

УДК 539.3

О ЛУЧЕВЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ ПРИФРОНТОВЫХ РЕШЕНИЯХ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИНАМИКЕ ДЕФОРМАЦИЙ ЛИНЕЙНОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2024 В. Е. Рагозина^a, Ю. Е. Иванова^b, О. В. Дудко^c

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, г. Владивосток 690041, Россия*

E-mails: ^aragozina@vlc.ru, ^bivanova@iacp.dvo.ru, ^cdudko@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию 15.06.2023 г.; после доработки 16.05.2024 г.;
принята к публикации 03.07.2024 г.

Рассматривается динамика осесимметричных двумерных деформаций в линейноупругом полупространстве, ограниченном гладкой поверхностью вращения с положительной гауссовой кривизной. Приближенное решение начально-краевой задачи строится на основе лучевых рядов с разложением по времениподобной переменной. Для прифронтных областей криволинейных волн сильных разрывов используется ограниченное число членов лучевого ряда с коэффициентами — разрывами производных перемещений по времени (начиная с производной первого порядка). Показано, что при двумерном характере процесса деформации на k -ом шаге лучевого метода необходимо учитывать компоненты лучевых рядов до $(k + 1)$ -го порядка включительно.

Ключевые слова: линейная упругая среда, осесимметричная задача, поверхности сильных разрывов, лучевые ряды, уравнение затухания.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.309

ВВЕДЕНИЕ

Исследования в области современного машиностроения, материаловедения, инженерного горного дела тесно связаны с решением задач нестационарной динамической деформации. При этом, исходя из требований и параметров эксплуатации, в основном учитываются наиболее значимые свойства реальных материалов (упругость [1–3], пластичность [4, 5], вязкость [6, 7] и т. д.). В зависимости от интересов исследователя и режимов деформирования модель сплошной среды уточняется в пользу линейности или нелинейности определяющих соотношений, учёта структуры материала, распространения тепла и т. д. Многие процессы динамического деформирования изотропных твёрдых сред происходят в пределах малых и обратимых (упругих) деформаций, поэтому их описание в рамках линейной изотропной упругости (модели Гука) сохраняет свою актуальность. Для решения краевых задач нестационарного деформирования применяются теоретические точные [8–10], теоретические приближенные [11–13] или же численные [14, 15] методы. Начиная с работ Адамара, одним из важнейших инструментов исследования систем гиперболических уравнений, описывающих динамику деформации твёрдых сред, являются характеристические направления и соотношения вдоль них [16]. В частности, в бесконечной или полуограниченной среде Гука поверхности передних фронтов волновых процессов движутся с характеристическими скоростями, а множество ортогональных к ним линий образует лучевую сетку [17]. Передние волновые фронты нестационарных динамических процессов несут на себе разрывы функций деформаций и напряжений или же их производных. Одновременно с этим основные изменения полей перемещений, деформаций и

напряжений в прифронтных областях (малой окрестности передних волновых фронтов) происходят в значительно большей степени вдоль лучевой координаты, чем по остальным направлениям. Перечисленные свойства лежат в основе варианта метода лучевых рядов [11, 18, 19], который традиционно используется для получения приближенных решений в прифронтных областях. В [20] указано, что схему лучевого метода, в стандартной форме не пригодную для задач ударной деформации нелинейных сплошных сред, можно модифицировать, включая в структуру лучевого ряда дополнительные ряды по дельта-производным. Таким образом, метод лучевых рядов может применяться для динамических нестационарных задач и в линейных, и в нелинейных моделях твёрдых сред, включая задачи с разрывами полей деформаций.

В нашей работе строится приближенное решение двумерной осесимметричной начально-краевой задачи об упругих волнах деформаций в среде Гука с нагружаемой границей, имеющей положительную гауссову кривизну, осевую симметрию и необходимую гладкость. В остальном геометрия границы произвольна. В основу решения положен метод лучевых рядов в записи по времениподобной координате. Приближенные решения в прифронтных областях продольной и поперечной волн деформаций строятся на основе двух шагов такого метода. В качестве примера рассмотрен частный случай с границей — параболоидом вращения. Полученные результаты описывают одну из сторон сложного процесса деформирования, который может происходить, в частности, при внедрении в среду некоторого объекта. Так, динамическая деформация осесимметричного типа возникает в задаче о начальном этапе контактного взаимодействия [21], где учитывается комплексное влияние краевых условий в контактной динамически формирующейся зоне и на плоских участках свободной границы. В задачах инженерной практики важное значение имеют исследования оптимальной формы осесимметричных тел для минимизации сопротивления внедрению и максимизации глубины проникания в сплошную среду [22]. Такие задачи решаются с привлечением численных методов и так же концентрируют внимание на контактной области. Представленная в статье постановка осесимметричной краевой задачи в перемещениях не относится к контактному типу: перемещения возникают в начальный момент времени всюду на границе, которая не имеет свободных участков. Данная идеализация позволяет сосредоточиться на решении для продольных и поперечных уходящих от границы волн деформаций без учёта эффектов взаимодействия волновых процессов со свободными участками. Лучевой метод решения переносит приоритет исследования на движущиеся в глубину среды области, примыкающие к передним волновым фронтам, т. е. основное внимание сосредоточено на динамических деформациях среды.

1. ОБЩИЕ МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поведение изотропной линейноупругой среды Гука описывает общая система уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{,j}^{ij} &= \rho_0 \dot{v}^i, \quad \rho = \rho_0(1 - u_{,i}^i), \quad \sigma^{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \lambda e_k^k g^{ij} + 2\mu e^{ij}, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \\ v^i &= \dot{u}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k u_k, \quad u_{,j}^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i u^k, \quad u^i = g^{ij} u_j, \\ e^{ij} &= g^{ik} g^{js} e_{ks}, \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad i, j, k, s = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , ρ_0 — плотность среды в актуальном и свободном состоянии; W — упругий потенциал среды (λ , μ — адиабатические значения параметров Ламе); u^i , v^i , e^{ij} , σ^{ij} — контравариантные компоненты векторов перемещений и скорости, тензоров малых деформаций и напряжений Эйлера—Коши; Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля, согласованные с пространственной метрикой с компонентами g_{ij} в криволинейной системе координат x^i ; t — время.

Пусть при $t \leq 0$ среда (1) покоится, не деформирована и занимает полупространство с границей Q_0 — гладкой осесимметричной поверхностью положительной гауссовой кривизны. Цилиндрическая система координат $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ имеет стандартную связь с

декартовыми координатами z^i : $z^1 = x^1 \cos x^2$, $z^2 = x^1 \sin x^2$, $z^3 = x^3$. Совместим ось симметрии поверхности Q_0 с осью z , а образующий контур L_0 зададим в явной форме уравнениями $r = f(\delta)$, $z = -\delta$ ($\delta \geq 0$), полагая, что функция $f(\delta) \geq 0$ обладает необходимо гладкостью. Тогда поверхность Q_0 определяется двухпараметрической вектор-функцией

$$\mathbf{r}_0(\delta, \varphi) = \{z_0^1, z_0^2, z_0^3\} = \{f(\delta) \cos \varphi, f(\delta) \sin \varphi, -\delta\}. \quad (2)$$

Простым примером такой поверхности при $f(\delta) = \sqrt{2p\delta}$, $p = \text{const} > 0$ является параболоид вращения (рис. 1(a)). Упругая среда занимает область выше Q_0 .

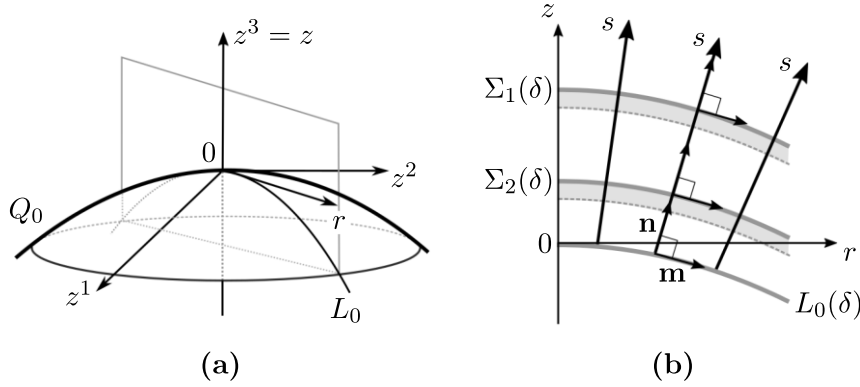


Рис. 1. Геометрия границы $Q_0 \in \mathbb{E}^3$ (a); передние волновые фронты Σ_1 , Σ_2 и лучевые координаты s , δ на плоскости (r, z) (b)

Сформулируем краевую задачу в перемещениях. Считаем, что при $t \geq 0$ движение точек границы Q_0 известно и не зависит от φ :

$$U_r^0 = u_r(\mathbf{r}_0, t)|_{t \geq 0} = v_r t + \frac{a_r t^2}{2}, \quad U_z^0 = u_z(\mathbf{r}_0, t)|_{t \geq 0} = v_z t + \frac{a_z t^2}{2}, \quad (3)$$

$$u_r|_{t \leq 0} = u_z|_{t \leq 0} = 0, \quad v_r^2 + v_z^2 \neq 0.$$

В (3) v_r , v_z , a_r , a_z — заданные функции параметра δ ; $U_r^0/(C_1 T) \ll 1$, $U_z^0/(C_1 T) \ll 1$, где T — характерное время процесса, $C_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0$; индексы r , φ , z здесь и далее означают физические компоненты тензорных полей.

При заданном краевом условии (3) следствием движения границы Q_0 с уравнением (2) является нестационарное поле перемещений с компонентами $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$, $u_\varphi = 0$. Скачок скоростей на границе Q_0 при $t = 0$, заданный в (3), вызывает в среде движение поверхностей разрывов деформаций — передних фронтов волновых процессов (рис. 1(b)). На каждой такой поверхности при вычислении функций $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ должны выполняться дополнительные к (3) краевые условия. Во-первых, это геометрические и кинематические условия совместности разрывов [11]:

$$[q_{,i}] = \left[\frac{dq}{dn} \right] n_i + g_{ij} x_{,\alpha}^j a^{\alpha\beta} [q]_{,\beta}, \quad [\dot{q}] = -C \left[\frac{dq}{dn} \right] + \frac{\delta[q]}{\delta t}, \quad (4)$$

$$\frac{dq}{dn} = q_{,i} n^i, \quad x_{,\alpha}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}, \quad x_{,\alpha}^i n_i = 0, \quad n^i n_i = 1, \quad [q] = q^+ - q^-, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

где q — обозначение для компоненты любого тензорного поля пространственного типа; q^+ и q^- — предельные значения q перед и за поверхностью разрывов Σ , которая движется со скоростью $C > 0$ в направлении своей единичной внешней нормали $\mathbf{n} = \{n^1, n^2, n^3\}$ (рис. 1(b)); y^α — поверхностные координаты и $a^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты метрики на Σ ; $\delta/\delta t$ — дельта-производная (производная по Томасу [11]).

Во-вторых, это динамические условия совместности разрывов [11] — следствия интегральных законов сохранения. Динамическое условие совместности на поверхности сильных разрывов Σ (следствие закона сохранения импульса) для модели (1) имеет вид

$$[\sigma^{ij}]n_j = -\rho_0 C[v^i], \quad (5)$$

откуда с учётом (4) получаем существование двух типов фронтов сильных разрывов в неограниченной линейноупругой среде (1): продольной (безвихревой) волны Σ_1 со скоростью $C_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho_0}$ и поперечной (эквиволлюминальной) волны Σ_2 со скоростью $C_2 = \sqrt{\mu/\rho_0}$ [23]. Согласно (4), (5), для продольных волн выполняется

$$\left[\frac{du_i}{dn} \right] = \tau n_i, \quad [v_n] = [v_i]n^i \neq 0, \quad \tau = [u_{,j}^i]n_i n^j, \quad (6)$$

для поперечных волн справедливо

$$\left[\frac{du_i}{dn} \right] = \xi m_i, \quad \xi = [u_{,j}^i]m_i n^j, \quad (7)$$

где τ, ξ — нормальная и касательная компоненты волнового вектора разрывов на поверхности Σ_i соответственно; $\mathbf{m} = \{m^1, m^2, m^3\}$ — единичный вектор, касательный к Σ_i ($n^i m_i = 0, m^i m_i = 1$).

Помимо условий совместности (4), (5), на каждой поверхности сильных разрывов согласно гипотезе сплошности необходимо потребовать непрерывность перемещений:

$$[u_r] = 0, \quad [u_z] = 0. \quad (8)$$

Таким образом, согласно (3)–(8), от границы Q_0 с момента времени $t = 0$ по среде (1) движутся две поверхности сильных разрывов Σ_1 и Σ_2 с постоянными скоростями C_1 и C_2 . При этом отметим, что геометрия и положение каждой поверхности Σ_i со скоростью $C_i = \text{const}$ определяется начальным условием $\Sigma_1|_{t=0} = \Sigma_2|_{t=0} = Q_0$ и не зависит от строящегося решения для полей перемещений и деформаций.

Условия (3)–(5), (8) применяются к системе уравнений Навье для $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$, следующей из системы (1):

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) u_{z,rz} + \mu u_{r,zz} &= \rho_0 \ddot{u}_r, \\ \mu \left(u_{z,rr} + \frac{u_{z,r}}{r} \right) + (\lambda + \mu) \left(u_{r,rz} + \frac{u_{r,z}}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) u_{z,zz} &= \rho_0 \ddot{u}_z, \\ u_{r,r} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{z,r} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad u_{r,rr} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &\text{ и т. д.,} \end{aligned} \quad (9)$$

что и определяет краевую динамическую задачу осесимметричного типа. Представление краевых условий задачи в перемещениях не является принципиальным для описанного далее способа решения, который без существенных сложностей переносится на краевую задачу в напряжениях.

2. ДВУШАГОВОЕ ЛУЧЕВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Ввиду независимости описанной краевой задачи от переменной φ все построения лучевого метода достаточно провести в плоскости $\varphi = \text{const}$. Учитывая $C_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$), лучевые направления в этой плоскости составляют семейство полупрямых, ортогональных к Q_0 , а движущиеся поверхности Σ_i в каждый момент времени отсекают равные расстояния вдоль лучей.

Поэтому связь цилиндрических координат r, z с лучевыми координатами s, δ , образующими лучевую ортогональную сетку (рис. 1(b)), задаётся как

$$\begin{aligned} r(s, \delta) &= f(\delta) + sn_r(\delta), \quad z = -\delta + sn_z(\delta), \\ n_r(\delta) &= (1 + (f')^2)^{-1/2}, \quad n_\varphi = 0, \quad n_z(\delta) = f'n_r(\delta), \quad f' = df/d\delta. \end{aligned}$$

Здесь s — расстояние вдоль лучей, δ — координата эйконала [18], $\mathbf{n}(\delta) = \{n_r(\delta), 0, n_z(\delta)\}$ — единичный вектор внешней нормали к Q_0 (а также к Σ_1, Σ_2).

Для приближенного представления вектора $\mathbf{u}(r, z, t)$ в окрестности за подвижной поверхностью Σ_i принимаем функцию $\mathbf{u}^{(i)}(s, \delta, t)$, заданную в форме ряда по времениподобной переменной (разложение типа ряда Тейлора):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(i)}(s, \delta, t) &= \mathbf{u}^{(i-1)}(s, \delta, t) - \theta(t - t_i) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[\frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial t^j} \right] \Big|_{t=t_i} (t - t_i)^j, \\ \theta(t - t_i) &= \begin{cases} 1, & t \geq t_i \\ 0, & t < t_i \end{cases}, \quad t_i = \frac{s}{C_i}, \quad \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Такая функция традиционно называется приближенным лучевым решением [11, 18, 20]. В (10) $\theta(t - t_i)$ — ступенчатая функция Хэвисайда; $\mathbf{u}^{(i-1)}$, в свою очередь, может быть определена лучевым рядом за Σ_1 при $t \rightarrow 0$, когда Σ_2 находится в прифронтной области Σ_1 . На больших временах, когда волны Σ_1 и Σ_2 достаточно разошлись друг от друга, $\mathbf{u}^{(i-1)}$ является приближенным решением для \mathbf{u} между Σ_1 и Σ_2 , которое должно вычисляться аналитически или с помощью численных методов. В нашей статье считаем, что $\mathbf{u}^{(i-1)}$ задаётся лучевым решением по типу (10). Величины $[\partial \mathbf{u} / \partial t]$ на Σ_i определяются связью с τ, ξ согласно (4) и (6), (7). Скачки производных $[\partial^j \mathbf{u} / \partial t^j]$ являются основными неизвестными коэффициентами в (10). Разрывы остальных производных от \mathbf{u} на Σ_i связаны с основными разрывами рекуррентными соотношениями — следствиями условий (4). Для определения основных скачков служат уравнения движения (9), продифференцированные частным образом по времени $(k-1)$ раз на k -м шаге лучевого метода, а затем записанные в разрывах в проекции на вектора \mathbf{n} и \mathbf{m} . Условие непрерывности перемещений (8) выполняется для ряда (10) автоматически.

Ввиду громоздкости вычислений каждого шага метода и повышенных требований гладкости для геометрических функций на Σ_i и полей перемещений в окрестности Σ_i , лучевое разложение (10) для представления $\mathbf{u}^{(i)}(s, \delta, t)$ при $t \geq t_i$, как правило, применяется в форме

$$\mathbf{u}^{(i)}(s, \delta, t) = \mathbf{u}^{(i-1)}(s, \delta, t) - \sum_{j=1}^G \frac{1}{j!} \left[\frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial t^j} \right] \Big|_{t=t_i} (t - t_i)^j + \Delta_G(s, \delta, t) \quad (11)$$

с конечным числом членов ряда ($j=1, 2, \dots, G$) и остаточным членом $\Delta_G(s, \delta, t)$. Значение G выбирается из соображений требуемой точности и обычно невелико (например, $G = 2$ в [20, 24]). Вычисление большего количества членов разложения проводится редко и при относительной простоте краевой задачи [25]. Вопрос точности приближенного лучевого решения рассмотрим в статье позже.

Остановимся на некоторых технических деталях применения формулы (11), а именно, на примере двух шагов лучевого метода покажем, что в неоднородных динамических задачах лучевое разложение на j -ом шаге метода приводит к необходимости учёта некоторых (но не всех) членов с $(j+1)$ -ми степенями по $(t - t_i)$. Для этого в нашей краевой задаче положим

$G = 3$ и от (11) перейдём к соотношениям

$$\begin{aligned} u_k^{(1)} &= -\kappa_k^{(1)}(t-t_1) - \frac{\chi_k^{(1)}}{2}(t-t_1)^2 - \frac{\psi_k^{(1)}}{6}(t-t_1)^3 + \dots, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \\ u_k^{(2)} &= u_k^{(1)} - \kappa_k^{(2)}(t-t_2) - \frac{\chi_k^{(2)}}{2}(t-t_2)^2 - \frac{\psi_k^{(2)}}{6}(t-t_2)^3 + \dots, \quad t \geq t_2, \\ \kappa_k^{(i)} &= [\dot{u}_k]|_{t=t_i}, \quad \chi_k^{(i)} = [\ddot{u}_k]|_{t=t_i}, \quad \psi_k^{(i)} = [\dddot{u}_k]|_{t=t_i}, \quad i, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь u_r, u_z в плоскости (r, z) для сокращения выкладок обозначены как u_1, u_2 соответственно, а для искомого разрыва производных по времени введены обозначения $\kappa_k^{(i)}, \chi_k^{(i)}, \psi_k^{(i)}$. Из (6) и (7) следует, что в (12) $\kappa_m^{(1)} = \kappa_j^{(1)} m^j = 0, \kappa_n^{(2)} = \kappa_j^{(2)} n^j = 0$, а разрывы $\chi_k^{(i)}, \psi_k^{(i)}$ и разрывы производных по времени более высокого порядка будут иметь ненулевые проекции и на \mathbf{n} , и на \mathbf{m} .

Поскольку уравнения лучевого метода в среде Гука на каждом шаге зависят от изменяющейся геометрии Σ_i (разрывы в этой среде подчиняются законам геометрической оптики [17]), приведём формулы для некоторых необходимых далее геометрических функций на Σ_i :

$$\begin{aligned} a_{11}^0 &= 1 + (f')^2, \quad a_{22}^0 = f^2, \quad a_{12}^0 = 0, \quad b_{11}^0 = \frac{f''}{\sqrt{a_{11}^0}}, \quad b_{22}^0 = -\frac{f}{\sqrt{a_{11}^0}}, \quad b_{12}^0 = 0, \\ a_{ij} &= \begin{cases} a_{ij}^0(1 - k_i s)^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} b_{ij}^0(1 - k_i s), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad K_i|_{t=0} = k_i, \quad K = K_1 \cdot K_2, \\ k_1 &= \frac{b_{11}^0}{a_{11}^0}, \quad k_2 = \frac{b_{22}^0}{a_{22}^0}, \quad H = \frac{a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}}{2} = \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \quad K_i = \frac{k_i}{1 - s k_i}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) f — произвольная функция, согласно (2) определяющая геометрию границы Q_0 ; $a_{\alpha\beta}^0$ и $b_{\alpha\beta}^0$ — компоненты первой и второй квадратичных форм на Q_0 , $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — эти же объекты на поверхности Q_s , отстоящей от Q_0 на расстояние s вдоль лучей; K_1, K_2 и k_1, k_2 — главные кривизны на Q_s и Q_0 соответственно; H и K — средняя и гауссова кривизна поверхности Q_s . Из (13) следует, что $y^1 = \delta, y^2 = \varphi$ — сетка главных направлений на Q_0, Q_s , а при $s = C_i t$ поверхность Q_s совпадает с Σ_i .

На первом шаге лучевого метода записываются в разрывах сами уравнения движения (9) с последующей их свёрткой с \mathbf{n} и \mathbf{m} . На волне деформаций Σ_1 с учётом (13) это приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\delta \kappa_n^{(1)}}{\delta t} &= H^I C_1 \kappa_n^{(1)}, \quad \chi_m^{(1)} = -\frac{C_1 \kappa_{n,1}^{(1)}}{\sqrt{a_{11}^0}}, \\ \kappa_i^{(1)} &= \kappa_n^{(1)} n_i, \quad \chi_i^{(1)} = \chi_n^{(1)} n_i + \chi_m^{(1)} m_i, \quad \kappa_{n,1}^{(1)} = \frac{\partial \kappa_n^{(1)}}{\partial \delta}, \quad H^I = H|_{s=C_1 t}, \quad y^1 = \delta. \end{aligned} \quad (14)$$

На волне деформаций Σ_2 аналогично приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\delta \kappa_m^{(2)}}{\delta t} &= H^{II} C_2 \kappa_m^{(2)}, \quad \chi_n^{(2)} = \frac{C_2}{\sqrt{a_{11}^0}} \left(\kappa_{m,1}^{(2)} + \frac{\partial \ln \sqrt{a_{22}^0}}{\partial \delta} \kappa_m^{(2)} \right), \\ \kappa_i^{(2)} &= \kappa_m^{(2)} m_i, \quad \chi_i^{(2)} = \chi_n^{(2)} n_i + \chi_m^{(2)} m_i, \quad \kappa_{m,1}^{(2)} = \frac{\partial \kappa_m^{(2)}}{\partial \delta}, \quad H^{II} = H|_{s=C_2 t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Системы (14) и (15) выделяют на волнах Σ_1, Σ_2 функции $\kappa_n^{(1)}, \kappa_m^{(2)}$, имеющие приоритетное значение, для которых определяется решение дифференциальных уравнений затухания [11].

Координата δ входит в дифференциальные уравнения затухания в системах (14), (15) как параметр, т. е. интегрирование этих уравнений идёт в направлении вдоль луча. Из (14), (15) для $\kappa_n^{(1)}$, $\kappa_m^{(2)}$, $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$ получаем

$$\begin{aligned} \kappa_n^{(1)} &= \kappa_n^0 \sqrt{\frac{K^I}{K_0}}, \quad \kappa_m^{(2)} = \kappa_m^0 \sqrt{\frac{K^{II}}{K_0}}, \quad \kappa_n^{(1)} \Big|_{Q_0} = \kappa_n^0, \quad \kappa_m^{(2)} \Big|_{Q_0} = \kappa_m^0, \\ K^I &= K|_{s=C_1 t}, \quad K^{II} = K|_{s=C_2 t}, \\ \chi_m^{(1)} &= -\frac{C_1}{\sqrt{a_{11}^0}} \frac{K_1^I}{k_1} \sqrt{\frac{K^I}{K_0}} \left\{ \kappa_{n,1}^0 + \kappa_n^0 \left(\ln \sqrt{\frac{K^I}{K_0}} \right) \right\}_{,1}, \quad K_0 = K^I|_{t=0} = K^{II}|_{t=0}, \\ \chi_n^{(2)} &= \frac{C_2}{\sqrt{a_{11}^0}} \frac{K_1^{II}}{k_1} \sqrt{\frac{K^{II}}{K_0}} \left\{ \kappa_{m,1}^0 + \kappa_m^0 \left(\ln \sqrt{\frac{a_{22} K^{II}}{K_0}} \right) \right\}_{,1}, \quad K_1^I = K_1|_{s=C_1 t}, \quad K_1^{II} = K_1|_{s=C_2 t}, \end{aligned} \quad (16)$$

где индекс после запятой обозначает частное дифференцирование по координате $y^1 = \delta$. Функции $\kappa_n^{(1)}$, $\kappa_m^{(2)}$, найденные из своих уравнений затухания на первом шаге метода, полностью определяют на Σ_j скачки $\kappa_i^{(j)}$ и частично — скачки $\chi_i^{(j)}$, которые входят в (12) как коэффициенты при $(t - t_j)^2$. Из (16) следует, что определение функций $\chi_m^{(1)}$ и $\chi_n^{(2)}$ уже требует повышенной гладкости геометрических функций на Σ_i , поскольку $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$ вычисляются из уравнений, содержащих производные вдоль направления $y^1 = \delta$ от гауссовых кривизн K^I , K^{II} и главных кривизн K_1^I , K_1^{II} .

Для определения κ_n^0 , κ_m^0 ограничимся в (12) и (3) слагаемыми с первыми степенями по $(t - t_i)$ и по t соответственно. При этом, полагая в (12) $s = 0$, из (3) получим

$$\kappa_n^0 = -v_n = -(v_r n_r + v_z n_z), \quad \kappa_m^0 = -v_m = -(v_r m_r + v_z m_z). \quad (17)$$

Далее для упрощения выкладок остановимся на случае, когда параметры v_r , v_z , a_r , a_z в условиях (3) приняты постоянными. При этом ввиду условий симметрии задачи и требования отсутствия разрывов сплошности среды исключаем расчёты в окрестности луча $\delta = 0$. Это ограничение не принципиально и служит только для некоторого уменьшения объёма вычислений.

Авторы различных форм лучевого метода относят их к асимптотическим методам (например, [26]), для которых исключительно важен баланс между требуемой точностью приближения и уменьшением нарастающего объёма рекуррентных вычислений за счёт ограничения числа членов разложения. В этом вопросе обратим внимание на важное отличие лучевых разложений многомерных динамических задач от лучевых разложений одномерных задач. Соотношения (14), (15) многомерной задачи (следствия уравнений движения (9) в разрывах) включают как дифференциальные уравнения затухания для $\chi_n^{(1)}$, $\chi_m^{(2)}$, так и алгебраические уравнения для $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$. Зависимость $\chi_n^{(1)}$, $\chi_m^{(2)}$ от $y^1 = \delta$ приводит к ненулевым решениям уравнений (14), (15) для $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$. Отбросить ненулевые функции $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$ из решения первого шага по формальному признаку — второй степени переменных $(t - t_1)$, $(t - t_2)$ — означает внести погрешность уже на стадии выполнения уравнений движения сразу за Σ_i (на Σ_i^-). И наоборот, включение $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$ в решение первого шага обеспечивает точное выполнение уравнений движения на Σ_i^- , если только они выполняются точно перед Σ_i (на Σ_i^+). Следующий (второй) шаг лучевого метода также связан с появлением алгебраических уравнений помимо уравнений затухания. Решения таких алгебраических уравнений дают слагаемые с переменными $(t - t_1)^3$, $(t - t_2)^3$ в рядах (11). Очевидно, что учёт всех слагаемых в (11), соответствующих j -му шагу

метода, способен улучшить результат использования прифронтных лучевых асимптотик в вычислительных схемах [24].

От (16) с учётом условий (17) нетрудно перейти к формулам для $u_1 = u_r$, $u_2 = u_z$, в которых компоненты перемещений u_r и u_z являются функциями s , δ , t . В общем случае произвольной функции $f(\delta)$, задающей граничную поверхность (2), переход к исходным координатам затруднён. Поэтому соотношения $u_i(s, \delta, t)$ необходимо рассматривать совместно со связью $r = r(s, \delta)$, $z = z(s, \delta)$. Если же ставится задача определить деформации, то они могут быть вычислены косвенно. Например, для e_{rr}^I с учётом связей координат r , z с лучевыми координатами s , δ и уравнениями для Q_0 можно записать

$$e_{rr}^I = u_{r,r}^{(I)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial r}, \quad \frac{\partial s}{\partial r} = n_r, \quad \frac{\partial \delta}{\partial r} = \frac{n_r n_z}{1 - s k_1},$$

где $u_r^{(1)}$ представляется в форме (12). Аналогичный подход позволяет вычислить деформации e_{ij}^I , e_{ij}^{II} , где $i, j = 1, 2$ соответствуют и заменяют r, z .

Кратко изложим соотношения, связанные со вторым шагом лучевого метода. Как правило, для шагов выше первого делают удобную (но по-прежнему громоздкую) запись уравнений в рекуррентной форме [11]. Когда эти уравнения используются для построения теоретического приближенного решения конкретной краевой задачи, то для их интегрирования на текущем шаге приходится проходить по всей предыдущей цепочке расчётов. Поэтому уравнения второго шага для нашей задачи приведём в их самостоятельной записи без обращения к рекуррентным соотношениям k -го шага:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \chi_n^{(1)}}{\delta t} &= C_1 H^I \chi_n^{(1)} + \frac{C_1^2}{2} \left(K^I - 3 (H^I)^2 \right) \kappa_n^{(1)} + \frac{C_1^2}{2} a^{\alpha\beta} \kappa_{n,\alpha\beta}^{(1)}, \quad \psi_m^{(1)} = -\frac{C_1^2}{\sqrt{a_{11}}} \left(\frac{\chi_n^{(1)}}{C_1} + H^I \kappa_n^{(1)} \right), \\ \frac{\delta \chi_m^{(2)}}{\delta t} &= C_2 H^{II} \chi_m^{(2)} + \frac{C_2^2}{2} \left((H^{II})^2 - K^{II} - (K_1^{II})^2 - \frac{(a^{22} a_{22,1})^2}{4a_{11}} \right) \kappa_m^{(2)} + \frac{C_2^2}{2} a^{\alpha\beta} \kappa_{m,\alpha\beta}^{(2)}, \\ \psi_n^{(2)} &= \frac{C_2^2}{\sqrt{a_{11}}} \left(\frac{\chi_{m,1}^{(2)}}{C_2} + \frac{a^{22} a_{22,1}}{2} \frac{\chi_m^{(2)}}{C_2} + K_1^{II} \kappa_{m,1}^{(2)} - \frac{H^{II} \chi_n^{(2)} \sqrt{a_{11}}}{C_2} - \kappa_m^{(2)} \left(\left(3 + \frac{4\mu}{\lambda + \mu} \right) H_{,1}^{II} - \frac{b^{22} a_{22,1}}{2} \right) \right), \\ \kappa_{n,\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{\partial^2 \kappa_n^{(1)}}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \kappa_{n,\sigma}^{(1)}, \quad \kappa_{m,\alpha\beta}^{(2)} = \frac{\partial^2 \kappa_m^{(2)}}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \kappa_{m,\sigma}^{(2)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$, $a^{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля и компоненты метрического тензора на Σ_1 для $\chi_n^{(1)}$, $\psi_m^{(1)}$, на Σ_2 для $\chi_m^{(2)}$, $\psi_n^{(2)}$; индекс 1 после запятой означает частную производную по δ . В линейных неоднородных дифференциальных уравнениях затухания, входящих в (18), дифференциальный оператор для $\chi_n^{(1)}$, $\chi_m^{(2)}$ совпадает с оператором первого шага. Также уравнения затухания зависят от решения предыдущего шага в своей неоднородной части. В частности, первое уравнение в (18) содержит $\kappa_{n,\alpha\beta}$, т. е. для κ_n предполагается непрерывная дифференцируемость дважды по y^1 , y^2 . Кроме того, уравнения (18) требуют очередного повышения гладкости и для геометрических функций на Σ_i . Решая (18) относительно $\chi_n^{(1)}$ и $\chi_m^{(2)}$, получаем

$$\begin{aligned} \chi_n^{(1)} &= \sqrt{\frac{K^I}{K_0}} \left(\chi_n^0(\delta) + F_0^{(1)}(\delta) \frac{K_2^I}{k_2} + \sum_{j=1}^3 F_j^{(1)}(\delta) \left(\frac{K_1^I}{k_1} \right)^j \right), \quad K_2^I = K_2|_{s=C_1 t}, \\ \chi_m^{(2)} &= \sqrt{\frac{K^{II}}{K_0}} \left(\chi_m^0(\delta) + F_0^{(2)}(\delta) \frac{K_2^{II}}{k_2} + \sum_{j=1}^3 F_j^{(2)}(\delta) \left(\frac{K_1^{II}}{k_1} \right)^j \right), \quad K_2^{II} = K_2|_{s=C_2 t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Неизвестные функции $\chi_n^0(\delta)$, $\chi_m^0(\delta)$ в (19) вычисляются из краевых условий (3), куда подставлены соотношения (10), записанные до вторых степеней включительно по $(t - t_i)$ с учётом (16), (17) и (19). Такое выполнение краевых условий (3) приводит к следующему результату:

$$\chi_n^0(\delta) = -a_n - C_2 n_r (\kappa_m^0)' - \frac{C_2 n_z \kappa_m^0}{\sqrt{a_{11}^0}} - \sum_{j=0}^3 F_j^{(1)}, \quad \chi_m^0(\delta) = -a_m - C_1 m_z (\kappa_n^0)' - \sum_{j=0}^3 F_j^{(2)}, \quad (20)$$

$$\kappa_n^0(\delta) = -v_n, \quad \kappa_m^0(\delta) = -v_m, \quad a_n = a_r n_r + a_z n_z, \quad a_m = a_r m_r + a_z m_z.$$

Функции $F_j^{(k)}(\delta)$ ($j=0, 1, 2, 3$, $k=1, 2$) в (19), (20) являются объектами, полностью определёнными и сложным образом зависящими от геометрии Q_0 , функций κ_n^0 , κ_m^0 и их производных.

Согласно (18), на втором шаге метода лучевых рядов в приближенном решении (10) двумерной динамической задачи появляются $\psi_m^{(1)}$, $\psi_n^{(2)}$, т. е. учитываются члены до третьей степени $(t - t_i)$ включительно. Подчеркнём, что такое решение имеет место только в ближних зонах за поверхностями сильных разрывов Σ_i (серые слои на рис. 1(b)). Как уже было сказано, использовать лучевой ряд за Σ_1 для определения решения перед Σ_2 и вычисления неизвестных функций переменной δ за счёт выполнения краевых условий (3) можно только на малых временах, близких к моменту возникновения граничных перемещений (3) (т. е. к $t = 0$).

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ЛУЧЕВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ГРАНИЦЕЙ — ПАРАБОЛОИДОМ ВРАЩЕНИЯ

На примере покажем результат применения лучевого метода к решению осесимметричных нестационарных задач динамики деформирования. Рассмотрим случай, когда криволинейная граница Q_0 является параболоидом вращения, т. е. в (2) примем $f(\delta) = \sqrt{2p\delta}$, $p = \text{const} > 0$. Для геометрических объектов на такой поверхности легко записать

$$n_r = -m_z = \sqrt{\frac{2\delta}{2\delta + p}}, \quad n_\varphi = m_\varphi = 0, \quad n_z = m_r = \sqrt{\frac{p}{2\delta + p}}, \quad a_{11}^0 = \frac{2\delta + p}{2\delta}, \quad a_{22}^0 = 2p\delta, \quad (21)$$

$$a_{12}^0 = 0, \quad b_{11}^0 = -\frac{n_z}{2\delta}, \quad b_{22}^0 = -2\delta n_z, \quad b_{12}^0 = 0, \quad k_1 = -n_z, \quad k_2 = -\frac{1}{\sqrt{p(2\delta + p)}}.$$

Тогда на первом шаге лучевого метода из (12), (16), (17) и (21) для $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ и $u_r^{(2)}$, $u_z^{(2)}$ в окрестностях позади Σ_1 и Σ_2 соответственно при малых временах получаем

$$u_r^{(1)} = -\kappa_n^{(1)} n_r (t - t_1) - \frac{\chi_m^{(1)}}{2} m_r (t - t_1)^2 = -\frac{1}{\sqrt{(1 - sk_1)(1 - sk_2)}} \sqrt{\frac{2\delta}{2\delta + p}} \left\{ \kappa_n^0 \left(t - \frac{s}{C_1} \right) - \frac{W_1(s, \delta)}{2} \sqrt{\frac{p}{2\delta + p}} \left(t - \frac{s}{C_1} \right)^2 \right\} - \dots, \quad \frac{s}{C_1} \leq t \leq \frac{s}{C_2}, \quad (22)$$

$$u_z^{(1)} = -\kappa_n^{(1)} n_z (t - t_1) - \frac{\chi_m^{(1)}}{2} m_z (t - t_1)^2 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(1 - sk_1)(1 - sk_2)}} \left\{ \sqrt{\frac{p}{2\delta + p}} \kappa_n^0 \left(t - \frac{s}{C_1} \right) + W_1(s, \delta) \frac{\delta}{2\delta + p} \left(t - \frac{s}{C_1} \right)^2 \right\} - \dots,$$

$$\begin{aligned}
u_r^{(2)} &= u_r^{(1)} - \kappa_m^{(2)} m_r (t - t_2) - \frac{\chi_n^{(2)} n_r}{2} (t - t_2)^2 = u_r^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{(1 - sk_1)(1 - sk_2)}} \left\{ \sqrt{\frac{p}{2\delta + p}} \kappa_m^0 \left(t - \frac{s}{C_2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + W_2(s, \delta) \frac{\delta}{2\delta + p} \left(t - \frac{s}{C_2} \right)^2 \right\} - \dots, \quad t \geq \frac{s}{C_2}, \\
u_z^{(2)} &= u_z^{(1)} - \kappa_m^{(2)} m_z (t - t_2) - \frac{\chi_n^{(2)} n_z}{2} (t - t_2)^2 = u_z^{(1)} - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{(1 - sk_1)(1 - sk_2)}} \sqrt{\frac{2\delta}{2\delta + p}} \left\{ -\kappa_m^0 \left(t - \frac{s}{C_2} \right) + \frac{W_2(s, \delta)}{2} \sqrt{\frac{p}{2\delta + p}} \left(t - \frac{s}{C_2} \right)^2 \right\} - \dots,
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
W_1(s, \delta) &= \frac{C_1}{(1 - sk_1)} \left(\frac{\kappa_n^0 s}{2} \left(\frac{k'_1}{(1 - sk_1)} + \frac{k'_2}{(1 - sk_2)} \right) + (\kappa_n^0)' \right), \quad \kappa_n^0 = -v_r \sqrt{\frac{2\delta}{2\delta + p}} - v_z \sqrt{\frac{p}{2\delta + p}}, \\
W_2(s, \delta) &= \frac{C_2}{(1 - sk_1)} \left(\frac{\kappa_m^0 s}{2} \left(\frac{k'_1}{(1 - sk_1)} + \frac{k'_2}{(1 - sk_2)} \right) + (\kappa_m^0)' \right), \quad \kappa_m^0 = -v_r \sqrt{\frac{p}{2\delta + p}} + v_z \sqrt{\frac{2\delta}{2\delta + p}}, \\
k'_1 &= 3 \sqrt{\frac{p}{(2\delta + p)^5}}, \quad k'_2 = \frac{1}{\sqrt{p(2\delta + p)^3}}, \\
(\kappa_n^0)' &= -\frac{v_r p}{\sqrt{2\delta}(2\delta + p)^3} + v_z \sqrt{\frac{p}{(2\delta + p)^3}}, \quad (\kappa_m^0)' = v_r \sqrt{\frac{p}{(2\delta + p)^3}} + \frac{v_z p}{\sqrt{2\delta}(2\delta + p)^3}.
\end{aligned}$$

Сходным образом, но исключительно громоздко, можно записать u_r , u_z на втором шаге лучевого метода. Эту часть решения здесь не приводим из-за ограничения на объём статьи.

Покажем отдельные результаты, иллюстрирующие построенное лучевое приближение. При этом для исходных данных задачи примем значения: $C_1=5931$ м/с, $C_2=3240$ м/с, $p=3$ м, $v_r=0.8$ м/с, $v_z=0.5$ м/с, $a_r=15$ м/с², $a_z=25$ м/с². На рис. 2 показаны графики перемещений $u_r(s, \delta, t)$ и $u_z(s, \delta, t)$ в малые моменты времени $\tau_1=1 \cdot 10^{-5}$ с, $\tau_2=2 \cdot 10^{-5}$ с при фиксированных значениях $\delta \in \{1 \text{ м}; 2 \text{ м}; 3 \text{ м}; 15 \text{ м}\}$. Рис. 3 демонстрирует соответствующие графики деформаций $e_{rr}(s, \delta, t)$. Нелинейную формулу для вычисления $e_{rr}(s, \delta, t)$, полученную подстановкой перемещений $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$ в форму (22), (23) в (1), здесь не приводим из-за её громоздкости. Вертикальными линиями на рис. 2, 3 обозначены координаты фронтов Σ_1 , Σ_2 в выбранные моменты времени, разные стили ломаных линий соответствуют различным значениям δ .

Согласно рис. 2, нелинейность перемещений (22), (23) по параметру s при выбранных малых временах (и соответственно на малых расстояниях от Σ_1 , Σ_2) достаточно слаба, поскольку полученные графики близки к кусочно-линейным. В то же время, увеличение параметра δ заметно влияет на рост $u_r(s, \delta, t)$ и убывание $u_z(s, \delta, t)$. Близость непрерывных частей графиков деформаций к прямым и схожесть полученных диаграмм на рис. 3(a), 3(b) обусловлена выбором малых времён, при которых волны Σ_1 и Σ_2 находятся ещё достаточно близко друг от друга и от нагружаемой поверхности Q_0 .

4. О ТОЧНОСТИ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ЛУЧЕВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с проблемой точности и области применимости лучевых рядов в решениях нестационарных многомерных задачах динамики деформирования. Если точное решение краевой задачи заменяется приближенным асимптотическим, то всегда возникает вопрос об области, где такое приближение обеспечивает необходимую точность. Этот же вопрос актуален и для лучевых представлений. Усечённые до нескольких

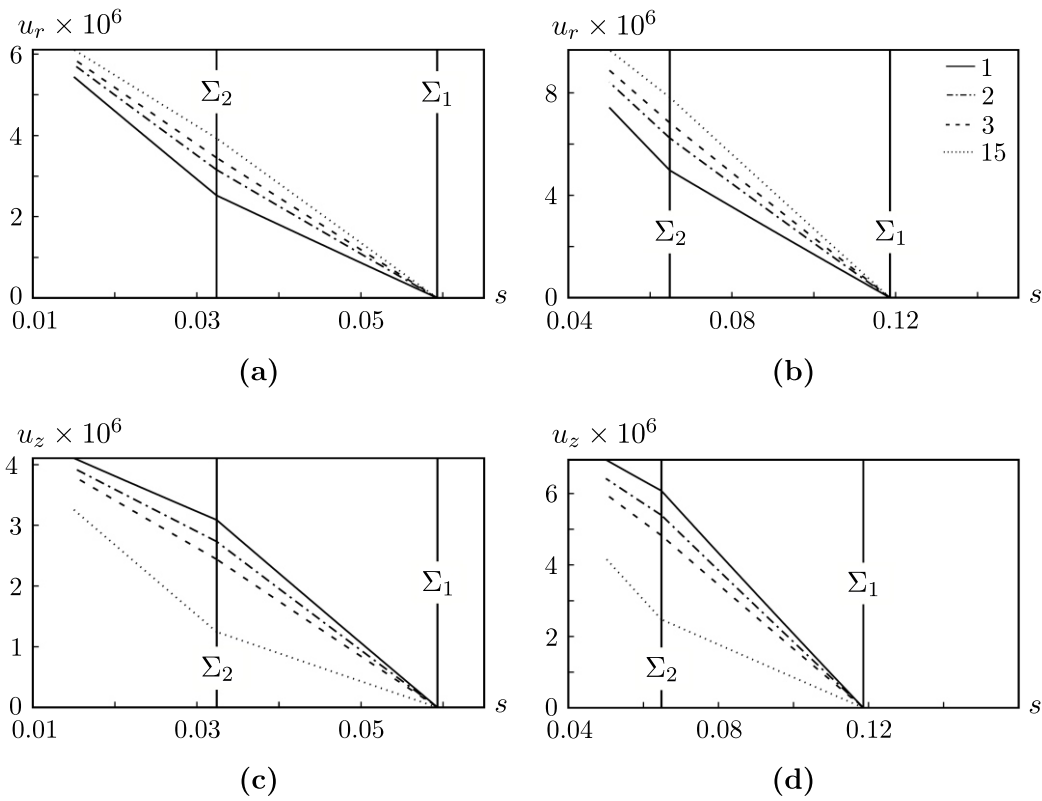


Рис. 2. Перемещения $u_r(s, \delta, t)$ и $u_z(s, \delta, t)$ при $t = \tau_1$ (a), (c) и $t = \tau_2$ (b), (d)

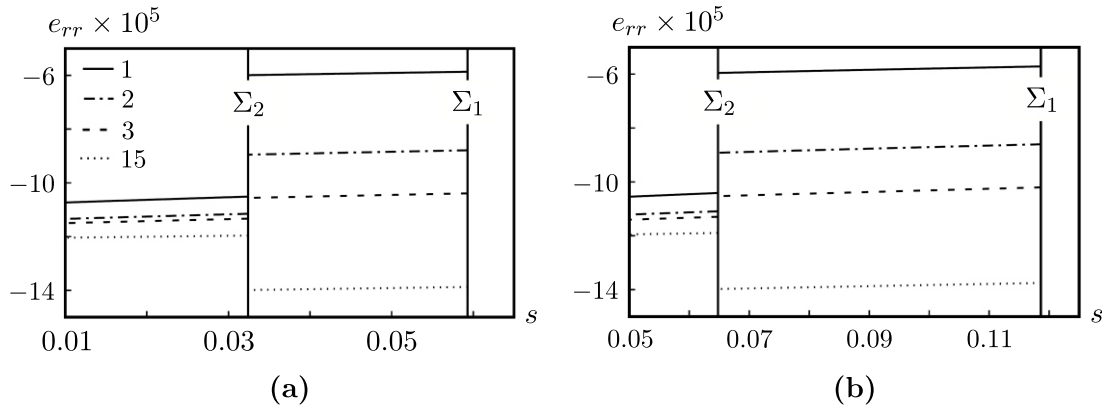


Рис. 3. Деформации $e_{rr}(s, \delta, t)$ при $t = \tau_1$ (a) и $t = \tau_2$ (b)

членов лучевые ряды в форме (11), которая используется для нестационарных краевых задач, изначально (по идеям в своей основе) относятся к асимптотическим методам, хотя и не используют безразмерные переменные. Действительно, лучевые разложения (11) можно записать относительно переменных $(t - t_1)/T$ и $(t - t_2)/T$, считая эти переменные малыми. Однако проблема доказательства асимптотического характера лучевых рядов подобной формы в настоящее время не имеет строгого математического решения. Пока что применение лучевого метода обосновывают его согласованностью с теорией характеристик и физикомеханическими свойствами волновых процессов (если не говорить об отдельных максимально простых краевых задачах).

Ещё одним вопросом, не имеющим на сегодняшний день ответа в общем виде, является определение области пригодности лучевых представлений (или, говоря иначе, на каком

расстоянии от волнового фронта приближенное решение в лучевых рядах продолжает обеспечивать требуемую точность и адекватно отражать реальное состояние полей перемещений и деформаций). Здесь оценки возможны в тех случаях, когда наряду с лучевым решением имеется точное решение краевой задачи. Так, в плоской одномерной задаче о продольной волне деформаций точным решением для перемещения $u_1(z_1, t)$ будет функция $f(t - z_1/C_1)$, где $u_1^0 = u_1(0, t) = f(t)$ — краевое условие на границе полупространства. Применяя к этой задаче лучевой метод, приближенное решение ищем по формуле

$$u^*(z_1, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right] \Big|_{t=\frac{z_1}{C_1}} \left(t - \frac{z_1}{C_1} \right)^k, \quad (24)$$

где для коэффициентов ряда из уравнений затухания следует $[\partial^k u / \partial t^k] \Big|_{\Sigma} = \alpha_k = \text{const}$, ($k = 1, 2, 3, \dots$). Эти коэффициенты определяются из краевого условия как $\alpha_k = - d^k f(t) / dt^k \Big|_{t=0}$. Поэтому, в частности, при $f(t) = vt + at^2/2$ достаточно двух шагов лучевого метода, чтобы точно выполнить краевое условие и формула (24) для u^* совпадала с точным решением в области $0 \leq z_1 \leq C_1 t$.

Ещё один достаточно простой пример — одномерная продольная сферическая волна, возникающая в среде при нестационарном воздействии на границу полости радиуса r_0 . Полагаем, что граничные перемещения — известные функции:

$$u_r|_{r=r_0} = vt + \frac{at^2}{2}, \quad u_\varphi|_{r=r_0} = u_\theta|_{r=r_0} = 0, \quad (25)$$

где r, φ, θ — сферическая координатная система. Тогда, решая с учётом (25) уравнение движения, следующее из системы (1), легко получить точное решение для единственной отличной от нуля компоненты поля перемещений $u_r(r, t)$ ($u_\varphi = u_\theta = 0$):

$$u_r(r, t) = \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \left\{ vt + \frac{a}{2} \left(t^2 - \frac{r^2 - r_0^2}{C_1^2} \right) + \exp \left(- \frac{C_1 \zeta}{r_0} \right) \left(- \frac{v}{C_1} (r - r_0) + a \frac{r_0 (r - r_0)}{C_1^2} \right) \right\}, \quad (26)$$

$$\zeta = t - \frac{r - r_0}{C_1}.$$

Приближенное решение u_r^* определяем согласно (24) двумя шагами лучевого метода:

$$u_r^*(r, t) = \frac{r_0}{r} v \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0 a}{r} - v C_1 \frac{r - r_0}{r^2} \right) \zeta^2 + \dots \quad (27)$$

Точное решение (26) раскладываем в ряд Тейлора по переменной ζ в окрестности $\zeta = 0$ (в окрестности Σ):

$$u_r(r, t) = \frac{r_0}{r} v \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0 a}{r} - v C_1 \frac{r - r_0}{r^2} \right) \zeta^2 + O(\zeta^3). \quad (28)$$

Сравнивая формулы (27) и (28), приходим к выводу, что в данном примере приближенное решение на основе лучевого метода совпадает с рядом Тейлора точного решения до членов второй степени включительно. Выбор ширины прифронтной области ζ^* ($0 \leq \zeta \leq \zeta^*$) здесь диктуется желаемой степенью точности приближения. Отметим, что применение лучевого метода на третьем, четвёртом и т. д. шагах также соответствует ряду Тейлора точного решения и увеличению ширины ζ^* прифронтной области, где точность приближенного решения будет достаточной. Необходимо добавить, что лучевые ряды становятся непригодными в окрестности особых точек на волновом фронте, а также при пересечении нескольких волновых фронтов (в задаче с гладкой поверхностью вращения Q_0 , у которой $K > 0$, такие ситуации не возникают).

В отличие от представленных примеров, в нашей задаче нет возможности сравнить лучевой ряд с точным решением. Многомерные нестационарные динамические задачи даже в модели среды Гука относятся к наиболее сложным случаям, для которых построение точного решения вызывает большие и не всегда преодолимые математические трудности. Для рассмотренной в п. 3 задачи представим графики невязок, возникающих в уравнениях движения (9) при подстановке в них формул (22), (23).

На рис. 4 приведены графики функций невязок уравнений Навье (9) в прифронтной области продольной волны Σ_1 : $\Psi_1(s)$, $\Phi_1(t)$ на рис. 4(a), 4(b) для первого уравнения системы (9); $\Psi_2(s)$, $\Phi_2(t)$ на рис. 4(c), 4(d) — для второго уравнения.

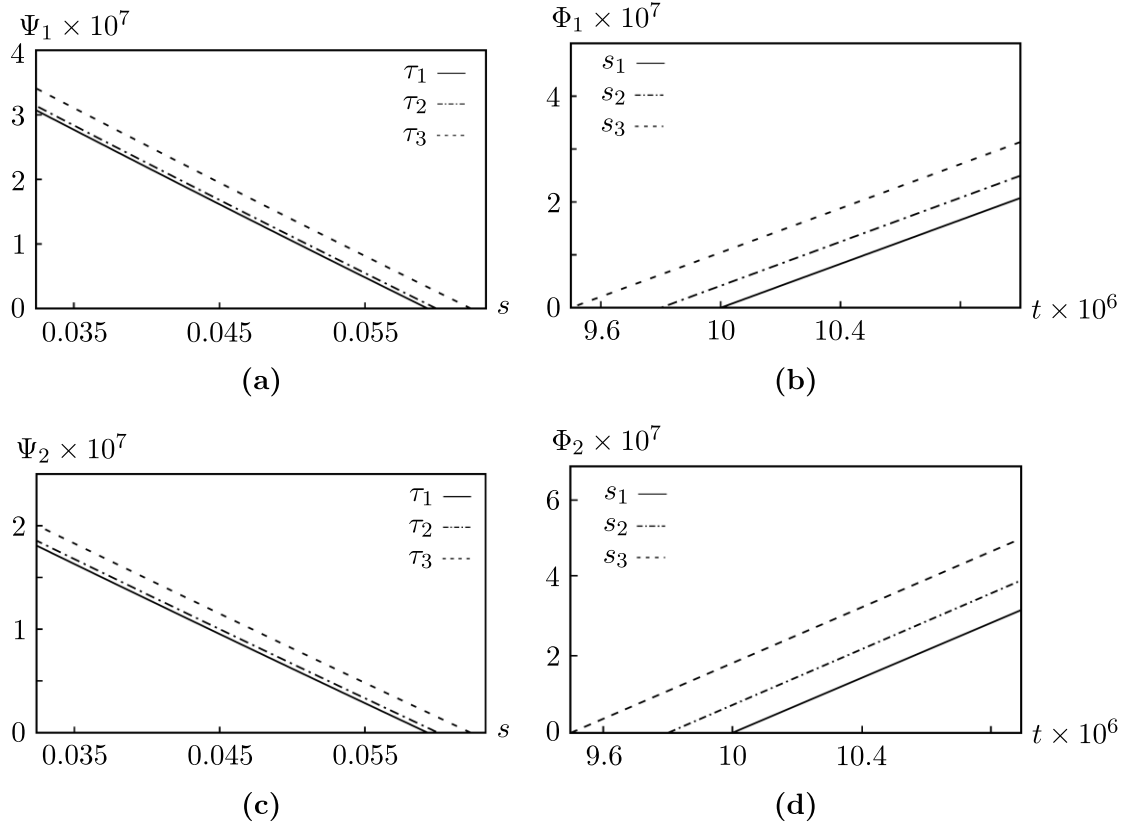


Рис. 4. Невязки уравнений движения (9) в прифронтной области за Σ_1 в фиксированные моменты времени (a), (c) и в фиксированных точках пространства (b), (d)

Графики на рис. 4(a), 4(c) получены при фиксированном значении параметра $\delta = 1$ м для моментов времени $t_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ с, $t_2 = 1.01 \cdot 10^{-5}$ с, $t_3 = 1.05 \cdot 10^{-5}$ с; графики на рис. 4(b), 4(d) получены для $s_1 = 0.05931$ м, $s_2 = 0.0581238$ м, $s_3 = 0.0563445$ м при $\delta = 10$ м. Таким образом, нулевые значения невязок соответствуют либо координате фронта Σ_1 в заданный момент времени (рис. 4(a), 4(c)), либо моментам времени, когда эта волна приходит в фиксированные точки пространства s_i (рис. 4(b), 4(d)). Меняя значение δ , можно получить невязки для всего семейства лучей. Представленные на рис. 4 графики показывают, что невязки уравнений (9), нулевые на продольной волне Σ_1 , при малом отходе от неё по времени или пространственной координате растут практически линейно, оставаясь порядка 10^{-8} – 10^{-7} . Можно предположить, что подобным линейным образом невязки ведут себя во всей прифронтной области за Σ_1 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Свойства упругих волн деформаций в массивах большой протяжённости, которые при решении краевых задач обычно представляются как область с бесконечно удалённой границей,

входят в множество важнейших объектов исследований деформационного поведения среды, подверженной природным или техногенным механическим воздействиям. Одним из эффективных приёмов, позволяющих получить приближенные решения для полей перемещений, деформаций и напряжений в прифронтных областях упругих волн разрыва скоростей, является лучевое разложение [11, 18, 27]. В нашей статье построено прифронтное решение осесимметричной двумерной задачи динамики деформирования линейноупругой среды с границей в форме произвольной гладкой поверхности вращения с положительной гауссовой кривизной для двух шагов лучевого метода. Для частного случая границы — параболоида вращения — приведено решение для одного шага метода. Полученные решения показывают, что при двумерном характере деформаций в решение j -го шага лучевого метода необходимо включать часть слагаемых с множителем $(t - t_k)^{j+1}$. Именно этот подход позволяет существенно снизить погрешность приближенного решения в окрестности волн сильных разрывов. Очевидно, что данное свойство распространяется и на двумерные процессы деформации в нелинейноупругих материалах. При этом и для линейноупругих, и для нелинейноупругих сред лучевые приближенные решения в прифронтных областях в комбинации с численными методами расчётов [15, 16], применяемыми в удалённых от передних фронтов областях, могут служить вполне эффективным инструментом численно-аналитического подхода [24].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (проект FFW-2021-0005). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fedorova L. V. Solution of the dynamic problem of the linear theory of elasticity // Mech. Solids. 2018. V. 53, N 6. P. 609–614; DOI: 10.3103/S002565441806002X
2. Fesenko A., Vaysfel'd N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity // Procedia Struct. Integrity. 2021. V. 33. P. 509–527; DOI: 10.1016/j.prostr.2021.10.058
3. Ильяшенко А. В. Распространение плоского ударного фронта в упругом слое // Изв. РАН. МТТ. 2022. Т. 5, № 5. С. 141–149; DOI: 10.31857/S0572329922050075
4. Burenin A. A., Gerasimenko E. A., Kovtanyuk L. V. On the unloading dynamics in an elastic/viscoplastic material predeformed by viscometric twisting // Mater. Phys. Mech. 2023. V. 51, N 1. P. 68–83; DOI: 10.18149/MPM.5112023_7
5. Садовский В. М. К теории ударных волн в изотропно упрочняющихся пластических средах // Прикл. мат. и мех. 2023. Т. 87, № 2. С. 254–264; DOI: 10.31857/S0032823523020133
6. Surana K. S., Knight J., Reddy J. N. Nonlinear waves in solid continua with finite deformation // Am. J. Comput. Math. 2015. V. 5, N 3. P. 345–386; DOI: 10.4236/ajcm.2015.53032
7. Пшеничников С. Г. Нестационарные динамические задачи линейной вязкоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 84–96.
8. Fesenko A. A., Moyseenok A. P. Exact solution of a nonstationary problem for the elastic layer with rigid cylindrical inclusion // J. Math. Sci. 2020. V. 249. P. 478–495; DOI: 10.1007/s10958-020-04954-3
9. Korovaytseva E. A., Pshenichnov S. G. Solutions of non-stationary dynamic problems of linear viscoelasticity // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 328–334; DOI: 10.1134/s1995080219030120
10. Тарлаковский Д. В., Салиев А. А., Мусурманова М. О., Шукуров А. М. Нестационарные колебания упруго-пористого пространства с двумя сферическими полостями под действием сдвиговых волн // Материалы XXV междунар. симпози. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. 2019. Т. 2. С. 131–133.

11. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Ray expansion theory // *Encycl. Contin. Mech.* 2019. P. 2126–2141; DOI: 10.1007/978-3-662-53605-6_97-1
12. *Вестяк В. А., Тарлаковский Д. В.* Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объёмных сил // *Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.* 2016. № 4. С. 48–54.
13. *Kachalov A. P.* Ray type solutions for waves of finite deformation in physically linear, nonlinear inhomogeneous elastic media // *J. Math. Sci.* 2017. V. 224. P. 79–89; DOI: 10.1007/s10958-017-3396-2
14. *Duyak I., Horlatch V., Salamakha M.* Parallel solution of dynamic elasticity problems // *Lect. Notes Mech. Eng.* 2020. P. 562–571; DOI: 10.1007/978-3-030-22365-6_56
15. *Seriani G., Oliveira S. P.* Numerical modeling of mechanical wave propagation // *Riv. del Nuovo Cim.* 2020. N 43. P. 459–514; DOI: 10.1007/s40766-020-00009-0
16. *Петров И. Б.* Сеточно-характеристические методы. 55 лет разработки и решения сложных динамических задач // *Comput. Math. Inf. Technol.* 2023. Т. 6, № 1. С. 6–21; DOI: 10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21
17. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
18. *Вервейко Н. Д., Егоров М. В.* Математическое моделирование динамического деформирования упруговязкопластических оболочек конечной длины лучевым методом // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2018. Т. 22, № 2. С. 325–343; DOI: 10.14498/vsgtu1610.
19. *Loktev A. A., Gridasova E. A., Zapol'nova E. V.* Simulation of the railway under dynamic loading. Part 1. Ray method for dynamic problem // *Contemp. Eng. Sci.* 2015. V. 8, N 20. P. 799–807; DOI: 110.12988/ces.2015.57204
20. *Rossikhin Y. A., Burenin A. A., Potianikhin D. A.* Shock waves via ray expansions // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* 2019. P. 2264–2279; DOI: 10.1007/978-3-662-53605-6_100-1
21. *Казаков Ю. С., Тарлаковский Д. В.* Учёт трения на начальном этапе вертикального внедрения выпуклого ударника в упругую полуплоскость // *Пробл. прочн. и пластич.* 2022. Т. 84, № 2. С. 225–235; DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-225-235
22. *Котов В. Л., Линник Е. Ю., Тарасова А. А.* Исследование оптимальных форм осесимметричных тел, проникающих в грунтовые среды // *Прикл. мех. техн. физ.* 2016. Т. 57, № 5. С. 66–75; DOI: 10.15372/PMTF20160508
23. *Димитриенко Ю. И.* Механика сплошной среды: учеб. пособие: в 4 т. Т. 4. Основы механики твёрдых сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013.
24. *Герасименко Е. А.* К проблеме выделения разрывов в численных расчётах динамики деформирования // *Учёные записки КнАГТУ.* 2022. № 5. С. 46–54; DOI: 10.17084/20764359-2022-61-46
25. *Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. Киев: Наукова Думка, 1988.
26. *Babich V. M., Buldyrev V. S.* Asymptotic methods in short-wavelength diffraction theory. Oxford: Alpha Science, 2009.
27. *Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.* Решение одной многомерной задачи ударной деформации упругого полупространства с искривлённой границей на основе модифицированного лучевого метода // *Изв. РАН. МТТ.* 2016. № 4. С. 132–143.

UDC 539.3

**APPROXIMATE NEAR-FRONT RAY SOLUTIONS IN THE
AXISYMMETRIC STRAIN DYNAMICS OF A LINEAR ELASTIC
HALF-SPACE**

© 2024 V. E. Ragozina^a, Yu. E. Ivanova^b, O. V. Dudko^c

*Institute of Automation and Control Processes, Far East Branch,
Russian Academy of Sciences, Vladivostok, 690041 Russia*

E-mails: ^aragozina@vlc.ru, ^bivanova@iacp.dvo.ru, ^cdudko@iacp.dvo.ru

Received 15.06.2023, revised 16.05.2024, accepted 03.07.2024

Abstract. The dynamics of axisymmetric two-dimensional strains in a linear elastic half-space bounded by a smooth surface of revolution with positive Gaussian curvature is considered. An approximate solution of the initial-boundary value problem is constructed on the basis of ray series with expansion in a time-like variable. The limited number of terms of the ray series is used for near-front domains of curvilinear waves of strong discontinuities. The coefficients of this series are the discontinuities of the derivatives of displacements with respect to time (starting from the first derivative). It is shown that it is necessary to take into account the ray series components up to the $(k + 1)$ st order inclusive at the k th step of the ray method for a two-dimensional type of the deformation process.

Keywords: linear elastic medium, axisymmetric problem, surface of strong discontinuities, ray series, attenuation equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.309

REFERENCES

1. L. V. Fedorova, “Solution of the dynamic problem of the linear theory of elasticity,” *Mech. Solids* **53** (6), 609–614 (2018). <https://doi.org/10.3103/S002565441806002X>
2. A. Fesenko and N. Vaysfel'd, “The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity,” *Procedia Struct. Integr.* **33**, 509–527 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>
3. A. V. Il'yashenko, “Propagation of a flat shock front in an elastic layer,” *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela* **5** (5), 141–149 (2022) [in Russian]. <https://doi.org/10.31857/S0572329922050075>
4. A. A. Burenin, E. A. Gerasimenko, and L. V. Kovtanyuk, “On the unloading dynamics in an elastic/viscoplastic material predeformed by viscometric twisting,” *Mater. Phys. Mech.* **51** (1), 68–83 (2023). https://doi.org/10.18149/MPM.5112023_7
5. V. M. Sadovskii, “To the theory of shock waves in isotropically hardening plastic media,” *Prikl. Mat. Mekh.* **87** (2), 254–264 (2023) [in Russian]. <https://doi.org/10.31857/S0032823523020133>
6. K. S. Surana, J. Knight, and J. N. Reddy, “Nonlinear waves in solid continua with finite deformation,” *Am. J. Comput. Math.* **5** (3), 345–386 (2015). <https://doi.org/10.4236/ajcm.2015.53032>
7. S. G. Pshenichnov, “Nonstationary dynamic problems of nonlinear viscoelasticity,” *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela* no. 1, 84–96 [Mech. Solids **48** (1), 68–78 (2013)].
8. A. A. Fesenko and A. P. Moyseenok, “Exact solution of a nonstationary problem for the elastic layer with rigid cylindrical inclusion,” *J. Math. Sci.* **249**, 478–495 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04954-3>

9. E. A. Korovaytseva and S. G. Pshenichnov, "Solutions of non-stationary dynamic problems of linear viscoelasticity," *Lobachevskii J. Math.* **40**, 328–334 (2019). <https://doi.org/10.1134/s1995080219030120>
10. D. V. Tarlakovskii, A. A. Saliev, M. O. Musurmanova, and A. M. Shukurov, "Nonstationary oscillations of an elastic-porous space with two spherical cavities under the action of shear waves," *Mater. XXV mezhdunar. simpoz. "Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstrukttsii i sploshnykh sred" im. A. G. Gorshkova* (Proc. XXV Gorshkov Int. Sympos. "Dynamic and technological problems of mechanics of structures and continuous media"), 2019, vol. 2, pp. 131–133 [in Russian].
11. Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova, "Ray expansion theory," in *Encycl. Contin. Mech.*, pp. 2126–2141 (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_97-1
12. V. A. Vestyak and D. V. Tarlakovskii, "Nonstationary axisymmetric strain of elastic space with a spherical cavity under the action of volumetric forces," *Vestn. Mosk. Gos. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.* no. 4, 48–54 (2016) [in Russian].
13. A. P. Kachalov, "Ray type solutions for waves of finite deformation in physically linear, nonlinear inhomogeneous elastic media," *J. Math. Sci.* **224**, 79–89 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3396-2>
14. I. Dyyak, V. Horlatch, and M. Salamakha, "Parallel solution of dynamic elasticity problems," in *Lect. Notes Mech. Eng.* pp. 562–571 (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6_56
15. G. Seriani and S. P. Oliveira, "Numerical modeling of mechanical wave propagation," *Riv. Nuovo Cim.* **43**, 459–514 (2020). <https://doi.org/10.1007/s40766-020-00009-0>
16. I. B. Petrov, "Grid-characteristic methods. 55 years of developing and solving complex dynamic problems," *Comput. Math. Inf. Technol.* **6** (1), 6–21 (2023) [in Russian]. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21>
17. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (New York—London—Sydney—Toronto, John Wiley & Sons, 1974.; Mir, Moscow, 1977).
18. N. D. Verveiko and M. V. Egorov, "Mathematical modeling of dynamic strain of elastic-viscoplastic shells of finite length by the ray method," *Vestn. Samarsk. Gos. Tekh. Univ Ser. Fiz.-Mat. Nauki* **22** (2), 325–343 (2018). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1610>
19. A. A. Loktev, E. A. Gridasova, and E. V. Zapol'nova, "Simulation of the railway under dynamic loading. Part 1. Ray method for dynamic problem," *Contemp. Eng. Sci.* **8** (20), 799–807 (2015). <https://doi.org/110.12988/ces.2015.57204>
20. Y. A. Rossikhin, A. A. Burenin, and D. A. Potianikhin, "Shock waves via ray expansions," in *Enc. Contin. Mech.*, pp. 2264–2279, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_100-1
21. Yu. S. Kazakov and D. V. Tarlakovskii, "Taking into account friction at the initial stage of vertical penetration of a convex striker into an elastic half-plane," *Probl. Prochn. Plastichn.* **84** (2), 225–235 (2022) [in Russian]. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-2-225-235>
22. V. L. Kotov, E. Yu. Linnik, and A. A. Tarasova, "Study of optimal forms of axisymmetric bodies penetrating into soil media," *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **57** (5), 66–75 (2016) [in Russian]. <https://doi.org/10.15372/PMTF20160508>
23. Yu. I. Dimitrienko, *Continuum Mechanics: A Textbook in 4 Vols. Vol. 4. Fundamentals of Solid Mechanics* (Izd. MG TU im. N.E Bauman, Moscow, 2013) [in Russian].
24. E. A. Gerasimenko, "To the problem of identifying discontinuities in numerical calculations of strain dynamics," *Uch. Zap. KnAGTU* no. 5, 46–54 (2022) [in Russian]. <https://doi.org/10.17084/20764359-2022-61-46>
25. Yu. N. Podil'chuk and Yu. K. Rubtsov, *Ray Methods in the Theory of Wave Propagation and Scattering* (Naukova Dumka, Kiev, 1988) [in Russian].
26. V. M. Babich and V. S. Buldyrev, *Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory* (Alpha Science, Oxford, 2009).
27. V. E. Ragozina and Yu. E. Ivanova, "Solution of a multidimensional impact deformation problem for an elastic half-space with curved boundary on the basis of a modified ray method," *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela* no. 4, 132–143 (2016) [Mech. Solids **51** (4), 484–493 (2016)].