

УДК 519.6:004.4

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2024 Е. В. Антипина^{1a}, С. А. Мустафина^{1b}, А. Ф. Антипин^{2c}

¹Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32, г. Уфа 450076, Россия,

²Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий,
просп. Ленина, 49, г. Стерлитамак 453103, Россия

E-mails: ^astepashinaev@ya.ru, ^bmustafina_sa@mail.ru, ^candrejantipin@ya.ru

Поступила в редакцию 10.09.2023 г.; после доработки 17.04.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

Статья посвящена разработке численного алгоритма для поиска приближенного решения задачи оптимального управления с терминальными ограничениями и ограничениями на управление. Алгоритм основан на редукции исходной задачи оптимального управления к конечномерной задаче и применении для её решения метода штрафов и метода дифференциальной эволюции. Особенностью предложенного подхода является независимость найденного решения от выбора начального приближения. Работа алгоритма иллюстрируется его применением для решения прикладных задач оптимального управления. Полученные результаты вычислительных экспериментов согласуются с результатами расчётов на основе других методов.

Ключевые слова: оптимальное управление, терминальные ограничения, дифференциальная эволюция, метод штрафов, эволюционные вычисления.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.302

ВВЕДЕНИЕ

Поиск решения прикладных задач оптимального управления часто связан с нелинейностью управляемой системы, наличием ограничений, накладываемых как на управление, так и на фазовые переменные. Наличие фазовых ограничений усложняет решение оптимизационных задач как в теоретическом исследовании свойств оптимальных процессов, так и в реализации алгоритмов численного решения. Однако учёт фазовых ограничений позволяет учитывать особенности протекания процесса, и, тем самым, делает его математическое описание более точным.

Один из подходов к решению задач оптимального управления с фазовыми ограничениями заключается в получении точных необходимых условий оптимальности и построении на их основе вычислительных процедур [1]. Необходимые условия оптимальности решений задач оптимального управления с фазовыми ограничениями в форме принципа максимума Понтрягина получены в работах [2, 3]. Однако вычислительные процедуры, построенные на основе необходимых условий, достаточно трудоёмки и трудно применимы при решении прикладных задач.

Другой подход предполагает сведение задачи с ограничениями на фазовые переменные к задаче без ограничений путём применения метода штрафов. В данном методе вводится в рассмотрение вспомогательная функция путём добавления к критерию качества управления

исходной задачи «штрафа» за нарушение ограничений, накладываемых на фазовые переменные [4]. Затем решается задача оптимального управления без ограничений, где критерием качества управления выступает построенная вспомогательная функция. Численная реализация данного метода представлена в работах [5,6]. Последовательность оптимизационных задач без ограничений решается с помощью градиентного метода. Недостатком градиентных методов является чувствительность решения оптимизационной задачи к выбору начального приближения, что может привести к попаданию решения в локальный экстремум или в область, противоречащую физическому смыслу задачи.

При решении прикладных задач часто бывает достаточно получить приближенное значение управляющего параметра. Это связано с ограниченностью времени для определения управляющего воздействия на управляемый процесс с целью достижения показателей заданного уровня в режиме реального времени. Поэтому возникает необходимость в разработке численных методов построения оптимального управления, которые позволяют получить приближенное решение задачи с фазовыми ограничениями и при этом легкорезализуемы на практике.

В настоящее время для решения оптимизационных задач широко применяются эволюционные вычисления [7,8]. Эволюционные методы не используют в процессе поиска решения ни необходимые, ни достаточные условия оптимальности. С их помощью можно найти решение, которое может отличаться от оптимального, но при этом является приемлемым с практической точки зрения [9]. В отличие от классических методов оптимизации, эволюционные методы могут применяться в случае, когда отсутствует информация о свойствах исследуемой функции.

Одним из методов эволюционного поиска является метод дифференциальной эволюции [10,11]. Это метод многомерной оптимизации, позволяющий определять глобальный экстремум нелинейных, недифференцируемых и мультимодальных функций без вычисления производных целевой функции. Важной особенностью метода дифференциальной эволюции является независимость полученного решения от выбора его начального приближения [12]. Отсутствие чувствительности к начальному приближению достигается за счёт того, что на каждой итерации оптимизируется не одно возможное решение, а одновременно рассматривается их совокупность, что позволяет увеличить область поиска.

По сравнению с другими методами, метод дифференциальной эволюции позволяет за меньшее время найти приближенное значение параметров оптимального управления процессом. В работе [13] показано, что для решения оптимизационных задач с помощью метода дифференциальной эволюции требуется меньше времени, в отличие от других стохастических методов оптимизации. В работе [14] приведено сравнение метода дифференциальной эволюции с генетическим алгоритмом и адаптивным методом имитации отжига, продемонстрирована необходимость меньшего количества обращений к целевой функции, по сравнению с вышеперечисленными численными методами оптимизации.

Целью работы является разработка численного алгоритма поиска приближенного решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями и с ограничениями на управление на основе метода штрафов и метода дифференциальной эволюции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x^0, \quad (2)$$

где $t \in [t_0, T]$ — время, $x \in R^n$ — вектор фазовых переменных, $u(t) \in R^m$ — вектор управляющих функций, $f(t, x(t), u(t))$ — непрерывная вместе со своими частными производными вектор-функция.

На управление наложены ограничения

$$\alpha_j(t) \leq u_j(t) \leq \beta_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3)$$

Пусть заданы краевые условия в конце процесса управления ($t = T$):

$$g_j(x(T)) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad (4)$$

где $g_j(x(T))$ — непрерывно-дифференцируемые функции по всем аргументам.

Зададим критерий оптимальности как функцию конечного состояния системы

$$J(u) = g_0(x(T)). \quad (5)$$

Задача оптимального управления для процесса (1), (2) с терминальными ограничениями состоит в поиске управления $u(t)$, которое с учётом ограничений (3) приводит процесс в точку фазового пространства, в которой выполнено условие (4), и функционал (5) достигает наименьшего значения.

Для построения аппроксимирующей задачи на интервале $[t_0, T]$ введём сетку дискретизации с узлами t_0, t_1, \dots, t_N и шагом $h = \frac{T - t_0}{N}$ такими, что $t_0 < t_1 < \dots < t_N$, $t_N = T$, в которых будем искать управляющие функции $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$. Для получения промежуточных значений управляющих функций используем кусочно-постоянную аппроксимацию

$$u_j(t) = u_j(t_k) = u_{jk}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Терминальные ограничения (4) преобразуются к виду

$$g_j(x(t_N)) = 0, \quad j = \overline{1, p}. \quad (6)$$

Тогда конечномерная задача, аппроксимирующая задачу (1)–(5) состоит в определении вектора управления $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$, при котором с учётом ограничений

$$\alpha_{jk} \leq u_{jk} \leq \beta_{jk}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{0, N-1},$$

где $\alpha_{jk} = \alpha_j(t_k)$, $\beta_{jk} = \beta_j(t_k)$, и условий (6) критерий оптимальности достигает наименьшего значения, то есть

$$g_0(x(t_N)) \rightarrow \min.$$

Дифференциальные уравнения (1), описывающие управляемый процесс, приближенно заменим разностными, например, с помощью численного метода Рунге–Кутты четвёртого порядка

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= x(t_i) + h(K_{1i} + 2K_{2i} + 2K_{3i} + K_{4i})/6, \\ K_{1i} &= f(t_i, x_i, u_i), \\ K_{2i} &= f(t_i + h/2, x_i + K_{1i}h/2, u_i), \\ K_{3i} &= f(t_i + h/2, x_i + K_{2i}h/2, u_i), \\ K_{4i} &= f(t_i + h, x_i + K_{3i}, u_i). \end{aligned} \quad (7)$$

2. АЛГОРИТМ ПОИСКА СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Сформулируем пошаговый алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления с терминальными ограничениями на основе метода штрафных функций и дифференциальной эволюции.

Для перехода от задачи с терминальными ограничениями к задаче без ограничений введём в рассмотрение вспомогательный функционал

$$I(u) = J(u) + R(u, z^s) \rightarrow \min, \quad (8)$$

где $R(u, z^s) = (z^s/2) \cdot \sum_{j=1}^p (g_j(x(T)))^2$ — штрафной функционал, z^s — параметр штрафа, вычисляемый на s -й итерации. Если ограничения (4) нарушены и $z^s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то $R(u, z^s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Для поиска решения задачи оптимального управления с критерием оптимальности (8) применим метод дифференциальной эволюции. Работа метода основана на имитации эволюционных процессов, которым подвергаются особи, образующие популяцию [15]. Каждой особи ставится в соответствие значение функции приспособленности, которой является критерий оптимальности (8). Для задачи на поиск минимума наиболее приспособленной особи соответствует наименьшее значение целевого функционала (8). Путём применения математических операторов отбора, скрещивания и мутации происходит изменение и обновление популяции, в результате чего в новое поколение переходят наиболее приспособленные особи [16]. Итеративная процедура смены популяций происходит до тех пор, пока не будет выполнено условие окончания работы алгоритма.

В качестве особи рассмотрим параметр управления

$$u = \begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N-1} \\ u_{20} & u_{21} & \dots & u_{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m0} & u_{m1} & \dots & u_{mN-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

где $u_{jk} = u_j(t_k)$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N-1}$. Тогда популяцией является набор из P особей $u^l = (u_1^l, u_2^l, \dots, u_m^l)^T$, где l — номер особи в популяции ($l = \overline{0, P}$).

Алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления с терминальными условиями и ограничениями на управление состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задать параметры метода штрафов: начальное значение параметра штрафа z^0 , параметр увеличения штрафа $b > 1$ (обычно выбирается $z^0 = 0.01, 0.1, 1$; $b \in [4, 10]$ [17]), параметр завершения поиска решения $\varepsilon_2 > 0$. Задать параметры метода дифференциальной эволюции: параметр скрещивания $ps \in [0, 1]$, параметр мутации $pt \in [0.5, 1]$ [14], размер популяции P , параметры завершения вычислений $d, \varepsilon_1 > 0$. Установить счётчик итераций $s = 1$.

Шаг 2. Заполнить начальную популяцию случайными числами из области допустимых значений управления:

$$u_{jk}^l(0) = \alpha_{jk} + q_{jk}(\beta_{jk} - \alpha_{jk}),$$

где $q_{jk} \in [0, 1]$ — случайное число, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N-1}$, $l = \overline{1, P}$.

Шаг 3. Вычислить значение функции приспособленности (8) для каждой особи u^l ($l = \overline{1, P}$), используя разностную схему (7).

Шаг 4. Задать в качестве особи-мишени первую особь текущей популяции: $u^{mish} := u^1$, $mish := 1$.

Шаг 5. Найти в популяции особь u^{best} с наилучшим значением функции приспособленности.

Шаг 6. Применить оператор мутации. Для этого выбрать из текущей популяции четыре различных элемента u^{num1} , u^{num2} , u^{num3} , u^{num4} , которые не совпадают ни с особью-мишенью u^{mish} , ни с наиболее приспособленной особью u^{best} . Сгенерировать новую особь u^{mut} :

$$u^{mut} := u^{best} + pm \cdot (u^{num1} + u^{num2} - u^{num3} - u^{num4}).$$

Шаг 7. Подвергнуть процедуре скрещивания особь, полученную в результате мутации u^{mut} и особь-мишень u^{mish} . Сформировать новую пробную особь u^{prob} по правилу:

$$u_{jk}^{prob} = \begin{cases} u_{jk}^{mut}, & w_{jk} \leq ps, \\ u_{jk}^{mish}, & w_{jk} > ps, \end{cases}$$

где $w_{jk} \in [0, 1]$ — случайное число, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N-1}$.

Шаг 8. Вычислить значение функции приспособленности для пробной особи u^{prob} , используя формулы (7).

Шаг 9. Обновить популяцию. Если $J(u^{prob}) < J(u^{mish})$, то в новую популяцию поместить пробную особь u^{prob} , иначе — особь-мишень u^{mish} .

Шаг 10. Если в качестве мишени рассматривались все особи популяции ($mish = P$), то перейти к шагу 11. Иначе увеличить номер особи-мишени $mish$ на 1 и перейти к шагу 5.

Шаг 11. Проверить условие окончания работы алгоритма дифференциальной эволюции. Вычислить расстояние ρ_{ij} между элементами текущей $u^i(s)$ и предыдущей $u^j(s-1)$ популяций ($i, j = \overline{0, P}$), а также изменение функций приспособленности Δ_{ij} ($s \geq 2$):

$$\rho_{ij} = \rho(u^i(s), u^j(s-1)) = \|u^i(s) - u^j(s-1)\|,$$

$$\Delta_{ij} = \Delta(u^i(s), u^j(s-1)) = |J(u^i(s)) - J(u^j(s-1))|, \quad i, j = \overline{0, P}.$$

Если на протяжении d поколений выполнены условия $\rho_{ij} < \varepsilon_1$, $\Delta_{ij} < \varepsilon_1$, то есть происходит незначительное изменение популяции и функций приспособленности, то перейти к шагу 12. Иначе увеличить счётчик итераций s на 1 и перейти к шагу 4.

Шаг 12. Проверить условие окончания поиска решения. Выбрать из последней популяции особь u^{best} , которой соответствует наилучшее значение функции приспособленности. Если $R(u, z^s) > \varepsilon_2$, то увеличить значение штрафа: $z^{s+1} = b \cdot z^s$ и перейти к шагу 4. Если $R(u, z^s) \leq \varepsilon_2$, то остановить работу алгоритма. Приближенным решением задачи оптимального управления с терминальными ограничениями будет наиболее приспособленная особь u^{best} из последней популяции.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки эффективности разработанного алгоритма проведён ряд вычислительных экспериментов по решению практических задач оптимального управления с закреплённым правым концом траектории. Для проведения расчётов авторами разработано программное средство на языке программирования Delphi.

Задача посадки тяжёлого летательного аппарата

Сингулярно возмущённая задача оптимального управления планирующим спуском летательного аппарата имеет вид [18]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\cos(x_3)}{aC(u)x_2^2}, \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= -\frac{1}{x_2} - \frac{\sin(x_3)}{aC(u)x_2^3}, \\ \varepsilon \dot{x}_3 &= \frac{u}{C(u)x_2^2} - \frac{\cos(x_3)}{aC(u)x_2^4}, \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 2.19905, \quad x_3(0) = 0, \\ t &\in [0, T], \quad T = 0.2185, \end{aligned} \tag{9}$$

где $x_1(t)$ — дальность полёта, $x_2(t)$ — скорость, $x_3(t)$ — угол наклона траектории (угол между вектором скорости и горизонтальной плоскостью), $a = 1.62079$, $C(u) = 0.01 + 0.3u^2$, $\varepsilon = 0.01$. В качестве параметра управления рассматривается $u(t)$ — аэродинамический коэффициент подъёмной силы.

Пусть заданы ограничения на правый конец траектории

$$x_2(T) = 1.09905, \quad x_3(T) = 0 \tag{10}$$

и ограничение на управление

$$0.08 \leq u(t) \leq 0.417, \quad t \in [0, T]. \tag{11}$$

Задача управления спуском летательного аппарата заключается в поиске управляющей функции $u(t)$, при которой с учётом ограничений (10), (11) достигается максимальная дальность полёта, то есть

$$J(u) = -x_1(T) \rightarrow \min. \tag{12}$$

Для решения задачи (9)–(12) применён алгоритм на основе метода штрафов и метода дифференциальной эволюции со следующими параметрами: $ps = 0.8$, $pm = 0.7$, $P = 100$, $d = 5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$, $z^0 = 1$, $b = 10$.

Параметры метода штрафов и метода дифференциальной эволюции подобраны путём проведения серии вычислительных экспериментов, в которых варьируются возможные значения параметров методов. Начальное значение штрафа z^0 принималось равным 0.01, 0.1, 1. Для значений z^0 , меньших 1, точность решения уменьшается, поэтому в качестве начального значения штрафа выбрано значение, равное 1. Параметр увеличения штрафа b задавался равным 4, 7, 10. Результаты расчётов показали, что для данной задачи параметр b не оказывает существенного влияния на точность получаемого решения.

Настраиваемыми параметрами метода дифференциальной эволюции являются параметр мутации pm , параметр скрещивания ps , размер популяции P . При проведении вычислений параметр мутации pm рассматривался равным 0.5, 0.7, 0.9, 1. Выявлено, что при приближении его значения к 1 возникают скачки на кривой управления и уменьшение точности решения. Поэтому параметр мутации pm можно задавать значениями из диапазона $[0.5, 0.8]$, не влияя на точность получаемого решения задачи. При исследовании влияния параметра скрещивания на решение установлено, что управление не изменяется при значениях ps , начиная с 0.8. Для значений ps , меньших 0.8, появляются скачкообразные изменения управления. Размер популяции P задавался равным 20, 50, 80, 100, 120. Для значений P , меньших 100, также наблюдаются скачки на кривой управления. Начиная с $P = 100$ структура управления выравнивается, поэтому повышение размера популяции нецелесообразно ввиду увеличения вычислительных затрат на поиск решения задачи.

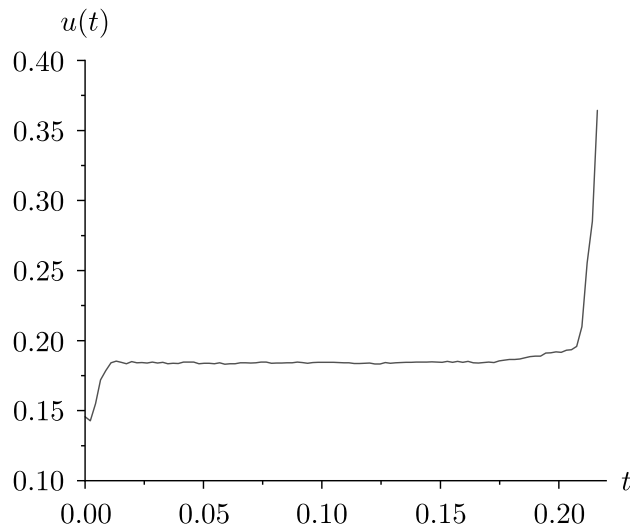


Рис. 1. График субоптимального управления спуском летательного аппарата

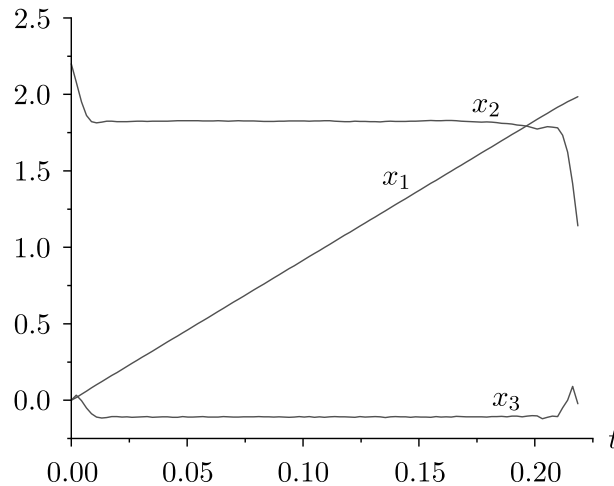


Рис. 2. График фазовых переменных в задаче управления спуском летательного аппарата

Полученное приближенное решение приведено на рис. 1, 2. При этом дальность полёта составляет $x_1(T) = 1.98543$, значения краевых условий — $x_2(T) = 1.14118$, $x_3(T) = -0.02247$.

Решение данной задачи ранее было получено в работе [18] с помощью алгоритма последовательной линеаризации с использованием модифицированной функции Лагранжа. Значение $x_1(T)$, рассчитанное в статье [18], составило 1.98519, точность выполнения краевых условий равна 10^{-7} . Найденное в данной статье решение по своей структуре близко к решению из работы [18].

Задача оптимизации химического реактора

Рассматриваются химические реакции, протекающие в смеси трёх веществ [19]. Первое вещество, концентрацию которого обозначим $x_1(t)$, является сырьём, второе вещество (концентрация $x_2(t)$) является промежуточным, третье вещество (концентрация $x_3(t)$) — окончательным продуктом реакции. Данный химический процесс можно описать системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(k_1(u) + k_2(u) + k_3(u))x_1, \\ \dot{x}_2 &= k_1(u)x_1 - k_4(u)x_2, \\ \dot{x}_3 &= k_4(u)x_2 - k_5(u)x_3 \end{aligned} \quad (13)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad T = 0.7 \text{ ч}, \quad (14)$$

где $x_i(t)$ — концентрации веществ, $i = \overline{1, 3}$ (моль/л), $u(t)$ — температура (К), k_j — кинетические константы, $j = \overline{1, 5}$ (ч^{-1}), рассчитываемые по формуле

$$k_j(u) = C_j \exp\left(\frac{E_j}{R} \left(\frac{1}{658} - \frac{1}{u}\right)\right),$$

где $C_1 = 1.02 \text{ ч}^{-1}$, $C_2 = 0.93 \text{ ч}^{-1}$, $C_3 = 0.386 \text{ ч}^{-1}$, $C_4 = 3.28 \text{ ч}^{-1}$, $C_5 = 0.084 \text{ ч}^{-1}$, $E_1 = 16000$ кал/моль, $E_2 = 14000$ кал/моль, $E_3 = 15000$ кал/моль, $E_4 = 10000$ кал/моль, $E_5 = 15000$ кал/моль, $R = 1.9865$ кал/(моль·К) — универсальная газовая постоянная [19].

Интенсивность химических превращений зависит от температуры реакционной смеси. Поэтому в качестве параметра управления рассмотрена температура протекания реакции $u(t)$. Как правило, на химическом производстве возникают ограничения на температуру по различным причинам, таким как безопасность процесса, контроль качества продукции, эффективность реакций и оборудования. Они могут быть вызваны и химическими свойствами веществ, используемых в процессе. Поэтому на значения температуры наложены ограничения [19]

$$473K \leq u(t) \leq 823K, \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

Пусть задано значение концентрации x_2 промежуточного вещества в конце реакции (моль/л):

$$x_2(T) = 0.0437. \quad (16)$$

Необходимо найти управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, которое с учётом ограничения (15), обеспечивает выполнение условия (16) и достижение максимального выхода продукта реакции в конечный момент времени, то есть

$$J(u) = -x_3(T) \rightarrow \min. \quad (17)$$

Основная причина вычислительных трудностей, возникающих при решении задачи оптимального управления (13)–(17), связана с экспоненциальной зависимостью k_j от u . Поэтому для её решения применён разработанный алгоритм.

Приближенное решение задачи оптимального управления получено при следующих параметрах алгоритма: $ps = 0.8$, $pt = 0.7$, $P = 500$, $d = 5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$, $z^0 = 1$, $b = 10$. Параметры метода штрафов и метода дифференциальной эволюции выбраны путём подбора, аналогично первой задаче.

На рис. 3, 4 приведены результаты решения задачи (13)–(17). Получено, что $x_3(T) = 0.4173$ моль/л, $x_2(T) = 0.0435$ моль/л.

В работе [19] получено решение задачи (13)–(17) с помощью метода проекции градиента, при этом $x_3(T) = 0.4161$ моль/л, $x_2(T) = 0.0437$ моль/л. Относительные погрешности решения задачи с помощью разработанного алгоритма составили $\delta(x_3(T)) = 0.29\%$, $\delta(x_2(T)) = 0.46\%$.

Задача о вертикальном подъёме ракеты на максимальную высоту

Управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений [20]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{u}{c}, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= \frac{u - D(x_2, x_3)}{x_1} - g(x_2) \end{aligned}$$

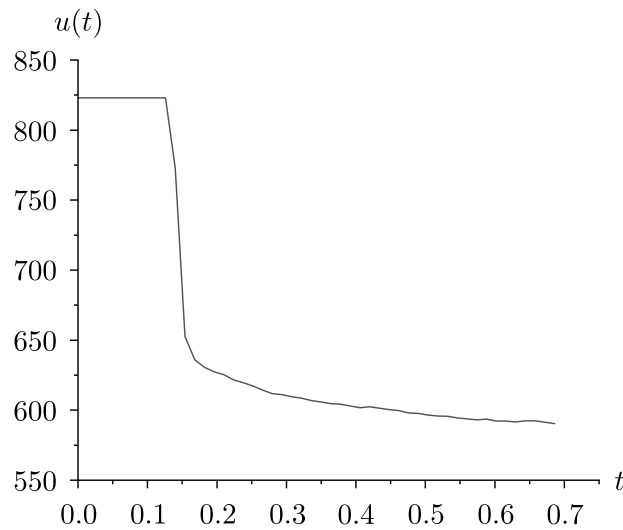


Рис. 3. График субоптимального управления химическим реактором $u(x,t)$ [К], t [ч]

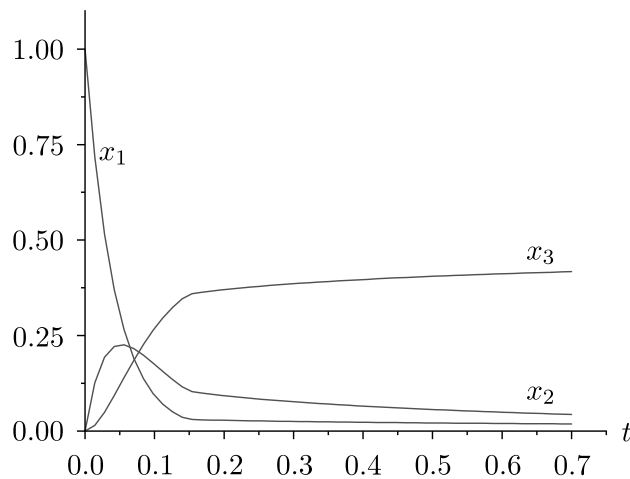


Рис. 4. График фазовых координат x_i [моль/л] в задаче оптимизации химического реактора, t [ч]

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad T = 0.2,$$

где $x_1(t)$ — масса ракеты, $x_2(t)$ — высота полёта ракеты относительно центра планеты, $x_3(t)$ — вертикальная скорость подъёма ракеты, $u(t)$ — тяга двигателя, $D(x_1, x_2)$ — аэродинамическое сопротивление, определяемое по формуле

$$D(x_2, x_3) = \frac{x_3 c x_1(0) x_3^2}{2g_0} \exp\left(-x_{2c} \cdot \frac{x_2 - x_2(0)}{x_2(0)}\right),$$

$g(x_2(t))$ — сила гравитации, $g(x_2) = g_0 (x_2(0)/x_2)^2$, $c = 0.5\sqrt{g_0 x_2(0)}$.

В рассматриваемом примере заданы значения параметров [20]: $g_0 = 1$, $x_{2c} = 500$, $x_{3c} = 620$.

Управлением является тяга двигателя ракеты $u(t)$, на значения которой наложены ограничения

$$0 \leq u(t) \leq 3.5, \quad t \in [0, T].$$

Требуется найти управление $u(t)$, которое обеспечивает достижение ракетой максимальной высоты в конечный момент времени, то есть

$$J(u) = -x_2(T) \rightarrow \min,$$

при выполнении терминального ограничения

$$x_1(T) = 0.6x_1(0).$$

В результате проведённых вычислений получено субоптимальное управление, представленное на рис. 5, при этом были заданы следующие параметры алгоритма: $ps = 0.8$, $pm = 0.7$, $P = 100$, $d = 5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$, $z^0 = 1$, $b = 10$. Параметры метода штрафов и метода дифференциальной эволюции выбраны путём подбора, аналогично первой задаче.

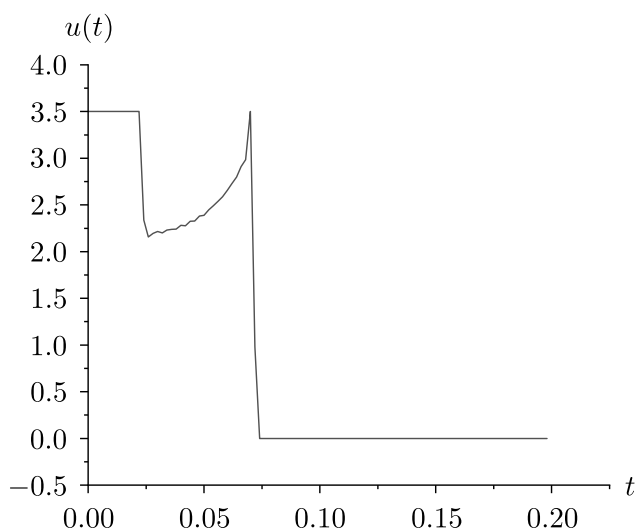


Рис. 5. График субоптимального управления в задаче о вертикальном подъёме ракеты

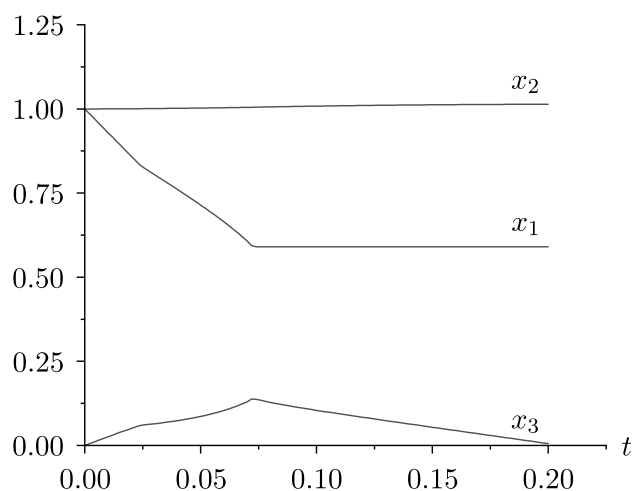


Рис. 6. График фазовых координат в задаче о вертикальном подъёме ракеты

Наибольшая высота подъёма ракеты составляет $x_2(T) = 1.01377$, что превышает на 0.09% её значение, полученное в работе [20] с помощью метода «продолжения по параметру» ($x_2(T) = 1.01284$). При этом $x_1(T) = 0.5903$, относительная погрешность краевого условия составила $\delta(x_1(T)) = 1.6\%$. Структура вычисленного субоптимального управления схожа с управлением, приведённом в статье [20].

Из приведённых примеров видно, что решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями, найденные с помощью предложенного подхода, незначительно отличаются от решений, полученных другими исследователями с помощью разных методов. Поэтому можно сделать вывод о корректной работе эволюционного алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработанный численный алгоритм можно применять для поиска субоптимального управления в задачах, содержащих ограничение на управляющий параметр, и с закреплённым правым концом траектории. Алгоритм легкорезализуем на практике, в нём не предъявляются требования к целевому функционалу, такие как дифференцируемость, непрерывность и др. Поскольку в основу алгоритма положен метод дифференциальной эволюции, его особенность состоит в отсутствии чувствительности найденного приближенного решения задачи оптимального управления от начального приближения, которое обычно задаётся исследователем и требует от него углублённых знаний предметной области.

Работа предложенного алгоритма апробирована на прикладных задачах оптимального управления с терминальными ограничениями. Проведено сравнение найденных приближенных решений задач с решениями, рассчитанными с помощью метода проекции градиента, метода последовательной линеаризации с использованием модифицированной функции Лагранжа, метода «продолжения по параметру». Результаты вычислительных экспериментов показали эффективность предложенного подхода и возможность применения разработанного эволюционного алгоритма для поиска приближенного решения других задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2023-0002). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benita F., Mehltz P.* Optimal control problems with terminal complementarity constraints // *SIAM J. Optim.* 2018. V. 43. P. 3079–3104; DOI: 10.1137/16M107637X
2. *Longla M.* Pontryagin's principle of maximum for linear optimal control problems with phase constraints in infinite dimensional spaces // *Discrete Contin. Models Appl. Comput. Sci.* 2008. N 4. P. 5–19.
3. *Bergounioux M., Bourdin L.* Pontryagin maximum principle for general Caputo fractional optimal control problems with Bolza cost and terminal constraints // *ESAIM Contr. Optim. Calc. Var.* 2020. V. 26. Article 35; DOI: 10.1051/cocv/2019021
4. *Gugat M., Zuazua E.* Exact penalization of terminal constraints for optimal control problems // *Optim. Control Appl. Methods.* 2016. V. 37, N 6. P. 1329–1354; DOI: 10.1002/oca.2238
5. *Yurong D.* Application of penalty function method and the conjugate gradient method in economic scheduling of cascade hydropower stations // *IFAC Proc. Vol.* 1986. V. 19, N 10. P. 227–232; DOI: 10.1016/S1474-6670(17)59671-8
6. *Jiang C., Lin Q., Yu C., Teo K. L., Duan G. -R.* An exact penalty method for free terminal time optimal control problem with continuous inequality constraints // *J. Optim. Theory Appl.* 2012. V. 154, N 1. P. 30–53; DOI: 10.1007/s10957-012-0006-9

7. *Xue B., Yao X.* A survey on evolutionary computation approaches to feature selection // *IEEE Trans. Evol. Comput.* 2016. N 20. P. 606–626; DOI: 10.1109/TEVC.2015.2504420
8. *Mohamed A. W., Mohamed A. K.* Adaptive guided differential evolution algorithm with novel mutation for numerical optimization // *Int. J. Mach. Learn. Cybern.* 2019. N 10. P. 253–277; DOI: 10.1007/s13042-017-0711-7
9. *Пантелеев А. В., Метлицкая Д. В.* Применение генетических алгоритмов с бинарным и вещественным кодированием для приближенного синтеза субоптимального управления детерминированными системами // *Автомат. и телемех.* 2011. № 11. С. 117–129.
10. *Губин П. Ю., Обоскалов В. П.* Применение метода дифференциальной эволюции в задаче планирования ремонтов генерирующего оборудования // *Изв. РАН. Энергетика.* 2021. № 2. С. 50–64; DOI: 10.31857/S0002331021020096
11. *Fu Y., Ding M., Zhou C., Hu H.* Route planning for unmanned aerial vehicle (UAV) on the sea using hybrid differential evolution and quantum-behaved particle swarm optimization // *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.* 2013. V. 43, N 6. P. 1451–1465; DOI: 10.1109/TSMC.2013.2248146
12. *Еремеев А. В. Тюнин Н. Н.* Алгоритм дифференциальной эволюции для оптимизации направленности фазированных антенных решёток // *Мат. структуры и моделир.* 2022. № 3. С. 57–68; DOI: 10.24147/2222-8772.2022.3.57-68
13. *Ковалевич А. А., Якимов А. И., Албкеират Д. М.* Исследование стохастических алгоритмов оптимизации для применения в имитационном моделировании систем // *Информ. технологии.* 2011. № 8. С. 55–60.
14. *Storn R., Price K.* Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces // *J. Glob. Optim.* 1997. N 11. P. 341–359; DOI: 10.1023/A:1008202821328
15. *Карпенко А. П.* Эволюционные операторы популяционных алгоритмов глобальной оптимизации // *Матем. и математич. моделир.* 2018. № 1. С. 59–89; DOI: 10.24108/mathm.0118.0000103
16. *Mohamed A. W.* A novel differential evolution algorithm for solving constrained engineering optimization problems // *J. Intell. Manuf.* 2018. N 29. P. 659–692; DOI: 10.1007/s10845-017-1294-6
17. *Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Лань, 2015.
18. *Горнов А. Ю., Тягوشкин А. И., Финкельштейн Е. А.* Численные методы решения прикладных задач оптимального управления // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53, № 12. С. 2014–2028; DOI: 10.7868/S0044466913120077
19. *Федоренко Р. П.* Приближенные методы решения задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
20. *Маджара Т. И., Горнов А. Ю.* Тестовая коллекция задач оптимального управления с вычислительными особенностями // *Современные технол. Сист. анализ. Моделир.* 2009. № 3. С. 49–56.

UDC 519.6:004.4

APPLICATION OF EVOLUTIONARY COMPUTATIONS FOR SOLVING OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS© 2024 E. V. Antipina^{1a}, S. A. Mustafina^{1b}, A. F. Antipin^{2c}¹*Ufa University of Science and Technology, Ufa, 450076 Russia,*²*Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Bashkortostan, 453103 Russia*E-mails: ^astepashinaev@ya.ru, ^bmustafina_sa@mail.ru, ^candrejantipin@ya.ru

Received 10.09.2023, revised 17.04.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The article is devoted to the development of a numerical algorithm for finding an approximate solution of an optimal control problem with terminal constraints and control constraints. The algorithm is based on the reduction of the original optimal control problem to a finite-dimensional problem and the use of the penalty method and the differential evolution method to solve the latter. A feature of the proposed approach is that the solution found is independent of the choice of the initial approximation. The operation of the algorithm is illustrated by its application to applied optimal control problems. The results of computational experiments are consistent with the results of calculations based on other methods.

Keywords: optimal control, terminal constraint, differential evolution, penalty method, evolutionary calculation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.302

REFERENCES

1. F. Benita and P. Mehrlitz, “Optimal control problems with terminal complementarity constraints,” *SIAM J. Optim.* **43**, 3079–3104 (2018). <https://doi.org/10.1137/16M107637X>
2. M. Longla, “Pontryagin’s principle of maximum for linear optimal control problems with phase constraints in infinite dimensional spaces,” *Discrete Contin. Models Appl. Comput. Sci.* (4), 5–19 (2008).
3. M. Bergounioux and L. Bourdin, “Pontryagin maximum principle for general Caputo fractional optimal control problems with Bolza cost and terminal constraints,” *ESAIM Contr. Optim. Calc. Var.* **26**, 35 (2020). <https://doi.org/10.1051/cocv/2019021>
4. M. Gugat and E. Zuazua, “Exact penalization of terminal constraints for optimal control problems,” *Optim. Control Appl. Methods* **37** (6), 1329–1354 (2016). <https://doi.org/10.1002/oca.2238>
5. D. Yurong, “Application of penalty function method and the conjugate gradient method in economic scheduling of cascade hydropower stations,” *IFAC Proc.* **19** (10), 227–232 (1986). [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)59671-8](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)59671-8)
6. C. Jiang, Q. Lin, C. Yu, K. L. Teo, and G.-R. Duan, “An exact penalty method for free terminal time optimal control problem with continuous inequality constraints,” *J. Optim. Theory Appl.* **154** (1), 30–53 (2012). <https://doi.org/10.1007/s10957-012-0006-9>
7. B. Xue and X. Yao, “A survey on evolutionary computation approaches to feature selection,” *IEEE Trans. Evol. Comput.* (20), 606–626 (2016). <https://doi.org/10.1109/TEVC.2015.2504420>
8. A. W. Mohamed and A. K. Mohamed, “Adaptive guided differential evolution algorithm with novel mutation for numerical optimization,” *Int. J. Mach. Learn. Cybern.* (10), 253–277 (2019). <https://doi.org/10.1007/s13042-017-0711-7>

9. A. V. Panteleev and D. V. Metlitskaya, "An application of genetic algorithms with binary and real coding for approximate synthesis of suboptimal control in deterministic systems," *Autom. Remote Control* **72** (11), 2328–2338 (2011).
10. P. Yu. Gubin and V. P. Oboskalov, "Differential evolution method for generation maintenance scheduling," *Izv. Ross. Akad. Nauk. Energ.* (2), 50–64 (2021). <https://doi.org/10.31857/S0002331021020096>
11. Y. Fu, M. Ding, C. Zhou, and H. Hu, "Route planning for unmanned aerial vehicle (UAV) on the sea using hybrid differential evolution and quantum-behaved particle swarm optimization," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.* **43** (6), 1451–1465 (2013). <https://doi.org/10.1109/TSMC.2013.2248146>
12. A. V. Eremeev and N.N. Tyunin, "Differential evolution for directivity optimization of short-wave phased antenna arrays," *Mat. Strukt. Model.* (3), 57–68 (2022) [in Russian]. <https://doi.org/10.24147/2222-8772.2022.3.57-68>
13. A. A. Kovalevich, A. I. Yakimov, and D. M. Albkeirat, "Research of optimization stochastic algorithms for application in simulations of systems," *Inf. Tekhnol.* (8), 55–60 (2011) [in Russian].
14. R. Storn and K. Price, "Differential evolution — A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces," *J. Glob. Optim.* (11), 341–359 (1997). <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>
15. A. P. Karpenko, "Evolution operators of population algorithms for global optimization," *Mat. Mat. Model.* (1), 59–89 (2018) [in Russian]. <https://doi.org/10.24108/mathm.0118.0000103>
16. A. W. Mohamed, "A novel differential evolution algorithm for solving constrained engineering optimization problems," *J. Intell. Manuf.* (29), 659–692 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10845-017-1294-6>
17. A. V. Panteleev and T. A. Letova, *Optimization Methods in Examples and Problems* (Lan', Moscow, 2015) [in Russian].
18. A. Yu. Gornov, A. I. Tyatyushkin, and E. A. Finkelstein, "Numerical methods for solving applied optimal control problems," *Comput. Math. Math. Phys.* **53** (12), 1825–1838 (2013). <https://doi.org/10.1134/S0965542513120063>
19. R. P. Fedorenko, *Approximate Methods for Solving Optimal Control Problems* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
20. T. I. Madzhara and A. Yu. Gornov, "Test collection of optimal control problems with computational features," *Sovrem. Tekhnol. Sist. Anal. Model.* (3), 49–56 (2009) [in Russian].