	1978-82	1.2	3.0	1.3	0.7	1.4	0.8	0.8	0.9	1.9	1.3	4.7	0.6	14.10
2	1983-87	1.0	1.0	1.5	0.5	1.7	0.6	1.0	1.1	1.8	3.0	5.0	0.8	15.28
3	1988-92	0.8	0.5	1.6	0.3	1.9	0.4	1.2	1.2	1.9	6.0	5.6	1.3	17.56
4	1993-97	1.0	1.0	1.6	0.1	2.0	0.2	0.9	1.2	2.0	12.0	6.5	2.5	20.00
1997/1977		1.0	1.0	1.6	0.1	2.0	0.2	0.9	1.2	1.0	12.0	1.44	5.0	2.0

В таблице 2 представлены соответствующие значения ценовых и количественных индексов Ласпейреса, Пааше (12) и Фишера (14) с фиксированной базой $s = 0$, отражающие динамику продаж в охватываемом периоде. Индексы Ласпейреса и Пааше представляют собой ярко выраженный эффект Гершенкрона (13). Наибольшая разница между ценовыми индексами $P_{04}^L - P_{04}^P = 0.643$, и количественными $Q_{04}^L - Q_{04}^P = 1.121$.

Таблица 2

Индексы Ласпейреса, Пааше и Фишера

t	Индексы цен			Индексы количеств		
	P_{0t}^L	P_{0t}^P	P_{0t}^F	Q_{0t}^L	Q_{0t}^P	Q_{0t}^F
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	1.420	1.382	1.401	1.020	0.993	1.006
2	1.345	1.203	1.272	1.270	1.136	1.201
3	1.355	1.021	1.176	1.720	1.296	1.493
4	1.440	0.797	1.071	2.510	1.389	1.867

Решение регуляризованной λ-системы (32) дало следующие результаты. Значение минимальной задачи релаксации (33) $r_\lambda = -0.0096$, что означает, что исходная λ-система (30) регулярная. Обозначим соответствующее решение через $\lambda^r = (\lambda_1^r, \ldots, \lambda_4^r)$.

Подбор параметра сверхрелаксации при решении содержательных задач (37), (38) и (40) дал одинаковое значение $\rho = 0.00015$. При этом $r_\lambda \leqslant -\rho$ и величина полной релаксации (34) в λ-системе (35) $r_\lambda^\rho = 0$, т. е. совпала с λ-системой (30). Эта регулярная система также была решена алгоритмом Варшалла [40]. Решения трёх задач — оптимистической (37), обозначенное

[9] Приведённые в [3] расчёты демонстрируют расхождения различных индексов в сотни процентов (в разы).

$\lambda^M = \left(\lambda_1^M, \ldots, \lambda_4^M\right)$, объективной (40) и решения Варшалла — совпали.[10] Решение пессимистических задач (38) $\lambda^m = (\lambda_1^m, \ldots, \lambda_4^m)$ было иным. Все три различных решения λ-системы (35) $\left\{\lambda^r, \lambda^M, \lambda^m\right\}$ являются опорными — вершинами многогранника этой системы.

Полученные решения исследованы численно на устойчивость по отношению к исходным данным о потребляемых величинах x_i^t с уровнем 3% и равномерным распределением возмущений на интервале $\left[-\delta_i^t, \delta_i^t\right]$, где $\delta_i^t = 0.03 \cdot x_i^t$. Каждое число x_i^t возмущалось 10 раз. Результаты решения пяти задач для λ-систем (35) $\left\{\lambda^r, \lambda^M, \lambda^m\right\}$ и исследования устойчивости полученных решений — средних λ-чисел $\left\{\overline{\lambda^r}, \overline{\lambda^M}, \overline{\lambda^m}\right\}$ и их стандартных отклонений s_λ — представлены в таблице 3. Во всех случаях λ-числа показывают стабильность двух знаков после запятой.

Таблица 3

Решения λ-систем (30), (35) и анализ устойчивости

Варианты решений	λ-числа и результаты возмущений				
	$t =$	1	2	3	4
1.Минимальная релаксация (33), $r_\lambda = -0.0096$	$\lambda^r =$	0.7138	0.7653	0.7994	0.8492
	$\overline{\lambda^r} =$	0.7139	0.7629	0.7959	0.8400
	$s_\lambda =$	0.0012	0.0060	0.0094	0.0224
2. maxλ_4 (37); Фишер (40); Варшалл (30)	$\lambda^M =$	0.7234	0.7850	0.8292	0.8902
	$\overline{\lambda^M} =$	0.7229	0.7852	0.8293	0.8908
	$s_\lambda =$	0.0023	0.0028	0.0037	0.0044
3. minλ_4 (38)	$\lambda^m =$	0.7042	0.7435	0.7599	0.7625
	$\overline{\lambda^m} =$	0.7049	0.7433	0.7601	0.7628
	$s_\lambda =$	0.0008	0.0016	0.0023	0.0027

В таблице 4 представлены инвариантные индексы (36), вычисленные по усреднённым решениям $\overline{\lambda^r}, \overline{\lambda^M}, \overline{\lambda^m}$. Соответствующие индексы цен и количеств обозначаются $P_{0t}^{(k)}$ и $Q_{0t}^{(k)}$, где показатель k принимает значения 1, 2 и 3, соответствующие вариантам решения в таблице 3.

Таблица 4

Инвариантные индексы

t	Индексы цен			Индексы количеств		
	$P_{0t}^{(1)}$	$P_{0t}^{(2)}$	$P_{0t}^{(3)}$	$Q_{0t}^{(1)}$	$Q_{0t}^{(2)}$	$Q_{0t}^{(3)}$
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	1.401	1.382	1.420	1.006	1.020	0.993
2	1.307	1.274	1.345	1.169	1.199	1.136
3	1.251	1.206	1.316	1.404	1.456	1.334
4	1.180	1.123	1.311	1.698	1.780	1.525

Различия между итоговыми пессимистичными и оптимистичными индексами $P_{04}^3 - P_{04}^2 = 0.188$ и $Q_{04}^3 - Q_{04}^2 = -0.255$ значительно меньше приведённых выше показателей Гершенкрона $P_{04}^L - P_{04}^P = 0.643$, и $Q_{04}^L - Q_{04}^P = 1.121$. Оптимистические индексы также получены решением задачи минимизации отклонения от индексов Фишера, которую можно считать объективным выбором решения неравенств Африата, и алгоритмом Варшалла—Вэриана. Но если ориентировка на индексы Фишера допускает содержательную интерпретацию, то алгоритм Варшалла в применении к неравенствам Африата не имеет макроэкономического смысла.

Результаты успешной верификации ТРС непараметрическим методом на реальных данных потребления в России представлены в [21–23]. В последней статье проанализирована офи-

[10] Совпадение оптимистического (37) и объективного (40) решений объясняется тем, что точка Фишера $\{\lambda_t^F = P_{t0}^F\}$ не принадлежит многограннику решений системы (35) и вершина, соответствующая оптимистичному решению, является ближайшей к внешней точке Фишера.

циальная торговая статистика по 468 позициям товаров и услуг за период 2012–2017 гг. с построением всех трёх типов аналитических индексов, инвариантных и Конюса—Фишера: оптимистического, пессимистичного и объективного.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен выход из методологического тупика неоклассической теории спроса, где оказалось невозможным создание ТРС и теории равновесия, адекватных реальности и представляющих практический интерес. Выход заключается в пересмотре ТИС в рамках научной методологии с сохранением формальной теории индивидуального спроса. Этот пересмотр соответствует стремлению основоположников неоклассической экономической теории Джевонса и Вальраса создать её на общенаучных принципах, а также потребностям экономистов-практиков и правительств. Реалистичная теория рыночного спроса является основанием объективного анализа потребительских рынков, учитывающего потребительские предпочтения населения, а также позволяет пересмотреть модель общего экономического равновесия Касселс—Вальда, определяющую эффективные цены для конкретных экономик с учётом ресурсных и технологических особенностей [44].

Множественность подходов к построению индексов и отсутствие консенсуса относительно «наилучшей» пары индексов цены-количества позволяют выбирать индексы в зависимости от целей экономического анализа или различных групп, влияющих на экономическую политику. Переход от формульных к аналитическим индексам уменьшает произвол построения индексов, но не устраняет его полностью в силу множественности решений регуляризованных систем неравенств Африата.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Ульяновского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mas-Colell A., Whinston M., Green J.* Microeconomic Theory. N. Y.: Oxford University Press, 1995.
2. *Бусыгин В. П., Желободько Е. В., Цыплаков А. А.* Микроэкономика. Третий уровень. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.
3. *МОТ, МВФ, ОЭСР, Евростат, ЕЭК ООН, Всемирный банк.* Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика. Вашингтон: Междунар. валютный фонд, 2007.
4. *Конюс А. А.* Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономич. бюллетень Конъюнктурного ин-та. 1924. № 9–10. С. 64–71.
5. *Samuelson P. A., Swamy S.* Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis // Am. Econ. Rev. 1974. V. 64, N 4. P. 566–593.
6. *Diewert W. E.* The economic theory of index numbers: a survey. // Essays in Index Number Theory, Volume I. 1993. P. 177–228.
7. *Arrow K. J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica. 1954. V. 22, N 3. P. 265–290; DOI: 10.2307/1907353
8. *Kirman A.* Demand theory and general equilibrium: from explanation to introspection, a journey down the wrong road // Hist. Polit. Econ. 2006. V. 38. N Suppl_1. P. 246–280; DOI: 10.1215/00182702-2005-025

9. *Kirman A.* Whom or what does the representative individual represent? // J. Econ. Perspect. 1992. V. 6. N 2. P. 117–136; DOI: 10.1257/jep.6.2.117
10. *Kirman A.* The economic crisis is a crisis for economic theory // CESifo Econ. Stud. 2010. V. 56. N 4. P. 498–535; DOI: 10.1093/cesifo/ifq017
11. *Ходжсон Дж.* Экономическая теория и институты. Манифест современной институциональной экономической теории. М.: ДЕЛО, 2003.
12. *Arrow K. J.* Methodological individualism and social knowledge // Am. Econ. Rev. 1994. V. 84, N 2. P. 1–9.
13. *Allais M.* An outline of my main contributions to economic science // Econ. Sci. (Nobel Lect.). 1988. P. 233–252.
14. *Алле М.* Экономика как наука. М.: Наука для общества, 1995.
15. *Boumans M., Davis J.* Economic methodology: Understanding economics as a science. London: Red Globe Press, 2016.
16. *Jevons W. S.* The theory of political economy. N. Y.: Kelley and Millman, 1957.
17. *Walras L.* Elements of pure economics. London: Allen and Unwin, 1954.
18. *Hillinger C.* Science and Ideology in Economic, Political and Social Thought // Economics. 2008. V. 2, N 1. Article 20080002; DOI: 10.5018/economics-ejournal.ja.2008-2
19. *Горбунов В. К.* Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004.
20. *Горбунов В. К.* Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения. Ульяновск: УлГУ, 2015.
21. *Горбунов В. К., Львов А. Г.* Обратная задача теории рыночного спроса и аналитические индексы спроса // Ж. Средн. мат. общ. 2019. Т. 21, № 1. С. 89–110; DOI: 10.15507/2079-6900.21.201901.89-110
22. *Горбунов В. К., Козлова Л. А., Львов А. Г.* К проблеме построения аналитических индексов рыночного спроса: вариативный подход // Вопросы статистики. 2020. Т. 27, № 3. С. 65–80; DOI: 10.34023/2313-6383-2020-27-3-65-80
23. *Горбунов В. К., Львов А. Г.* Анализ потребительского спроса в России: двухэтапное построение аналитических индексов // Вопросы статистики. 2022. Т. 29, № 4. С. 97–113; DOI: 10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113
24. *Afriat S. N.* The construction of utility functions from expenditure data // Int. Econ. Rev. 1967. V. 8, N 1. P. 67–77; DOI: 10.2307/2525382
25. *Varian H. R.* The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. V. 50, N 4. P. 945–973; DOI: 10.2307/1912771
26. *Varian H. R.* Non-parametric tests of consumer behaviour // Rev. Econ. Stud. 1983. V. 50, N 1. P. 99–110; DOI: 10.2307/2296957
27. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
28. *Горбунов В. К.* Релаксационно-штрафной метод и вырожденные экстремальные задачи // Доклады АН. 2001. Т. 337, № 5. С. 583–587.
29. *Gorbunov V. K.* Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2001. V. 9, N 6. P. 575–594; DOI: 10.1515/jiip.2001.9.6.575
30. *Горбунов В. К.* Регуляризация нелинейных некорректно поставленных задач с параметризованными данными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. 2003. С. 418–447.
31. *Gorman W. M.* Community preference fields // Econometrica. 1953. V. 21, N 1. P. 63–80; DOI: 10.2307/1906943
32. *Samuelson P. A.* Social indifference curves // Q. J. Econ. 1956. V. 70, N 1. P. 1–22; DOI: 10.2307/1884510
33. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Inf. Control. 1965. V. 8, N 3. P. 338–353; DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
34. *Stone R.* Linear expenditure systems and demand analysis: an application to the pattern of British demand // Econ. J. 1954. V. 64, N 255. P. 511–527.

35. *Klein L. R., Rubin H.* A constant-utility index of the cost of living // Rev. Econ. Stud. 1947. V. 15, N 2. P. 84–87; DOI: 10.2307/2295996
36. *Geary R. C.* A note on «A constant-utility index of the cost of living» // Rev. Econ. Stud. 1950. V. 18, N 1. P. 65–66; DOI: 10.2307/2296107
37. *Deaton A. S.* The analysis of consumer demand in the United Kingdom, 1900-1970 // Econometrica. 1974. V. 42, N 2. P. 341–367.
38. *Deaton A., Muellbauer J.* An almost ideal demand system // Am. Econ. Rev. 1980. V. 70, N 3. P. 312–326.
39. *Deaton A.* Demand analysis // Handb. Econometrics. 1986. V. 3, N 30. P. 1767–1839; DOI: 10.1016/S1573-4412(86)03010-6
40. *Шананин А. А.* Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса // Матем. моделирование. 1993. Т. 5, № 9. С. 3–17.
41. *Diewert W. E.* Afriat and revealed preference theory // Rev. Econ. Stud. 1973. V. 10, N 3. P. 419–425; DOI: 10.2307/2296461
42. *Fleissig A. R., Whitney G. A.* Testing for the significance of violations of Afriat's inequalities // J. Bus. Econ. Stat. 2005. V. 23, N 3. P. 355–362; DOI: 10.1198/073500104000000253
43. *Фёдоров В. В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
44. *Горбунов В. К.* Холистическая теория экономического равновесия: модифицированная модель Касселя—Вальда // Доклады АН. 2018. Т. 482, № 3. С. 268–271; DOI: 10.31857/S013207690003111-4

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.862

THE PROBLEM OF VERIFYING THE MARKET DEMAND THEORY

V. K. Gorbunov[1a], A. G. Lvov[2b]

[1] *Ul'yanovsk State University, Ul'yanovsk, 432017 Russia,*
[2] *White Partners LLC, Moscow, 109147 Russia*

E-mails: [a]vkgorbunov@mail.ru, [b]aglvov@mail.ru

Received 18.12.2023, revised 24.04.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. The aim of this paper is to acquaint applied mathematicians interested in the possibilities of applying methods for solving inverse problems in mathematical modeling in natural sciences and engineering to economic problems with our papers in this field. These papers refer to the problem of verifying the market demand theory, developed by the first author based on the revision of the unrealistic axiomatic neoclassical theory of individual demand within the framework of general scientific methodology. At the same time, the artificial object of individual theoryвЂ"a rational and independent individual who maximizes his/her utility functionвЂ"was replaced by a "statistical ensemble of consumers" of the market under study, and the postulates of individual theory became scientific hypotheses of the new theory. The verification of this theory consists in elucidating the question of rationalizing the statistical market demand by the collective utility function. This problem refers to the inverse problems of mathematical theories of real phenomena, which are usually ill posed and have many solutions. The solution of such problems consists in their regularization with involvement of additional information about the desired solution. Our method for verifying the market demand theory is a development of the nonparametric Afriat—Varian demand analysis with using "economic indices" of market demand as additional information, which allows obtaining solutions with various substantive properties.

Keywords: holistic theory of market demand, methodological issue, inverse problem, economic index.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.204

REFERENCES

1. A. Mas-Colell, M. Whinston, and J. Green, *Microeconomic Theory* (Oxford Univ. Press, New York, 1995).
2. V. P. Busygin, E. V. Zhelobod'ko, and A. A. Tsyplakov, *Microeconomics. Third Level* (Izd. Sib. Otd. Ros. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2008) [in Russian].
3. *Consumer Price Index Manual: Theory and Practice* (Int. Labour Off., Geneva, 2004).
4. A. A. Konyus, "The problem of the true cost of living index," Econ. Byull. Kon'yunkt. Inst. (9–10), 64–71 (1924) [in Russian].
5. P. A. Samuelson and S. Swamy, "Invariant economic index numbers and canonical duality: Survey and synthesis," Am. Econ. Rev. **64** (4), 566–593 (1974).
6. W. E. Diewert, "The economic theory of index numbers: A survey," Essays Index Number Theory I, 177–228 (1993).
7. K. J. Arrow and G. Debreu, "Existence of an equilibrium for a competitive economy," Econometrica **22** (3), 265–290 (1954). https://doi.org/10.2307/1907353

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 2, pp. 253–270.

8. A. Kirman, “Demand theory and general equilibrium: From explanation to introspection, a journey down the wrong road,” Hist. Polit. Econ. **38** (Suppl. 1), 246–280 (2006). https://doi.org//10.1215/00182702-2005-025
9. A. Kirman, “Whom or what does the representative individual represent?” J. Econ. Perspect. **6** (2), 117–136 (1992). https://doi.org/10.1257/jep.6.2.117
10. A. Kirman, “The economic crisis is a crisis for economic theory,” CESifo Econ. Stud. **56** (4), 498–535 (2010). https://doi.org/10.1093/cesifo/ifq017
11. G. M. Hodgson, *Economics and Institutions: A Manifesto for a Modern Institutional Economics* (Polity Press, Cambridge, 1988; Delo, Moscow, 2003).
12. K. J. Arrow, “Methodological individualism and social knowledge,” Am. Econ. Rev. **84** (2), 1–9 (1994).
13. M. Allais, “An outline of my main contributions to economic science,” Econ. Sci. (Nobel Lect.) 233–252 (1988).
14. M. Allais, *Economics as a Science* (Cahiers Vilfredo Pareto, 1968, **6** (16/17) 5–24; Nauka Ob-va, Moscow, 1995).
15. M. Boumans and J. Davis, *Economic Methodology: Understanding Economics as a Science* (Red Globe Press, London, 2016).
16. W. S. Jevons, *The Theory of Political Economy* (Kelley and Millman, New York, 1957).
17. L. Walras, *Elements of Pure Economics* (Allen and Unwin, London, 1954).
18. C. Hillinger, “Science and ideology in economic, political and social thought,” Economics **2** (1), 20080002 (2008). https://doi.org/10.5018/economics-ejournal.ja.2008-2
19. V. K. Gorbunov, *Mathematical Model of Consumer Demand: Theory and Applied Potential* (Ekonomika, Moscow, 2004) [in Russian].
20. V. K. Gorbunov, *Consumer Demand: Analytical Theory and Applications* (Ul’yan. Gos. Univ., Ul’yanovsk, 2015) [in Russian].
21. V. K. Gorbunov and A. G. Lvov, “Inverse problem of the theory of market demand and analytical indices of demand,” Zh. Sredn. Mat. O-va **21** (1), 89–110 (2019) [in Russian]. https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.89-110
22. V. K. Gorbunov, L. A. Kozlova, and A. G. Lvov, “To the problem of constructing analytical indices of market demand: A variable approach,” Vopr. Stat. **27** (3), 65–80 (2020). https://doi.org/10.34023/2313-6383-2020-27-3-65-80
23. V. K. Gorbunov and A. G. Lvov, “Analysis of consumer demand in Russia: Two-stage construction of analytical indices,” Vopr. Stat. **29** (4), 97–113 (2022). https://doi.org/10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113
24. S. N. Afriat, “The construction of utility functions from expenditure data,” Int. Econ. Rev. **8** (1), 67–77 (1967). https://doi.org/10.2307/2525382
25. H. R. Varian, “The nonparametric approach to demand analysis,” Econometrica **50** (4), 945–973 (1982). https://doi.org/10.2307/1912771
26. H. R. Varian, “Non-parametric tests of consumer behaviour,” Rev. Econ. Stud. **50** (1), 99–110 (1983). https://doi.org/10.2307/2296957
27. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
28. V. K. Gorbunov, “The relaxation penalty method and degenerate extremum problems,” Dokl. Math. **63** (2), 219–223 (2001).
29. V. K. Gorbunov, “Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization,” J. Inverse Ill-Posed Probl. **9** (6), 575–594 (2001). https://doi.org/10.1515/jiip.2001.9.6.575
30. V. K. Gorbunov, “Regularization of nonlinear ill-posed problems with parameterized data,” in *Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations* (2003), 418–447 [in Russian].
31. W. M. Gorman, “Community preference fields,” Econometrica **21** (1), 63–80 (1953). https://doi.org/DOI: 10.2307/1906943

32. P. A. Samuelson, "Social indifference curves," Q. J. Econ. **70** (1), 1–22 (1956). https://doi.org/10.2307/1884510
33. L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," Inf. Control **8** (3), 338–353 (1965). https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X
34. R. Stone, "Linear expenditure systems and demand analysis: An application to the pattern of British demand," Econ. J. **64** (255), 511–527 (1954).
35. L. R. Klein and H. Rubin, "A constant-utility index of the cost of living," Rev. Econ. Stud. **15** (2), 84–87 (1947). https://doi.org/10.2307/2295996
36. R. C. Geary, "A note on "A constant-utility index of the cost of living"," Rev. Econ. Stud. **18** (1), 65–66 (1950). https://doi.org/10.2307/2296107
37. A. S. Deaton, "The analysis of consumer demand in the United Kingdom, 1900-1970," Econometrica **42** (2), 341–367 (1974).
38. A. Deaton and J. Muellbauer, "An almost ideal demand system," Am. Econ. Rev. **70** (3), 312–326 (1980).
39. A. Deaton, "Demand analysis," Handb. Econometrics **3** (30), 1767–1839 (1986). https://doi.org/10.1016/S1573-4412(86)03010-6
40. A. A. Shananin, "Nonparametric methods of analysis of consumer demand structure," Mat. Model. **5** (9), 3–17 (1993) [in Russian].
41. W. E. Diewert, "Afriat and revealed preference theory," Rev. Econ. Stud. **10** (3), 419–425 (1973). https://doi.org/10.2307/2296461
42. A. R. Fleissig and G. A. Whitney, "Testing for the significance of violations of Afriat's inequalities," J. Bus. Econ. Stat. **23** (3), 355–362 (2005). https://doi.org/DOI: 10.1198/073500104000000253
43. V. V. Fedorov, *Numerical Maximin Methods* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
44. V. K. Gorbunov, "Holistic theory of economic equilibrium: Modified Cassel—Wald model," Dokl. Math. **98** (2), 537–539 (2018). https://doi.org/10.1134/S1064562418060121