

УДК 532.6

СТРУКТУРА ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С РАДИАЛЬНЫМ НАГРЕВОМ НИЖНЕЙ ПОДЛОЖКИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ

© 2024 В. К. Андреев^a, М. В. Ефимова^b*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
ул. Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия*E-mails: ^aandr@icm.krasn.ru, ^befmavi@mail.ruПоступила в редакцию 09.08.2023 г.; после доработки 05.04.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

Исследовано трёхмерное течение системы вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси с общей поверхностью раздела в слое, ограниченном твёрдыми стенками. На нижней подложке задано радиальное нестационарное распределение температуры, верхняя стенка считается теплоизолированной. В предположении малости числа Марангони описана структура стационарного течения в зависимости от отношения толщин слоёв с учётом влияния массовых сил. Решение нестационарной задачи определено в изображениях по Лапласу в виде квадратур. Показано, что если заданная температура на нижней подложке стабилизируется со временем, то решение с ростом времени выходит на полученный стационарный режим только при определённых условиях на начальное распределение концентрации в смеси.

Ключевые слова: уравнения Обербека—Буссинеска, бинарная смесь, число Марангони

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.201

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшую роль в формировании правильного понимания качественных особенностей явлений и процессов в науке и технике играют точные решения дифференциальных уравнений математической физики. Среди семейств точных решений выделяют несколько классов решений уравнений Навье—Стокса. Так, например, называемое течение типа Хименца [1] описывает двумерное течение вблизи критической точки, а решения из [2] характеризуются линейной зависимостью скоростей от части координат. Краткий обзор точных решений, близких к решению Хименца, дан в [3]. В [4] изучена задача о двумерном стационарном течении жидкости в плоском канале со свободной границей, в котором температура распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Точные решения стационарной задачи, описывающей трёхмерное ползущее течение в двухслойной системе с учётом энергетического условия на поверхности раздела, построены в работах [5, 6].

В статье рассматривается совместная конвекция вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси в трёхмерном слое с твёрдыми плоскими стенками. Считаем, что верхняя стенка теплоизолирована, а на нижней задано радиальное распределение температуры. Жидкости предполагаются несмешивающимися, и на плоской границе раздела между ними задаются условия сопряжения. В качестве математической модели используются уравнения Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска. Тепловые и диффузионные процессы описываются уравнениями теплопереноса. В предположении малости числа Марангони выписано решение стационарной задачи. Проведён анализ влияния силы тяжести на структуру течения

в двухслойной системе. В изображениях по Лапласу получено решение нестационарной задачи в виде квадратур, позволяющее описать эволюцию трёхмерного движения в двухслойной системе вязкая жидкость-бинарная смесь. Доказано, что стационарное решение является предельным при ограничениях на начальные данные системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается слой вязкой теплопроводной жидкости $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $-l_1 < z < 0$ и слой бинарной смеси $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $0 < z < l_2$. Границы слоя $z = -l_1$, $z = l_2$ суть твёрдые неподвижные стенки, а $z = 0$ — плоская неподвижная поверхность раздела между несмешивающимися жидкостью и смесью. Схема течения представлена на рис. 1.

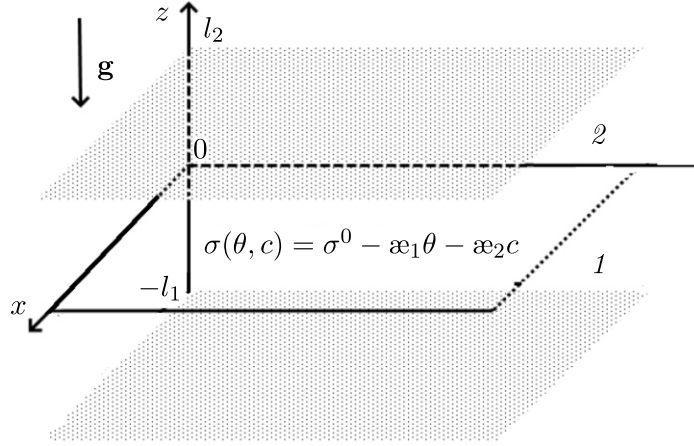


Рис. 1. Схема области течения, 1 — жидкость, 2 — бинарная смесь

Движение в слоях описывается уравнениями Обербека—Буссинеска [7]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{jt} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j &= -\frac{1}{\rho_j} \nabla \bar{p}_j + \nu_j \Delta \mathbf{u}_j - \mathbf{g}(\beta_j \theta_j + \beta_3 \varepsilon_j c), \\ \theta_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \theta_j &= \chi_j \Delta \theta_j, \\ c_t + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla c &= D \Delta c + \alpha D \Delta \theta_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_j &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1) индекс $j = 1$ относится к жидкости, а $j = 2$ — к бинарной смеси; $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j, w_j)$, \bar{p}_j , θ_j , c — искомые векторы скорости, модифицированные давления, температуры и концентрация в слоях; $\rho_j > 0$, $\nu_j = \mu_j / \rho_j > 0$, $\beta_j > 0$, $\beta_3 > 0$, $\chi_j > 0$, $D > 0$, α — постоянные плотности, кинематической вязкости, коэффициенты теплового и концентрационного расширения жидкости, температуропроводности, диффузии и термодиффузии; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ ускорение силы тяжести, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$.

Предполагается, что поверхностное натяжение линейно зависит от температуры этой поверхности $\theta(x, y, 0, t)$ и концентрации $c(x, y, 0, t)$, а именно $\sigma(\theta, c) = \sigma^0 - \varepsilon_1 \theta - \varepsilon_2 c$, где постоянные $\sigma^0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Последнее неравенство означает, что $c(x, y, z, t)$ есть концентрация лёгкой компоненты. Для того чтобы поверхность раздела была плоской, достаточно потребовать, чтобы число Вебера $We = \sigma_0 l_1 / \mu_1 \chi_1$ было большим, а число Бонда $Bo = g(\rho_1 - \rho_2) l_1^2 / \sigma_0$ — малым [8, 9].

Система (1) дополняется граничными и начальными условиями. На нижней стенке $z = -l_1$ выполнены условия прилипания и задана температура

$$\mathbf{u}_1 = 0, \quad \theta_1 = \theta_{10}(x, y, t). \quad (2)$$

Верхняя стенка $z = l_2$ предполагается теплоизолированной, на ней также выполнено условие прилипания, отсутствуют потоки тепла и массы

$$\mathbf{u}_2 = 0, \quad \theta_{2z} = 0, \quad c_z = 0. \quad (3)$$

На поверхности раздела $z = 0$ имеют место условия непрерывности [7]

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad k_2\theta_{2z} - k_1\theta_{1z} = 0. \quad (4)$$

Кроме того, на ней отсутствует поток вещества и выполнены динамические условия

$$c_z + \alpha\theta_{2z} = 0, \quad 2[\mu_1 D(\mathbf{u}_1) - \mu_2 D(\mathbf{u}_2)]\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \nabla_{11}\sigma(\theta_2, c) \cdot \boldsymbol{\tau}_i, \quad (5)$$

где $k_j > 0$ — постоянные коэффициенты теплопроводностей, D — тензор скоростей деформации, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\tau}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (0, 1, 0)$, $i = 1, 2$, $\nabla_{11} = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}$ — поверхностный градиент. В динамическом условии учтено, что средняя кривизна поверхности $z = 0$ равна нулю.

Граничные условия (2)–(5) дополняются начальными данными при $t = 0$

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0j}(\mathbf{x}), \quad \theta_j(\mathbf{x}, 0) = \theta_{0j}(\mathbf{x}), \quad c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}) \quad (6)$$

с заданными $\mathbf{u}_{0j}(\mathbf{x})$, $\theta_{0j}(\mathbf{x})$, $c_0(\mathbf{x})$ на своих областях определения. Эти функции для гладкого решения должны удовлетворять условиям согласования

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{01}(x, y, -l_1) &= 0, \quad \theta_{01}(x, y, -l_1) = \theta_{10}(x, y, 0), \\ \mathbf{u}_{02}(x, y, l_2) &= 0, \quad \theta_{02z}(x, y, l_2) = 0, \quad c_{0z}(x, y, l_2) = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_{0j} &= 0, \quad \mathbf{u}_{01}(x, y, 0) = \mathbf{u}_{02}(x, y, 0), \\ \theta_{01}(x, y, 0) &= \theta_{02}(x, y, 0), \quad c_{0z}(x, y, 0) + \alpha\theta_{02z}(x, y, 0) = 0, \\ k_2\theta_{02z}(x, y, 0) &- k_1\theta_{01z}(x, y, 0) = 0, \\ 2[\mu_1 D(\mathbf{u}_{01}) - \mu_2 D(\mathbf{u}_{02})]\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_i &= \nabla_{11}\sigma(\theta_{01}, c_0) \cdot \boldsymbol{\tau}_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение поставленной задачи (1)–(7) ищем в виде [10]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \left(f_j(z, t)x, f_j(z, t)y, -2 \int_{z_0}^z f_j(z_1, t) dz_1 \right), \quad \bar{p}_j = \bar{p}_j(x, y, z), \\ \theta_j &= a_j(z, t)(x^2 + y^2) + q_j(z, t), \quad c = m(z, t)(x^2 + y^2) + n(z, t). \end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки в систему (1) представлений (8) и анализа на совместность приходим к выводу, что и \bar{p}_j есть квадратичные функции по x , y (ниже они выписаны в безразмерной форме). В (8) $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$, $\bar{p}_j(\mathbf{x})$, $\theta_j(\mathbf{x})$, $c(\mathbf{x})$ — векторы скорости, модифицированные давления, температуры и концентрация в слоях. Решение вида (8) обобщает решение типа Хименца [11]. Обзор точных решений системы Навье—Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от x и y приведён в работе [12]. Физический смысл решения (8) хорошо определяется в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . В этом случае вектор скорости примет вид $\mathbf{u}_j = (f_j(z, t)r, 0, w_j)$ и будет описывать осесимметричное течение вблизи точки минимума или максимума температуры на нижней подложке. Так в работе [13] формулируются условия

разрешимости редуцированной задачи, описывающей трёхмерное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости; осесимметрическое термокапиллярное движение двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе описано в [14], пример двумерного нестационарного течения двух несмешивающихся несжимаемых бинарных смесей в цилиндрическом капилляре в отсутствие массовых сил представлен в работе [15].

2. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Поскольку в поставленной задаче главными являются тепловые эффекты (нагревание подложки $z = -l_1$), то в качестве безразмерного времени примем величину $\tau = \chi_1 l_1^{-2} t$. Пусть температура на подложке $z = -l_1$ распределена по закону $\theta_{10} = \alpha_1(t)(x^2 + y^2) + \alpha_2(t)$ с ограниченными при $t \geq 0$ заданными функциями $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$. Тогда за характерную температуру можно взять величину $\theta^* = \max_{t \geq 0} |\alpha_2(t)|$. При этом $a^* l_1$ — характерный градиент температур, где $a^* = \max_{t \geq 0} |\alpha_1(t)|$.

Положим $x = \bar{x} l_j$, $y = \bar{y} l_j$, $z = \zeta l_j$, ($j = 1, 2$),

$$\begin{aligned} f_j &= \frac{\chi_1}{l_1^2} M F_j(\zeta, \tau), & a_j &= a^* A_j(\zeta, \tau), & q_j &= \theta^* Q_j(\zeta, \tau), & m &= \frac{\beta_2 a^*}{\beta_3} K_1(\zeta, \tau), \\ n &= \frac{\beta_2 l_1^2 a^*}{\beta_3} K_2(\zeta, \tau), & s_j &= \frac{\chi_1^2}{l_1^4} M S_j(\tau), & P_j &= \frac{\nu_j}{\chi_j}, & M &= \frac{\varkappa_1 a^* l_1^3}{\rho_1 \nu_1 \chi_1}, & L_j &= \frac{g \beta_j l_1 l_j \rho_1}{\varkappa_1}, \\ \text{Le}_1 &= \frac{D}{\chi_1}, & \omega &= \frac{\varkappa_2 \beta_2}{\varkappa_1 \beta_3}, & d &= \frac{a^* l_1^2}{\theta^*}, & \psi &= \frac{\alpha \beta_3}{\beta_2}, & l &= \frac{l_1}{l_2}, & \nu &= \frac{\nu_1}{\nu_2}, & \rho &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, & k &= \frac{k_1}{k_2}, \end{aligned}$$

где P_j — число Прандтля, M — число Марангони, $\text{Le} = D/\chi_2 = \chi \text{Le}_1$ — число Льюиса, ψ — параметр разделения.

Рассмотрим случай ползущего течения, когда $M \ll 1$, при этом считается, что $\omega = O(1)$, $L_j = O(1)$ при $M \rightarrow 0$. Малость числа Марангони может обеспечиваться в реальности толщиной слоя l_1 , малостью \varkappa_1 , высокой вязкостью и теплопроводностью жидкости. С учётом такого предположения система уравнений (1) в безразмерном виде примет вид для слоя $-1 < \zeta < 0$

$$F_{1\tau} + 2P_1 L_1 \int_0^\zeta A_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 + S_1(\tau) = P_1 F_{1\zeta\zeta}, \quad (9)$$

$$A_{1\tau} = A_{1\zeta\zeta}, \quad Q_{1\tau} = 4dA_1 + Q_{1\zeta\zeta}.$$

Для слоя $0 < \zeta < 1$ имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} F_{2\tau} + 2P_1 L_2 \int_0^\zeta (A_2(\zeta_1, \tau) + K_1(\zeta_1, \tau)) d\zeta_1 + S_2(\tau) &= \frac{P_1 l^2}{\nu} F_{2\zeta\zeta}, \\ A_{2\tau} &= \frac{l^2}{\chi} A_{2\zeta\zeta}, & Q_{2\tau} &= \frac{4d}{\chi} A_2 + \frac{l^2}{\chi} Q_{2\zeta\zeta}, \\ K_{1\tau} &= \text{Le}_1 l^2 \left(K_{1\zeta\zeta} + \psi A_{2\zeta\zeta} \right), \\ K_{2\tau} &= \text{Le}_1 \left(l^2 K_{2\zeta\zeta} + 4K_1 + \psi \left(\frac{l^2}{d} Q_{2\zeta\zeta} + 4A_2 \right) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия в безразмерном виде примут вид (здесь учтено безразмерное распределение на подложке $\bar{\theta}(\bar{x}, \bar{y}, -1, \tau) = \theta_{10}(x, y, t)/\theta^*$) $\alpha_1(\tau)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \alpha_2(\tau)$:

$$\zeta = -1: \quad F_1(-1, \tau) = 0, \quad \int_{-1}^0 F_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 = 0, \quad (11)$$

$$A_1(-1, \tau) = \alpha_1(\tau), \quad Q_1(-1, \tau) = \alpha_2(\tau),$$

$$\zeta = 1: \quad F_2(1, \tau) = 0, \quad \int_0^1 F_2(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 = 0, \quad A_{2\zeta}(1, \tau) = 0, \quad (12)$$

$$Q_{2\zeta}(1, \tau) = 0, \quad K_{1\zeta}(1, \tau) = 0, \quad K_{2\zeta}(1, \tau) = 0,$$

$$\zeta = 0: \quad F_1(0, \tau) = F_2(0, \tau), \quad A_1(0, \tau) = A_2(0, \tau), \quad Q_1(0, \tau) = Q_2(0, \tau), \quad (13)$$

$$lA_{2\zeta}(0, \tau) - kA_{1\zeta}(0, \tau) = 0, \quad lQ_{2\zeta}(0, \tau) - kQ_{1\zeta}(0, \tau) = 0,$$

$$\mu F_{1\zeta}(0, \tau) - lF_{2\zeta}(0, \tau) = -2\mu(A_2(0, \tau) + \omega K_1(0, \tau)), \quad \mu = \rho\nu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (14)$$

$$K_{1\zeta}(0, \tau) + \psi A_{2\zeta}(0, \tau) = 0, \quad K_{2\zeta}(0, \tau) + \frac{\psi}{d} Q_{2\zeta}(0, \tau) = 0.$$

Кроме того, должны быть выполнены начальные условия вида (6)

$$F_j(\zeta, 0) = F_{0j}(\zeta), \quad A_j(\zeta, 0) = A_{0j}(\zeta), \quad Q_j(\zeta, 0) = Q_{0j}(\zeta), \quad K_i(\zeta, 0) = K_{0i}(\zeta), \quad (15)$$

которые для гладких решений удовлетворяют условиям согласования (7), записанных в безразмерных переменных. В (15) при $j = 1$ имеем $-1 < \zeta < 0$, при $j = 2$ — $0 < \zeta < 1$; для функций K_i переменная ζ меняется в пределах $0 < \zeta < 1$, $i = 1, 2$.

Заметим, что в силу граничных условий (12), (14)

$$\int_0^1 K_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 = \int_0^1 K_{01}(\zeta_1) d\zeta_1.$$

Этим равенством можно заменить, например, второе граничное условие (12). Функции, определяющие модифицированные давления в слоях, в безразмерном виде имеют представления

$$\bar{p}_1 = \frac{\rho_1 \nu_1 \chi_1}{l_1^2} \text{МП}_1(\zeta, \tau),$$

$$\Pi_1(\zeta, \tau) = \left[2L_1 \int_0^\zeta A_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 + \frac{S_1(\tau)}{P_1} \right] (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - 2F_1(\zeta, \tau) + \frac{L_1}{d} \int_0^\zeta Q_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 + \Pi_1(\tau),$$

$$\bar{p}_2 = \frac{\rho_2 \nu_2 \chi_2}{l_2^2} \text{МП}_2(\zeta, \tau),$$

$$\Pi_2(\zeta, \tau) = \left[\frac{2\chi\nu L_2}{l^2} \int_0^\zeta (A_2(\zeta_1, \tau) + K_1(\zeta_1, \tau)) d\zeta_1 + \frac{\chi^2 S_2(\tau)}{l^2 P_2} \right] (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - \frac{2\chi F_2(\zeta, \tau)}{l^2} +$$

$$+ \frac{\chi\nu L_2}{l^2} \int_0^\zeta \left(\frac{1}{d} Q_2(\zeta_1, \tau) + K_2(\zeta_1, \tau) \right) d\zeta_1 + \Pi_2(\tau),$$

где Π_1, Π_2 — произвольные функции τ .

Поскольку функции $S_{1,2}(\tau)$ суть искомые, то поставленная задача (9)–(15) является обратной.

3. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

При решении стационарной задачи (9)–(14) (обозначим его индексом «с») начальные условия (15) не принимаются во внимание, S_j^c считаются постоянными. В этом случае для замыкания задачи используется дополнительное условие, определяющее среднюю стационарную концентрацию поперёк второго слоя в точке $\xi = \eta = 0$

$$\int_0^1 K_2^c(\zeta_1) d\zeta_1 = \delta_2$$

с заданной постоянной δ_2 .

После некоторых преобразований найдём стационарное решение задачи (α_1^c, α_2^c здесь постоянные)

$$\begin{aligned} -1 \leq \zeta \leq 0: \quad A_1^c &= \alpha_1^c, \quad Q_1^c = 2d\alpha_1^c \left(1 - \zeta^2 + \frac{2}{kl}(\zeta + 1) \right) + \alpha_2^c, \\ F_1^c &= \frac{\alpha_1^c}{24l(l + \mu)} (\zeta + 1) \left(L_1 l (8\zeta^2(l + \mu) + \zeta(4l + \mu) - \mu) - \right. \\ &\quad \left. - \nu L_2 (1 + 3\zeta)(\psi - 1) + 12\mu l (1 + 3\zeta)(\psi\omega - 1) \right), \\ S_1^c &= \frac{P_1 \alpha_1^c}{4l(l + \mu)} \left(l L_1 (4l + 3\mu) + \nu L_2 (1 - \psi) - 12\mu l (1 - \psi\omega) \right), \\ 0 \leq \zeta \leq 1: \quad A_2^c &= \alpha_1^c, \quad Q_2^c = \frac{2d\alpha_1^c}{l^2} \left(2\zeta - \zeta^2 + l^2 + \frac{2l}{k} \right) + \alpha_2^c, \\ K_1^c &= -\psi \alpha_1^c, \quad K_2^c = \frac{2\alpha_1^c \psi}{l^2} \left(\zeta^2 - 2\zeta + \frac{2}{3} \right) + \delta_2, \\ F_2^c &= -\frac{\nu \alpha_1^c}{24l^2(l + \mu)} (\zeta - 1) \left(L_1 \rho l^2 (3\zeta - 1) - 12\rho l^2 (\psi\omega - 1)(3\zeta - 1) + \right. \\ &\quad \left. + L_2 (\psi - 1)(8\zeta^2(l + \mu) - \zeta(l + 4\mu) - l) \right), \\ S_2^c &= -\frac{P_1 \alpha_1^c}{4\nu(l + \mu)} \left(\nu L_2 (1 - \psi)(4\mu + 3l) + \mu l^2 L_1 + 12\mu l^2 (1 - \psi\omega) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

При рассмотрении случая полной невесомости достаточно в (16) положить $L_1 = L_2 = 0$. Тогда выражения для определения искомых функций несколько упрощаются.

Проиллюстрируем решение (16) исследуемой задачи. Отметим, поскольку продольные компоненты скорости линейно зависят от соответствующих координат с одинаковым множителем, то для анализа решения достаточно рассмотреть поле скоростей в сечении XOZ (поле скоростей в плоскости YOZ будет аналогичным). Подбор параметров для численного счёта достаточно сложен. Необходимо подобрать соответствующие толщины слоёв, температуру нагрева нижней подложки и другие параметры таким образом, чтобы сохранить физический смысл получаемого решения задачи. Например, ограниченность исходной массовой концентрации значениями от нуля до единицы. Рассмотрим модельную систему с параметрами $\nu = 9.59$, $\rho = 1.02$, $\chi = 0.89$, $k = 0.45$, $P_1 = 297$, $P_2 = 27.8$, что соответствует, в частности, системе трансформаторное масло-раствор этилового спирта. Предположим, что температурное поле в критической точке на нижней подложке имеет минимум и $\alpha_1^c = 0.01$, $\alpha_2^c = 1$, $\delta_2 \ll 1$.

На рис. 2 приведены профиль продольной компоненты скорости U при $\xi = 1$ (а) и поперечная составляющая W (б) в условиях нормальной (кривая 1), пониженной гравитации (кривая 2) и при отсутствии массовых сил (кривая 3). При этом толщины слоёв считаются

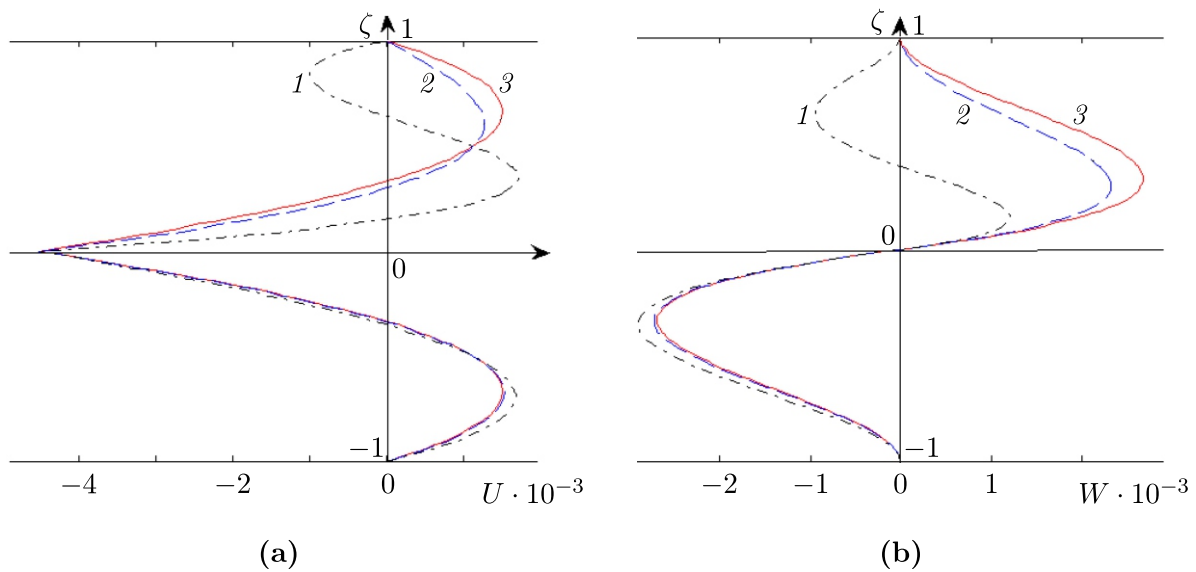


Рис. 2. Продольная компонента скорости U при $\bar{x} = 1$ (а), поперечная составляющая W (б).
Кривые 1 — $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, 2 — $g = 1.6 \text{ м/с}^2$, 3 — $g = 0 \text{ м/с}^2$

равными $l_1 = l_2 = 2 \text{ мм}$. Показано, что сила тяжести оказывает влияние на структуру течения в слое с бинарной смесью. Действительно, при отсутствии поля массовых сил (условия полной невесомости) в каждом слое формируется вихревое течение, причём в слое с вязкой жидкостью имеет место возвратное течение (жидкость движется в направлении, обратном оси z из области с большей температурой). В условиях нормальной гравитации структура течения в слое вязкой теплопроводной жидкости качественно не меняется, однако в слое с бинарной смесью формируется возвратное течение вблизи верхней твёрдой границы.

Кроме этого, исследовано влияние толщины слоя бинарной смеси на структуру течения. В случае пониженной гравитации изменение толщины слоёв не оказывает влияние на структуру течения. Однако в поле действия массовых сил прослеживается изменение структуры течения в слое с бинарной смесью. На рис. 3 показано поле скоростей в плоскости XOZ в зависимости от отношения толщин слоёв при $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Если толщина верхнего слоя меньше слоя с вязкой жидкостью, то движение в двухслойной системе определяется термоконцентрационными силами. С увеличением толщины слоя бинарной смеси у теплоизолированной границы начинает формироваться третий вихрь с противоположным направлением циркуляции. В данной конфигурации движение в пристенном слое порождается массовыми силами и влияние термоконцентрационных сил сохраняется лишь у поверхности раздела.

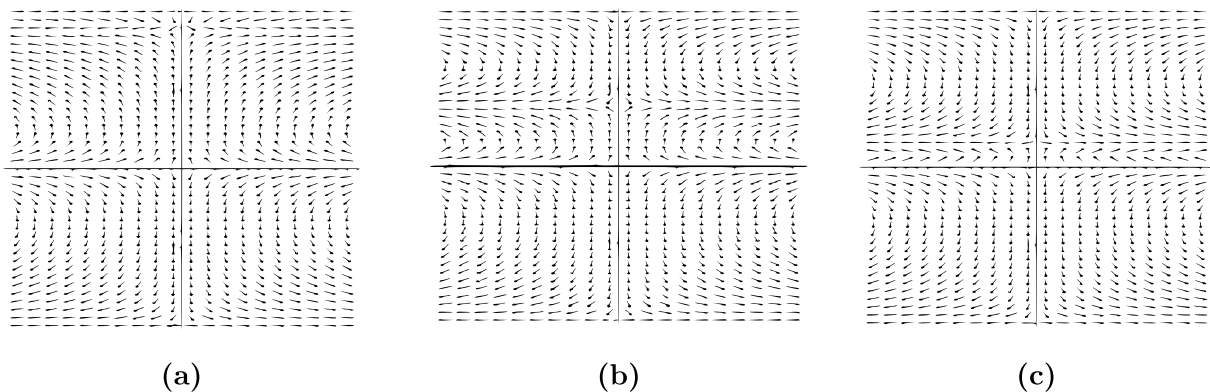


Рис. 3. Поле скоростей в плоскости XOZ при $l = 1$ (а), $l = 0.8$ (б), $l = 0.65$ (с)

При локальном повышении температуры в критической точке на нижней подложке ($\alpha_1^c < 0$) жидкость поднимается вверх к поверхности раздела, снижая поверхностное натяжение вблизи этой точки. Действие термокапиллярных сил меняет направление движения и смесь оттекает от центра. В этом случае на рис. 3 нужно изменить направление движения на противоположное. При этом сама структура течения не изменится.

4. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим сопряжённую начально-краевую задачу (9)–(15). Указанная задача интегрируется в квадратурах в пространстве изображений по Лапласу, что позволяет получить количественную информацию о нестационарном решении. Пусть выражение

$$\hat{U}(\zeta, s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} U(\zeta, \tau) d\tau$$

является преобразованием Лапласа функции $U(\zeta, \tau)$, $\tau \in [0, \infty)$, $\zeta \in [-1, 0]$ (либо $\zeta \in [0, 1]$). Определение и свойства преобразования Лапласа изложены во многих руководствах, например [16]. Оно применимо для широкого класса функций, в частности, имеющих конечное число точек разрыва первого рода по переменной τ .

В образах по Лапласу рассматриваемая задача сводится к сопряжённой краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. После ряда простых преобразований решение записывается в виде

$$\begin{aligned} \hat{A}_1(\zeta, s) &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(\hat{\alpha}_1(s) + \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-1}^0 A_{01}(\zeta) \operatorname{sh} \sqrt{s}(1 + \zeta) d\zeta \right) \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \operatorname{ch} \sqrt{s}\zeta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sqrt{\chi}}{k} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \operatorname{sh} \sqrt{s}\zeta \right) + \frac{\chi}{kl\sqrt{s}} \operatorname{sh} \sqrt{s}(1 + \zeta) \int_0^1 A_{02}(\zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}}(1 - \zeta) d\zeta \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^{\zeta} A_{01}(\xi) \operatorname{sh} \sqrt{s}(\zeta - \xi) d\xi, \\ \hat{A}_2(\zeta, s) &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(\hat{\alpha}_1(s) + \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-1}^0 A_{01}(\zeta) \operatorname{sh} \sqrt{s}(1 + \zeta) d\zeta \right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}}(\zeta - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\chi}{l^2 s}} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \zeta \operatorname{ch} \sqrt{s} + \frac{\sqrt{\chi}}{k} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \zeta \operatorname{sh} \sqrt{s} \right) \int_0^1 A_{02}(\zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}}(1 - \zeta) d\zeta \right] - \\ &\quad - \sqrt{\frac{\chi}{l^2 s}} \int_0^{\zeta} A_{02}(\xi) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}}(\zeta - \xi) d\xi, \\ \Delta &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \operatorname{ch} \sqrt{s} + \frac{\sqrt{\chi}}{k} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \operatorname{sh} \sqrt{s}. \end{aligned} \tag{17}$$

Функции $\hat{Q}_j(\zeta, s)$ восстанавливаются по формулам (17), если заменить $A_{01}(\zeta)$ на

$Q_{01}(\zeta) + 4d\hat{A}_1(\zeta, s)$ и $A_{02}(\zeta)$ на $Q_{02}(\zeta) + \frac{4d}{\chi}\hat{A}_2(\zeta, s)$. Далее,

$$\begin{aligned}\hat{K}_1(\zeta, s) &= \frac{\psi}{\gamma \operatorname{sh} \gamma} \hat{A}_{2\zeta}(0, s) \operatorname{ch} \gamma(\zeta - 1) + \frac{1}{\gamma} \int_0^\zeta \Psi_1(\xi, s) \operatorname{sh} \gamma(\zeta - \xi) d\xi - \\ &\quad - \frac{\operatorname{ch} \gamma \zeta}{\gamma \operatorname{sh} \gamma} \int_0^1 \Psi_1(\zeta, s) \operatorname{ch} \gamma(1 - \zeta) d\zeta, \\ \Psi_1(\zeta, s) &= -\frac{1}{l^2 \operatorname{Le}_1} K_{01}(\zeta) - \frac{\psi \chi}{l^2} \left(s \hat{A}_2(\zeta, s) - A_{02}(\zeta) \right), \quad \gamma = \sqrt{\frac{s}{l^2 \operatorname{Le}_1}}, \\ \hat{A}_{2\zeta}(0, s) &= \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{s \chi}{l^2}} \left[\left(-\hat{\alpha}_1(s) - \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-1}^0 A_{01}(\zeta) \operatorname{sh} \sqrt{s}(1 + \zeta) d\zeta \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s \chi}{l^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\chi}{l^2 s}} \operatorname{ch} \sqrt{s} \int_0^1 A_{02}(\zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s \chi}{l^2}}(1 - \zeta) d\zeta \right], \\ \hat{K}_2(\zeta, s) &= \frac{\psi}{\gamma d \operatorname{sh} \gamma} \hat{Q}_{2\zeta}(0, s) \operatorname{ch} \gamma(\zeta - 1) + \frac{1}{\gamma} \int_0^\zeta \Psi_2(\xi, s) \operatorname{sh} \gamma(\zeta - \xi) d\xi - \\ &\quad - \frac{\operatorname{ch} \gamma \zeta}{\gamma \operatorname{sh} \gamma} \int_0^1 \Psi_2(\zeta, s) \operatorname{ch} \gamma(1 - \zeta) d\zeta, \\ \Psi_2(\zeta, s) &= -\frac{1}{l^2 \operatorname{Le}_1} K_{02}(\zeta) - \frac{4}{l^2} \hat{K}_1 - \frac{\psi \chi}{dl^2} \left(s \hat{Q}_2(\zeta, s) - Q_{02}(\zeta) \right).\end{aligned}$$

После решения обратной задачи для функций $\hat{F}_j(\zeta, s)$, $\hat{S}_1(s)$, $\hat{S}_2(s)$ получены следующие зависимости для искомых функций:

$$\begin{aligned}\hat{F}_1(\zeta, s) &= -\frac{\hat{S}_1}{s} + D_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} \zeta + D_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} \zeta + \\ &+ \sqrt{\frac{P_1}{s}} \int_0^\zeta \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\xi, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\xi) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (\zeta - \xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 0], \\ \hat{F}_2(\zeta, s) &= -\frac{\hat{S}_2}{s} + D_3 \operatorname{sh} \beta \zeta + D_4 \operatorname{ch} \beta \zeta + \\ &+ \frac{1}{\beta} \int_0^\zeta \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\xi, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\xi) \right] \operatorname{sh} \beta (\zeta - \xi) d\xi, \quad \zeta \in [0, 1].\end{aligned}\tag{18}$$

В формулах (18) введены обозначения

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_3(\zeta, \tau) &= 2 \int_0^\zeta \hat{A}_1(\xi, \tau) d\xi, \quad \hat{\Psi}_4(\zeta, \tau) = 2 \int_0^\zeta (\hat{A}_2(\xi, \tau) + \hat{K}_1(\xi, \tau)) d\xi, \quad \beta = \sqrt{\frac{\chi s}{P_2 l^2}}, \\ \hat{S}_1 &= -s D_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + s D_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + \sqrt{P_1 s} \int_{-1}^0 \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\zeta, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (1 + \zeta) d\zeta,\end{aligned}$$

$$\hat{S}_2 = sD_3 \operatorname{sh} \beta + sD_4 \operatorname{ch} \beta + \frac{s}{\beta} \int_0^1 \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\zeta, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \beta (1 - \zeta) d\zeta.$$

Постоянные D_i , $i = \overline{1, 4}$ восстанавливаются из граничных условий (11)–(13):

$$D_1 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} R_1 & \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - \sqrt{\frac{P_1}{s}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & 0 \\ R_2 & 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & \operatorname{ch} \beta - 1 \\ R_3 & 0 & \operatorname{ch} \beta - \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{P_1}{s}} (\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - 1) - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & R_1 & 0 \\ \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \beta & R_2 & \operatorname{ch} \beta - 1 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} (\operatorname{sh} \beta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \operatorname{ch} \beta) & R_3 & \operatorname{ch} \beta - \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} D_1 - \frac{\mu}{l\beta} \hat{\Psi}_{3\zeta}(0, s),$$

$$D_4 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{P_1}{s}} (\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - 1) - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - \sqrt{\frac{P_1}{s}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & R_1 \\ \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \beta & 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & R_2 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} (\operatorname{sh} \beta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \operatorname{ch} \beta) & 0 & R_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{P_1}{s}} (\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - 1) - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - \sqrt{\frac{P_1}{s}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & 0 \\ \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \beta & 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & \operatorname{ch} \beta - 1 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} (\operatorname{sh} \beta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \operatorname{ch} \beta) & 0 & \operatorname{ch} \beta - \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta \end{vmatrix},$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{P_1}{s}} \left\{ \int_{-1}^0 \int_0^\zeta \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\xi, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\xi) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (\zeta - \xi) d\zeta d\xi - \int_{-1}^0 \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\zeta, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (1 + \zeta) d\zeta \right\},$$

$$R_2 = -\frac{\mu \operatorname{sh} \beta}{l\beta} \hat{\Psi}_{3\zeta}(0, s) + \sqrt{\frac{P_1}{s}} \int_{-1}^0 \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\zeta, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (1 + \zeta) d\zeta - \frac{1}{\beta} \int_0^1 \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\zeta, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \beta (1 - \zeta) d\zeta,$$

$$R_3 = -\frac{\mu}{l\beta} \hat{\Psi}_{3\zeta}(0, s) (\text{sh } \beta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \text{ch } \beta) + \frac{1}{\beta} \int_0^1 \int_0^\zeta \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\xi, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\xi) \right] \text{sh } \beta (\zeta - \xi) d\zeta d\xi -$$

$$-\frac{1}{\beta} \int_{-1}^0 \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\zeta, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\zeta) \right] \text{sh } \beta (1 - \zeta) d\zeta.$$

Используя свойства преобразования Лапласа [16], можно доказать, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \hat{A}_j(\zeta, s) = A_j^c(\zeta), \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Q}_j(\zeta, s) = Q_j^c(\zeta),$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \hat{F}_1(\zeta, s) = F_1^c(\zeta), \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{S}_1(\zeta, s) = S_1^c(\zeta),$$

где $A_j^c(\zeta)$, $Q_j^c(\zeta)$, $F_1^c(\zeta)$, S_1^c даются формулами (16). При этом предполагается, что существуют пределы $\lim_{\tau \rightarrow \infty} s \bar{\alpha}_j(\tau) = \alpha_j^c = \text{const}$ и определено $\hat{\alpha}'_j(s)$. Другими словами, функции $A_j(\zeta, \tau)$, $Q_j(\zeta, \tau)$, $F_1(\zeta, \tau)$, $S_1(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к своим стационарным величинам. Что касается функций $K_j(\zeta, \tau)$, входящих в представление для концентрации во втором слое, то они с ростом времени τ выходят на стационарные значения из (16) только при условиях связи

$$\int_0^1 K_{01}(\zeta) d\zeta + 2\chi\psi \text{Le}_1 \int_0^1 A_{02}(\zeta) d\zeta = \psi(2\chi \text{Le}_1 - 1) \alpha_1^c, \quad \int_0^1 K_{02}(\zeta) d\zeta = \delta_2. \quad (19)$$

То есть такая сходимость имеет место не для любых начальных данных $K_{01}(\zeta)$, $\zeta \in [0, 1]$. Функции $F_2(\zeta, \tau)$, $S_2(\tau)$ также имеют предельные значения $F_2^c(\zeta)$, S_2^c при ограничении (19). Подобная ситуация возникает и в других задачах, смотреть например, результаты работы [17].

Все эти выводы получены с помощью достаточно длинных выкладок из формул (17)–(18) с учётом введённых обозначений.

Для вычисления оригинала функции $U(\zeta, \tau)$ по его изображению можно воспользоваться комплексным интегралом

$$U(\zeta, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{s\tau} \hat{U}(\zeta, s) ds.$$

Обращение функции \hat{U} для получения решения исходной нестационарной задачи производится с помощью численной процедуры, предложенной в [18].

Будем считать, что нижняя твёрдая стенка нагревается по закону $\bar{\theta} = \alpha_1^c (1 - e^{-\tau} \cos(\tau)) (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \alpha_2^c$. В этом случае граничные условия (11) согласуются с начальными данными (7), ввиду чего следует ожидать выхода решения (17)–(18) при больших временах на стационарный режим (16). Эволюция профиля горизонтальной составляющей скорости U представлена на рис. 4. Кривые 1–3 соответствуют нестационарному профилю компоненты скорости U при $\bar{x} = 1$ в разные моменты времени $\tau = 1, 5, 10$ соответственно. При дальнейшем увеличении τ решение выходит на стационарный режим, определяемый формулами (16) — кривая 4. Численные расчёты демонстрируют стабилизацию течения в двухслойной системе жидких сред, что подтверждает справедливость аналитических оценок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была исследована обратная начально-краевая задача о тепловой конвекции двухслойной системы жидкость-бинарная смесь с общей поверхностью раздела. Построено

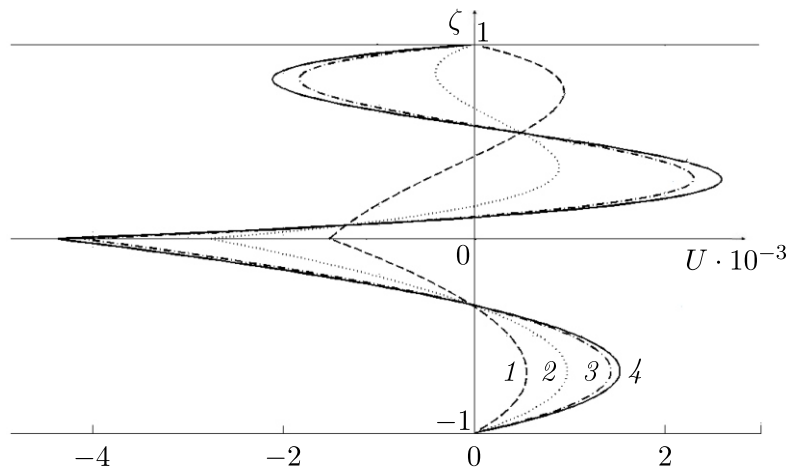


Рис. 4. Продольная компонента скорости U при $\bar{x} = 1$ в разные моменты времени: кривые 1 – $\tau = 1$, 2 – $\tau = 5$, 3 – $\tau = 10$, 4 – стационарный режим

точное решение уравнений Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска, описывающее стационарное течение в системе при радиальном нагреве нижней подложки и теплоизолированной верхней границей в предположении малости числа Марангони. Данное решение позволяет исследовать влияние различных параметров на структуру течения. В частности, проведён анализ влияния силы тяжести и толщин слоёв на поле скоростей исследуемой системы. Обнаружено, что в условиях нормальной гравитации в слое с бинарной смесью формируется третий вихрь, который смещается к поверхности раздела при увеличении толщины этого слоя. Для случая нестационарного движения задача решена в образах по Лапласу. Используя свойства преобразования Лапласа, показана сходимость нестационарного решения задачи (9)–(15) к её стационарному режиму (16).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Института вычислительного моделирования СО РАН. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dinglers Polytech. J.* 1911. V. 326. P. 321–440.
2. *Lin C. C.* Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1958. V. 1. P. 391–395.
3. *Bekezhanova V. B., Andreev V. K., Shefer I. A.* Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity // *Interfacial Phenom. Heat Transf.* 2019. V. 7, N 4. P. 345–364; DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020032777
4. *Lemeshkova E. N.* Two-Dimensional Plane Steady-State Thermocapillary Flow // *Fluid Dyn.* 2019. V. 54, N 1. P. 33–41; DOI: 10.1134/S0015462819010087
5. *Efimova M. V.* Construction of an Exact Solution of Special Type for the 3D Problem of Thermosolutal Convection in Two Layered System // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2023. V. 16, N 1. P. 26–34.

6. Андреев В. К. Конвекция двух жидких сред в трёхмерном слое при малых числах Марангони. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2022.
7. Андреев В. К. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000.
8. Зейтунян Р. Х. Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара—Марангони // Успехи физ. наук. 1998. V. 168. P. 259–286; DOI: 10.3367/UFNr.0168.199803b.0259
9. Nepomnyashchy A. A., Velarde M., Colinet P. Interfacial Phenomena and Convection. Boca Raton: CRC Press, 2001.
10. Pukhnachov V. V. Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces // J. Appl. Math. 2002. V. 13. P. 205–224; DOI: 10.1017/S0956792501004776
11. Ефимова М. В., Дараби Н. Термоконцентрационная конвекция в системе вязкой жидкости и бинарной смеси в плоском канале при малых числах Марангони // Прикл. механика и техн. физика. 2018. V. 59, N 5. P. 93–103; DOI: 10.15372/PMTF20180511
12. Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье—Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретич. основы хим. технол. 2009. V. 43, N 5. P. 547–566.
13. Пухначев В. В., Пухначева Т. П. Трёхмерное нестационарное термокапиллярное течение вязкой жидкости // Вестник КазНУ сер. мат., мех., инф. 2002. V. 2, N 30. P. 96–104.
14. Magdenko E. P. Axisymmetric thermocapillary motion in a cylinder at small Marangoni number // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2015. V. 8, N 3. P. 303–311; DOI: 10.17516/1997-1397-2015-8-3-303-311
15. Sobachkina N. L. Unsteady flow of two binary mixtures in a cylindrical capillary with changes in the internal energy of the interface // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2022. V. 15, N 5. P. 623–634; DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-5-623-634
16. Лаврентьев М. К. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
17. Andreev V. K., Stepanova I. V. Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer // Int. J. Appl. Comput. Math. 2020. V. 6, N 6. Article 169; DOI: 10.1007/s40819-020-00924-0
18. Hoog F. R., Knight J. H., Stokes A. N. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1982. V. 3, N 3. P. 357–366; DOI: 10.1137/0903022

UDC 532.6

**THE STRUCTURE OF A TWO-LAYER FLOW IN A CHANNEL WITH
RADIAL HEATING OF THE LOWER SUBSTRATE FOR SMALL
MARANGONI NUMBERS**

© 2024 V. K. Andreev^a, M. V. Efimova^b

*Institute of Computational Modeling of the Siberian Branch of the Russian Academy of
Sciences,
Krasnoyarsk, 660036 Russia*

E-mails: ^aandr@icm.krasn.ru, ^befmavi@mail.ru

Received 09.08.2023, revised 05.04.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The three-dimensional flow of a system of a viscous heat-conducting fluid and a binary mixture with a common interface in a layer bounded by solid walls is studied. A radial time-varying temperature distribution is specified on the lower substrate; the upper wall is assumed to be thermally insulated. Assuming a small Marangoni number, the structure of a steady-state flow is described depending on the layer thickness ratio and taking into account the influence of mass forces. The solution of the nonstationary problem is determined in Laplace transforms by quadratures. It is shown that if the given temperature on the lower substrate stabilizes over time, then with increasing time the solution reaches the resulting steady-state mode only under certain conditions on the initial distribution of concentrations in the mixture.

Keywords: Oberbeck–Boussinesq equations, binary mixture, Marangoni number.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.201

REFERENCES

1. K. Hiemenz, “Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder,” *Dinglers Polytech. J.* **326**, 321–440 (1911).
2. C. C. Lin, “Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics,” *Arch. Ration. Mech. Anal.* **1**, 391–395 (1958).
3. V. B. Bekezhanova, V. K. Andreev, and I. A. Shefer, “Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity,” *Interfacial Phenom. Heat Transfer* **7** (4), 345–364 (2019). <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020032777>
4. E. N. Lemeshkova, “Two-dimensional plane steady-state thermocapillary flow,” *Fluid Dyn.* **54** (1), 33–41 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0015462819010087>
5. M. V. Efimova, “Construction of an exact solution of special type for the 3D problem of thermosolutal convection in two layered system,” *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **16** (1), 26–34 (2023).
6. V. K. Andreev, *Convection of Two Liquid Media in a Three-Dimensional Layer for Small Marangoni Numbers* (ICM SB RAS, Krasnoyarsk, 2022) [in Russian].
7. V. K. Andreev, *Thermocapillary Instability* (Nauka, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
8. R. Kh. Zeytounian, “The Benard–Marangoni thermocapillary-instability problem,” *Phys.–Uspe.* **41** (3), 241–267 (1998). <https://doi.org/10.1070/PU1998v041n03ABEH000374>
9. A. A. Nepomnyashchy, M. Velarde, and P. Colinet, *Interfacial Phenomena and Convection* (CRC Press, Boca Raton, 2001).

10. V. V. Pukhnachov, “Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces,” *J. Appl. Math.* **13**, 205–224 (2002). <https://doi.org/10.1017/S0956792501004776>
11. M. V. Efimova and N. Darabi, “Thermal-concentration convection in a system of viscous liquid and binary mixture in a plane channel with small Marangoni numbers,” *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **59** (5), 847–856 (2018). <https://doi.org/10.1134/S0021894418050115>
12. S. N. Aristov, D. V. Knyazev, and A. D. Polyanin, “Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables,” *Theor. Found. Chem. Eng.* **43** (5), 642–662 (2009).
13. V. V. Pukhnachev and T. P. Pukhnacheva, “Three-dimensional nonstationary thermocapillary flow of a viscous liquid,” *Vestn. KazNU Ser. Mat. Mekh. Inf.* **2** (30), 96–104 (2002) [in Russian].
14. E. P. Magdenko, “Axisymmetric thermocapillary motion in a cylinder at small Marangoni number,” *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **8** (3), 303–311 (2015). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2015-8-3-303-311>
15. N. L. Sobachkina, “Unsteady flow of two binary mixtures in a cylindrical capillary with changes in the internal energy of the interface,” *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **15** (5), 623–634 (2022). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-5-623-634>
16. M.A. Lavrent’ev and B.V. Shabat, *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
17. V. K. Andreev and I. V. Stepanova, “Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer,” *Int. J. Appl. Comput. Math.* **6** (6), 169 (2020). <https://doi.org/10.1007/s40819-020-00924-0>
18. F. R. Hoog, J. H. Knight, and A. N. Stokes, “An improved method for numerical inversion of Laplace transforms,” *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **3** (3), 357–366 (1982). <https://doi.org/10.1137/0903022>