УДК 517.95

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ТИПА В ПРОЦЕССАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

© 2024 А. И. Кожанов[1,2a], Г. В. Намсараева[3b]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, ул. Смолина, 24а, г. Улан-Удэ 670000, Россия,*
[3] *Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, ул. Ключевская, 40в, г. Улан-Удэ 670013, Россия*

E-mails: [a]kozhanov@math.nsc.ru, [b]gerel@inbox.ru

Поступила в редакцию 22.02.2024 г.; после доработки 07.03.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

Целью работы является исследование разрешимости обратных задач определения вместе с решением уравнения теплопроводности также его правой части, или неизвестного внешнего воздействия. Особенностью изучаемых задач является то, что в них неизвестное внешнее воздействие определяется двумя функциями, одна из которых зависит только от пространственной переменной, другая же — только от временной.

Ключевые слова: параболические уравнения, обратные задачи, неизвестное внешнее воздействие, регулярные решения, существование, единственность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.205

В теории обратных коэффициентных задач для параболических уравнений — т. е. таких задач, в которых вместе с решением требуется также определить тот или иной коэффициент самого уравнения или (и) коэффициент, определяющий внешнее воздействие — можно выделить два направления. Первое их них предполагает, что неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) есть функция (функции) только от пространственных переменных; это направление можно назвать теорией обратных задач пространственного типа. Второе направление связано с ситуацией, в которой неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) есть функция (функции) только от временной переменной; данное направление можно назвать теорией обратных задач временного типа.

Исследованиям разрешимости обратных задач пространственного типа, исследованиям разрешимости обратных задач временного типа посвящено столь много работ, что перечислить даже малую их часть в рамках одной статьи невозможно. Значительно меньшее число работ посвящено теории обратных задач для параболических уравнений, не являющихся обратными задачами пространственного или временного типа. Так, в работах [1–10] изучалась разрешимость обратных задач, в которых неизвестный коэффициент является величиной постоянной. Далее, в работах [11, 12] изучались задачи, в которых неизвестный коэффициент содержал компоненты, зависящие как от пространственной, так и от временной переменной.

Именно последняя ситуация и будет изучаться в настоящей работе.

Все рассуждения и построения в настоящей работе будут проводиться на основе пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения и описание свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [13–15].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В прямоугольнике Q переменных (x,t), $x \in \Omega = (0,1)$, $t \in (0,T)$, $0 < T <= +\infty$, рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = F(x,t).$$

Пусть в этом уравнении функция $F(x,t)$ имеет вид

$$F(x,t) = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x)$$

с заданными функциями $f(x,t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(x)$, и функциями $q(x)$ и $p(t)$, подлежащими определению вместе с решением $u(x,t)$.

Задачи определения вместе с решением параболического уравнения также неизвестного внешнего воздействия — то есть неизвестной правой части — относятся к классу линейных обратных задач. В соответствии с данной в Введении классификацией направлений исследований в теории обратных коэффициентных задач изучаемые в работе задачи не будут ни задачами пространственного типа, ни задачами временного типа — их можно назвать обратными задачами комбинированного типа.

Дадим точные формулировки изучаемых задач.

Уточним вначале, что целью работы является доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых задач — решений, имеющих все обобщённые по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Пусть наряду с функциями $f(x,t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ заданы также функции $N(x)$ и $R(t)$, определённые при $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ соответственно.

Обратная задача I. Найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

$$u(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^1 N(x)u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T. \tag{5}$$

Обратная задача II. Найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условия (2), а также условий

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{6}$$

$$\int\limits_0^T R(t)u(x,t)dt = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{7}$$

В обратной задаче I условия (2) и (3) есть условия обычной первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, условия же (4) и (5) есть условия переопределения, причём условие (4) характерно для обратных задач пространственного типа, условие же (5) — для обратных задач временного типа.

В обратной задаче II условия $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ вместе с условием (2) определяют вторую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности, условие $u(0,t) = 0$ есть условие переопределения, характерное для обратных задач временного типа, условие же (7) есть условие переопределения, характерное для обратных задач пространственного типа.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ I

Выполним вначале некоторые формальные построения.

Пусть выполняется условие

$$\varphi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \tag{8}$$

Положим

$$f_1(x,t) = \varphi(t)\left(\frac{f(x,t)}{\varphi(t)}\right)_t, \quad p_1(t) = \frac{p(t)}{\varphi(t)}, \quad a(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}.$$

Разделив уравнение (1) на $\varphi(t)$ и продифференцировав по переменной t, получим с учётом введённых обозначений новое уравнение

$$u_{tt} - u_{xxt} - a(t)(u_t - u_{xx}) = f_1(x,t) + p_1'(t)\varphi(t)\psi(x). \tag{9}$$

Это уравнение вместе с условиями (2)–(5) определяет обратную задачу временного типа с неизвестной функцией $p_1'(t)$ в правой части. Найдя решение $[u(x,t), p_1'(t)]$ этой задачи, нетрудно далее найти решение $[u(x,t), q(x), p(t)]$ исходной обратной задачи I, но при этом необходимо возникает дополнительное условие для функции $p(t)$. Другими словами, в условия обратной задачи I необходимо добавить ещё одно условие — например, условие

$$p(t_0) = p_0, \quad t_0 \in [0, T]. \tag{10}$$

Продолжим построения. Умножим уравнение (9) на функцию $N(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по переменной x. Получим

$$\int_0^1 N(x)\left[a(t)u_{xx}(x,t) - u_{xxt}(x,t)\right]dx = \int_0^1 N(x)f_1(x,t)dx + p_1'(t)\varphi(t)\int_0^1 N(x)\psi(x)dx.$$

Для краткости записи обозначим

$$L_0 u = a(t)u - u_t, \quad N_0 = \int_0^1 N(x)\psi(x)dx, \quad f_0(t) = \int_0^1 N(x)f_1(x,t)dx, \quad p_0(t) = p_1'(t)\varphi(t).$$

Пусть выполняется условие

$$N_0 \neq 0. \tag{11}$$

Вычислим $p_0(t)$:

$$p_0(t) = \frac{1}{N_0}\left[\int_0^1 N(y)L_0 u_{yy}(y,t)dy - f_0(t)\right].$$

Подставив $p_0(t)$ в (9), получим уравнение:

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xxt} - a(t)(u_t - u_{xx}) = f_2(x,t) + \frac{\psi(x)}{N_0}\int_0^1 N(y)L_0 u_{yy}(y,t)dy, \tag{12}$$

где $f_2(x,t) = f_1(x,t) - \frac{\psi(x)f_0(t)}{N_0}$.

Уравнение (12) является «нагруженным» [16,17] (интегро-дифференциальным) уравнением соболевского типа; именно с помощью решения $u(x,t)$ этого уравнения находится решение $[u(x,t), p_1'(t)]$ построенной выше обратной задачи, и далее — решение $[u(x,t), q(x), p(t)]$ исходной обратной задачи.

Введём обозначения:

$$N_1 = \frac{1}{N_0}\|\psi''\|_{L_2(\Omega)}\|N''\|_{L_2(\Omega)}; \quad A_0 = \max_{[0,T]}\left[a^2(t) + a'(t)\right], \quad A_1 = \frac{A_0 T^2}{2} + 1.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (8) и (11), а также условия*

$$\varphi(t) \in C^2([0,T]), \quad a(t) \geqslant 0, \quad a'(t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]; \tag{13}$$

$$\psi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \psi(0) = \psi(1) = 0; \tag{14}$$

$$N(x) \in C^2(\Omega), \quad N(0) = N(1) = 0; \tag{15}$$

$$\begin{gathered} f_2(x,t) \in L_2(Q), \quad f_{2x}(x,t) \in L_2(Q), \quad f_{2xx}(x,t) \in L_2(Q), \\ f_2(0,t) = f_2(1,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]; \end{gathered} \tag{16}$$

$$N_1 T A_1^{\frac{1}{2}} < \sqrt{2}. \tag{17}$$

Тогда краевая задача (12), (2)–(4) имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть ε есть положительное число. Обозначим через L_ε оператор $Lu - \varepsilon u_{xxxx}$. Далее, пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач; *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$L_\varepsilon u = f_2(x,t) + \lambda \left[a(t)(u_t - u_{xx}) + \frac{\psi(x)}{N_0} \int\limits_0^1 N(y) L_0 u_{yy}(y,t)\,dy \right] \tag{18}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2)–(4), а также условия

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{19}$$

Поскольку и для применения метода регуляризации, и для применения метода продолжения по параметру требуются априорные оценки решения $u(x,t)$, установим вначале их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\begin{gathered} -\int\limits_Q L_\varepsilon u u_{xxxx}\,dxdt = -\int\limits_Q f_2(x,t) u_{xxxx}\,dxdt - \\ -\lambda \int\limits_Q \left[a(t)(u_t - u_{xx}) + \frac{\psi(x)}{N_0} \int\limits_0^1 N(y) L_0 u_{yy}(y,t)\,dy \right] u_{xxxx}\,dxdt. \end{gathered} \tag{20}$$

Используя условия (13)–(15), а также формулу интегрирования по частям, нетрудно от (20) перейти к неравенствам

$$\begin{gathered} \int\limits_Q u_{xxt}^2\,dxdt + \varepsilon \int\limits_Q u_{xxxx}^2\,dxdt \leqslant \left(\int\limits_Q u_{xxxx}^2\,dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q f_2^2\,dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + N_1 \left(\int\limits_Q u_{xx}^2\,dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q (L_0 u)^2\,dxdt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \leqslant \left(\int\limits_Q u_{xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q f_{2xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \\ + N_1 \left(\int\limits_Q u_{xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q (L_0 u)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Для функции $L_0 u$ имеет место оценка

$$\int\limits_Q (L_0 u)^2 dxdt \leqslant \frac{A_1 T}{\sqrt{2}} \int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt. \tag{23}$$

Из неравенств (21) и (23), (22) и (23) вытекают неравенства

$$\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \leqslant \left(\int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q f_2^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N_1 T A_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt, \tag{24}$$

$$\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \leqslant \left(\int\limits_Q u_{xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q f_{2xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N_1 T A_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt. \tag{25}$$

Условие (17) означает, что следствием (24) и (25) будут априорные оценки

$$\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \leqslant M_1 \int\limits_Q f_2^2 dxdt, \tag{26}$$

$$\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \leqslant M_2 \int\limits_Q f_{2xx}^2 dxdt, \tag{27}$$

причём постоянная M_1 в (26) зависит от ε, постоянная же M_2 в (27), наоборот, не зависит от ε.

Их неравенств (26) и (27), а также непосредственно из уравнения (12) вытекают ещё две оценки

$$\int\limits_Q u_{tt}^2 dxdt \leqslant M_3 \int\limits_Q f_2^2 dxdt, \tag{28}$$

$$\int\limits_Q u_{tt}^2 dxdt \leqslant M_4 \int\limits_Q f_{2xx}^2 dxdt \tag{29}$$

с постоянной M_3, зависящей от числа ε, и с постоянной M_4, не зависящей от ε.

Заметим, что краевая задача (18), (2)–(4), (19) при $\lambda = 0$, при фиксированном ε и при принадлежности функции $f_2(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$, $u_{xxxx}(x,t) \in L_2(Q)$ — это нетрудно доказать с помощью классического метода Галеркина с выбором специального базиса [18] и априорных оценок (26) и (28), справедливых и при $\lambda = 0$. Используя этот факт, теорему о методе продолжения по параметру (см. [19], гл. III, §14) и те же оценки (26) и (28), получим, что задача (18), (2)–(4), (19) при всех λ из отрезка $[0,1]$, при фиксированном ε и при принадлежности функции

$f_2(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$, $u_{xxxx}(x,t) \in L_2(Q)$.

Рассмотрим теперь задачу (18), (2)–(4), (19) при $\lambda = 1$. Выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел такую, что $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Согласно доказанному выше, эта задача при $\varepsilon = \varepsilon_m$ имеет регулярное решение $u_m(x,t)$. Оценки (27) и (29) означают для этих решений семейства $\{u_{mxxt}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{u_{mtt}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\sqrt{\varepsilon_m} u_{mxxxx}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ равномерно ограничены в пространстве $L_2(Q)$.

Используя далее свойство рефлексивности гильбертова пространства, нетрудно показать, что существует последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел, а также функция $u(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости:

- $u_{m_k}(x,t) \to u(x,t)$ *слабо в пространстве* $W_2^2(Q)$,
- $u_{m_k xxt}(x,t) \to u_{xxt}(x,t)$ *слабо в пространстве* $L_2(Q)$,
- $u_{m_k xxxx}(x,t) \to 0$ *слабо в пространстве* $L_2(Q)$,
- $u_{m_k}(x,t) \to u(x,t)$ *почти всюду в* Q,
- $u_{m_k t}(x,t) \to u_t(x,t)$ *почти всюду в* Q.

Последние две сходимости выполняются вследствие теорем вложения, см. [13–15].

Из указанных сходимостей очевидным образом вытекает, что предельная функция $u(x,t)$ и будет искомым решением краевой задачи (12), (2)–(4). □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (8), (11), (13)–(15), (17). Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_x(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$, $f(0,t) = f(1,t) = 0$ *при* $t \in [0,T]$, *обратная задача I при выполнении условия (10) с произвольно заданным числом* p_0 *имеет решение* $\{u(x,t), q(x), p(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$, $q(x) \in L_2(Q)$, $p(t) \in W_2^1([0,T])$.

Доказательство. Указанные в формулировке теоремы условия на функцию $f(x,t)$ означают, что выполняется условие (16). Согласно теореме 1, краевая задача (12), (2)—(4) имеет регулярное решение $u(x,t)$. Построенная по этой функции функция $p_0(t)$ будет принадлежать пространству $L_2([0,T])$.

Умножим уравнение (12) на функцию $N(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. После несложных выкладок получим равенство

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a(t)\frac{\partial}{\partial t}\right) I(t) = 0, \tag{30}$$

в котором через $I(t)$ обозначена функция

$$I(t) = \int_0^1 N(x)u(x,t)dx.$$

Поскольку вследствие условия (3) выполняется $I(0) = I(T) = 0$ и поскольку функция $a(t)$ неотрицательна, то из (30) следует, что $I(t)$ есть тождественно нулевая на отрезке $[0,T]$ функция. А это означает, что для решения $u(x,t)$ краевой задачи (12), (2)–(4) выполняется условие (5).

Определим функцию $p_1(t)$ как решение задачи

$$p_1'(t) = \frac{p_0(t)}{\varphi(t)}, \quad p_1(t_0) = \frac{p_0}{\varphi(t_0)};$$

далее определим функцию $p(t)$: $p(t) = p_1(t)\varphi(t)$. При $x \in \Omega$ выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\left[(u_t - u_{xx}) - p(t)\psi(x) - f(x,t)\right]\right) = 0. \tag{31}$$

Положим

$$q(x) = \frac{1}{\varphi(t_0)}\left[(u_t(x,t_0) - u_{xx}(x,t_0)) - p_0\psi(x) - f(x,t_0)\right].$$

Интегрируя (31) по t от t_0 до текущей точки получим, что функция $u(x,t)$ (решение краевой задачи (12), (2)–(4)), $q(x)$ и $p(t)$ связаны в прямоугольнике Q уравнением (1). Поскольку для функции $u(x,t)$ выполняются условия (2)–(5), то функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$ и дадут решение обратной задачи I.

Принадлежность функций $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$ требуемым классам показана по ходу доказательства. □

Некоторые комментарии к доказанным теоремам будут даны в конце работы.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ II

Вновь начнём с предварительных преобразований.

Пусть выполняется условие

$$\psi(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \quad R_0 = \int_0^T R(t)\varphi(t)dt \neq 0. \tag{32}$$

Положим

$$\tilde{f}_1(x,t) = \psi(x)\left(\frac{f(x,t)}{\psi(x)}\right)_x, \quad \tilde{f}_0(x) = \int_0^T R(t)\tilde{f}_1(x,t)dt, \quad \tilde{f}_2(x,t) = \tilde{f}_1(x,t) - \frac{\varphi(t)\tilde{f}_0(x)}{R_0},$$

$$q_1(x) = \frac{q(x)}{\psi(x)}, \quad q_0(x) = q_1'(x)\psi(x), \quad b(x) = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

Первым вспомогательным уравнением для обратной задачи II будет уравнение

$$u_{xt} - u_{xxx} - b(x)(u_t - u_{xx}) = \tilde{f}_1(x,t) + q_0(x)\varphi(t),$$

дающее обратную задачу нахождения функций $u(x,t)$ и $q_0(x)$. Умножая это уравнение на функцию $R(t)$ и интегрируя по отрезку $[0,T]$, получим «нагруженное» дифференциальное уравнение для функции $u(x,t)$:

$$u_{xt} - u_{xxx} - b(x)(u_t - u_{xx}) = \tilde{f}_2(x,t) + \frac{\varphi(t)}{R_0}\int_0^T R(t)\left[u_{xt} - b(x)u_t\right]dt. \tag{33}$$

Решение краевой задачи с условиями (2) и (6) для этого уравнения и позволит найти решение $\{u(x,t), q(x), p(t)\}$ обратной задачи II.

Положим

$$\varphi_0 = \max_{[0,T]}|\varphi(t)|, \quad b_0 = \max_{[0,1]}|b(x)|,$$

$$R_1 = \|(T-t)^{\frac{1}{2}}R(t)\|_{L_2([0,T])}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{2}\varphi_0 T R_1(1+b_0^2)^{\frac{1}{2}}}{R_0}.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условие (32), а также условия*

$$\varphi(t) \in C([0,T]), \quad \psi(x) \in C^1([0,1]); \tag{34}$$

$$b'(x) \geqslant 0 \quad \text{\textit{при}} \quad x \in [0,1], \quad b(1) \leqslant 0; \tag{35}$$

$$R(t) \in C([0,T]), \quad (T-t)^{-\frac{1}{2}} R(t) \in L_2([0,T]); \tag{36}$$

$$\frac{Tb_0^2}{2} + R_2 < 1. \tag{37}$$

Тогда для любой функции $\tilde{f}_2(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ краевая задача (33), (2), (6) имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_x(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения по параметру с аналогичным теореме 1 использованием чисел λ из отрезка $[0,1]$. Покажем, что для решений краевой задачи с условиями (2) и (6) для соответствующего уравнения с параметром λ имеют место нужные априорные оценки. Поскольку процедура получения оценок одинакова для всех чисел из отрезка $[0,1]$, рассмотрим лишь случай $\lambda = 1$ — то есть случай задачи (33), (2), (6).

Пусть T_0 есть число из промежутка $(T, +\infty)$. Умножим уравнение (33) на функцию $(T_0 - t)u_{xt}(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. После несложных выкладок получим равенство

$$\int\limits_Q \left[\frac{1}{2}u_{xx}^2 + (T_0-t)u_{xt}^2\right] dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_Q b'(x)(T_0-t)u_t^2 dxdt + \frac{T_0-T}{2}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,T)dx-$$
$$-\frac{b(1)}{2}\int\limits_0^T (T_0-t)u_t^2(1,t)dt = \int\limits_Q (T_0-t)\tilde{f}_2 u_{xt} dxdt - \int\limits_Q b(x)(T_0-t)u_{xx}u_{xt}dxdt + \tag{38}$$
$$+\frac{1}{R_0}\int\limits_Q (T_0-t)\varphi(t)u_{xt}(x,t)\left(\int\limits_0^T R(\tau)\left[u_{x\tau} - b(x)u_\tau\right] d\tau\right) dxdt.$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (38):

$$\left|\frac{1}{R_0}\int\limits_Q (T_0-t)\varphi(t)u_{xt}(x,t)\left(\int\limits_0^T R(\tau)\left[u_{x\tau} - b(x)u_\tau\right] d\tau\right) dxdt\right| \leqslant$$
$$\frac{\varphi_0}{R_0}\left(\int\limits_Q (T_0-t)^2 u_{xt}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q \left(\int\limits_0^T R(\tau)\left[u_{x\tau} - b(x)u_\tau\right] d\tau\right)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\frac{\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}}}{R_0}\left(\int\limits_Q (T_0-t) u_{xt}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q \left(\int\limits_0^T \frac{R(\tau)}{\sqrt{T_0-\tau}}\sqrt{T_0-\tau}\left[u_{x\tau} - b(x)u_\tau\right] d\tau\right)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\frac{\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}}}{R_0}\left(\int\limits_Q (T_0-t) u_{xt}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q \left(\int\limits_0^T \frac{R^2(\tau)}{T_0-\tau} d\tau\right)\left(\int\limits_0^T (T_0-\tau)\left[u_{x\tau} - b(x)u_\tau\right]^2 d\tau\right) dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\frac{\sqrt{2}\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}} R_1}{R_0}\left(\int\limits_Q (T_0-t)u_{xt}^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q\left(\int\limits_0^T (T_0-\tau)u_{x\tau}^2d\tau + b_0^2\int\limits_0^T (T_0-\tau)u_\tau^2 d\tau\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \tag{39}$$
$$\frac{\sqrt{2}\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}} R_1(1+b_0^2)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}}{R_0}\int\limits_Q (T_0-t)u_{xt}^2dxdt.$$

Прежде всего заметим, что вследствие условия (37) существует число T_0^* такое, что

$$T_0^* > T, \quad \frac{T_0^* b_0^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\varphi_0 (T_0^*)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} R_1(1+b_0^2)^{\frac{1}{2}}}{R_0} < 1. \tag{40}$$

Обозначим для краткости

$$R_2^* = \frac{\sqrt{2}\varphi_0 (T_0^*)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} R_1(1+b_0^2)^{\frac{1}{2}}}{R_0}.$$

Неравенства (39) и (40), а также неравенство Юнга означают, что выполняется оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_Q u_{xt}^2dxdt + (1-R_2^*)\int\limits_Q (T_0^*-t)u_{xt}^2dxdt \leqslant \frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_Q u_{xx}^2dxdt +$$
$$+\frac{T_0^* b_0^2}{2\delta_0^2}\int\limits_Q (T_0^*-t)u_{xt}^2dxdt + \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q (T_0^*-t)u_{xt}^2dxdt + \frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_Q (T_0^*-t)\tilde{f}_2^2dxdt,$$

в котором δ_0 и δ_1 есть произвольные положительные числа.

Зафиксируем число δ_0 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{T_0^* b_0^2}{2(1-R_2^*)} < \delta_0^2 < 1$$

(вследствие неравенств (40) это возможно). Подбирая далее число δ_1 малым, окончательно получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (33), (2), (6) выполняется априорная оценка

$$\int\limits_Q (u_{xx}^2 + u_{xt}^2)dxdt \leqslant K_1\int\limits_Q \tilde{f}_2^2dxdt, \tag{41}$$

постоянная K_1 в которой определяется лишь функциями $\psi(x)$, $\varphi(t)$, $R(t)$, а также числом T.

Оценка в пространстве $L_2(Q)$ для функции $u_{xxx}(x,t)$ очевидным образом вытекает из оценки (41); суммируя, получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (33), (2), (6) имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u_x\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leqslant K_0\|\tilde{f}_2\|_{L_2(Q)}, \tag{42}$$

постоянная K_0 в которой определяется лишь функциями $\psi(x)$, $\varphi(t)$, $R(t)$, а также числом T.

Поскольку разрешимость краевой задачи с условиями (2) и (6) для уравнения

$$u_{xt} - u_{xxx} = \tilde{f}_2$$

очевидна, то из априорной оценки (42) и из теоремы о методе продолжения по параметру следует, что краевая задача (33), (2), (6) разрешима в требуемом классе. □

Как и для обратной задачи I, в обратной задаче II для однозначного определения функции $q(x)$ потребуется дополнительное условие — например, условие

$$q(x_0) = q_0, \quad x_0 \in [0,1] \tag{43}$$

(q_0 здесь есть произвольное действительное число).

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (32), (34)–(37). Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_x(x,t) \in L_2(Q)$, *обратная задача II с условием (43) для функции* $q(x)$ *имеет решение* $\{u(x,t), q(x), p(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_x(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $q(x) \in W_2^1(\Omega)$, $p(t) \in L_2([0,T])$.

Доказательство. Теорема 3 позволяет определить функцию $q_0(x)$ (с помощью функции $u(x,t)$ и далее — функцию $q_1(x)$ с помощью равенства

$$q_1'(x) = \frac{q_0(x)}{\psi(x)}, \quad q_1(x_0) = \frac{q_0}{\psi(x_0)}.$$

Найдя функцию $q_1(x)$, нетрудно далее определить функции $q(x)$ и $p(t)$:

$$q(x) = q_1(x)\psi(x), \quad p(t) = -\frac{1}{\psi(0)}\left[f(0,t) + u_{xx}(0,t) + q(0)\varphi(t)\right].$$

Выполнение для функции $u(x,t)$ условия переопределения показывается аналогично тому, как такой же факт доказывался в теореме 2. Принадлежность функций $q(x)$ и $p(t)$ требуемым классам очевидна.

Теорема доказана полностью. □

4. КОММЕНТАРИИ И ДОПОЛНЕНИЯ

1. Теоремы 1 и 3 представляются вспомогательными для доказательства разрешимости задач I и II. Вместе с тем, на взгляд авторов, они имеют и самостоятельное значение как теоремы о разрешимости «нагруженных» (интегро-дифференциальных) уравнений.

2. Вполне аналогично доказательству теоремы 2 можно установить разрешимость обратной задачи I в многомерном случае — то есть в случае, когда $x = (x_1, x_2, .., x_n)$, Ω есть ограниченная область с гладкой границей, уравнение же (1) имеет вид

$$u_t - \triangle u = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x).$$

3. Также нетрудно, используя методы настоящей работы, изучить разрешимость следующего аналога обратной задачи I: *найти функции* $u(x,t)$, $q(x)$, $p_1(t)$,..,$p_n(t)$, *связанные в цилиндре* Q *уравнением*

$$u_t - \triangle u = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p_1(t)\psi_1(x) + .. + p_n(t)\psi_n(x),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ *условий*

$$u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega;$$
$$u(x,t)|_S = 0, \quad S = \partial\Omega \times (0,T);$$
$$\int_\Omega N_i(x)u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T, \quad i = 1,..,m.$$

Здесь сразу предполагается, что изучаемая задача многомерна по пространственным переменным. Функции $N_i(x)$, $i = 1,..,m$, безусловно предполагаются линейно независимыми на множестве Ω.

4. Аналогичным образом можно изучить обратную задачу II в более общей, нежели в работе, постановке: *найти функции* $u(x,t)$, $q_1(x)$,.., $q_m(x)$, $p(t)$, *связанные в прямоугольнике* Q *уравнением*

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) + q_1(x)\varphi_1(t) + .. + q_m(x)\varphi_m(t) + p(t)\psi(x),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ *условий*

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T;$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega;$$
$$\int_0^1 R_i(t)u(x,t)dt = 0, \quad i = 1,..,m.$$

(как и в предыдущей задаче, здесь считается, что ядра интегральных условий образуют линейно независимую систему).

5. Наличие в левой части уравнения (1) младших членов — слагаемых $b(x,t)u_x$, $c(x,t)u$ — не влияет на суть результатов о разрешимости, но существенно усложняет выкладки. Также не влияет на суть результатов варьирование граничных условий — так, в обратной задаче I граничное условие первой начально-краевой задачи можно заменить граничным условием второй или третьей краевых задач, вместо условия Коши (2) в обратной задаче II можно задавать нелокальное условие $u(x,0) = \gamma u(x,T)$.

6. Условие (35) в обратной задаче II можно заменить условием

$$b(x) = b_0(x) + b_1(x), \quad b_0'(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in [0,1], \quad b_0(1) \leqslant 0, \quad |b_1(x)| \leqslant b_1,$$

предполагая далее, что число b_1 мало.

7. Условие (17) теорем 1 и 2, (37) теорем 3 и 4 заведомо выполняются, например, если число T мало.

8. Условия (10) и (43) (или же их аналоги) необходимы для однозначного определения решений обратной задачи I и, соответственно, обратной задачи II. Действительно, если в обратной задаче I отказаться от условия (10), то наряду с решением $\{u(x,t), q(x), p(t)\}$ решением будет вектор-функция $\{u(x,t), q(x) - \bar{p}\psi(x), p(t) + \bar{p}\varphi(t)\}$ с произвольным действительным числом $\bar{p}$.

   Аналогичное утверждение имеет место и для обратной задачи II.

   Что же касается аналогов условий (10) или (43), то ими можно назвать любые условия, характеризующие единственность решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка — например, нелокальные условия $p(0) = \alpha p(T)$ или $q(0) = \beta q(1)$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23–21–00082). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mola G.* Reconstruction of two constant coefficients in linear anisotropic diffusion model // Inverse Probl. 2016. V. 32, N 11. Article 115016.
2. *Lorenzi A., Mola G.* Identification of real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces // Inverse Probl. Imaging. 2011. V. 5, N 3. P. 695–714.
3. *Lorenzi A.* Recovering two constants in a linear parabolic equation // J. Phys. Conf. Ser. 2007. V.73. P.1-15.
4. *Mola G.* Identification of the Diffussion Coefficient in Linear Evolution Equations in Hilbert Spaces // J. Abstr. Diff. Equat. Appl. 2011. V. 2. P.18–28.
5. *Lorenzi A., Mola G.* Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equation // Inverse Probl. 2012. V. 28, N 7.
6. *Кожанов А. И., Сафиуллова Р. Р.* Определение параметров в телеграфном уравнении // Уфимск. матем. журн. 2007. Т. 9, № 1. С. 63–74.
7. *Kozhanov A. I.* Hyperbolic Equations with Unknown Coefficients // Symmetry. 2020. V. 12, N 9. Article 1539.
8. *Lyubanova A. Sh.* Identification of a constant coefficient in an elliptic equation // Appl. Anal. 2008. V. 87, N 10–11. P. 1121–1128.
9. *Велисевич А. В.* Об одной обратной задаче для эллиптического уравнения со смешанными граничными условиями третьего рода // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2021. Т. 14, № 5. С. 659–666.
10. *Любанова А. Ш.* Идентификация коэффициента в старшем члене псевдопараболического уравнения типа фильтрации // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1315–1330.
11. *Саватеев Е. Г.* О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 177–185.
12. *Фроленков И. В., Кригер Е. Н.* Об одной задаче идентификации функции источника специального вида для многомерного параболического уравнения с данными Коши // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2013. V. 6, N 2. P. 186–199.
13. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1973.
14. *Ладыженская О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
15. *Triebel H.* Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Amsterdam: Noth-Holland Publ., 1978.
16. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.
17. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: КЦ ИТПМ, 1995.
18. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
19. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

SOLVABILITY ANALYSIS OF PROBLEMS OF DETERMINING EXTERNAL INFLUENCE OF COMBINED TYPE IN PROCESSES DESCRIBED BY PARABOLIC EQUATIONS

A. I. Kozhanov[1,2a], **G. V. Namsaraeva**[3b]

[1] *1Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2] *Dorji Banzarov Buryat State University, Ulan-Ude, 670000 Russia,*
[3] *East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, 670013 Russia*

E-mails: [a]kozhanov@math.nsc.ru, [b]gerel@inbox.ru

Received 22.02.2024, revised 07.03.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. The aim of this paper is to study the solvability of inverse problems of determining, together with the solution of the heat equation, its right-hand side or an unknown external influence. The specific feature of the problems studied is that the unknown external influence is determined by two functions of which one depends only on the spatial variable and the other, only on the time variable.

Keywords: parabolic equation, inverse problem, unknown external influence, regular solution, existence, uniqueness.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.205

REFERENCES

1. G. Mola, "Reconstruction of two constant coefficients in linear anisotropic diffusion model," Inverse Probl. **32** (11), 115016 (2016).
2. A. Lorenzi and G. Mola, "Identification of real constant in linear evolution equation in a Hilbert space," Inverse Probl. Imaging **5** (3), 695–714 (2011).
3. A. Lorenzi, "Recovering two constants in a linear parabolic equation," J. Phys. Conf. Ser. **73**, 1–15 (2007).
4. G. Mola, "Identification of the diffusion coefficient in linear evolution equations in Hilbert spaces," J. Abstract Differ. Equat. Appl. **2**, 18–28 (2011).
5. A. Lorenzi and G. Mola, "Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equation," Inverse Probl. **28** (7) (2012).
6. A. I. Kozhanov and R. R. Safiullova, "Determination of parameters in telegraph equation," Ufa Math. J. **9** (1), 62–74 (2017).
7. A. I. Kozhanov, "Hyperbolic equations with unknown coefficients," Symmetry **12** (9), 1539 (2020).
8. A. Sh. Lyubanova, "Identification of a constant coefficient in an elliptic equation," Appl. Anal. **87** (10–11), 1121–1128 (2008).
9. A. V. Velisevich, "On one inverse problem for an elliptic equation with mixed boundary conditions of the third kind," Zh. SFU Ser. Mat. Fiz. **14** (5), 659–666 (2021) [in Russian].
10. A. Sh. Lyubanova, "Identification of a coefficient in the leading term of a pseudoparabolic equation of filtration," Sib. Math. J. **54** (6), 1046–1058 (2013).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 2, pp. 282–293.

11. E. G. Savateev, “On the problem of identification of a coefficient in a parabolic equation,” Sib. Math. J. **36** (1), 160–167 (1995).
12. I. V. Frolenkov and E. N. Kriger, “On one problem of identification of a source function of a special type for a multidimensional parabolic equation with Cauchy data,” Zh. SFU Ser. Mat. Fiz. **6** (2), 186–199 (2013) [in Russian].
13. S. L. Sobolev, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
14. O. A. Ladyzhenskaya, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].
15. H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators* (North-Holland, Amsterdam, 1978).
16. A. M. Nakhushev, *Loaded Equations and Applications* (Nauka, Moscow, 2012) [in Russian].
17. M. T. Dzhenaliev, *To the Theory of Linear Boundary Value Problems for Loaded Differential Equations* (KTs ITPM, Almaty, 1995) [in Russian].
18. V. A. Trenogin, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
19. J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des probl‘emes aux limites non linéaires* (Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969; Mir, Moscow, 1972).