СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 3. С. 143–156

УДК 517.956

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО ОТЫСКАНИЮ ИСТОЧНИКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

© 2024 **К. Б. Сабитов**

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
просп. Октября, 71, г. Уфа 450054, Россия,
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии,
просп. Ленина, 49, г. Стерлитамак 453103, Россия

E-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Поступила в редакцию 27.11.2023 г.; после доработки 27.03.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

В статье приводятся постановки обратных задач для уравнения теплопроводности по отысканию его правой части с дополнительным интегральным условием и обоснование их корректности в смысле Адамара в классе регулярных решений. Единственность решений поставленных задач доказана на основании интегральных тождеств. Методами разделённых переменных и интегральных уравнений решения задач построены в явном виде.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, обратные задачи, единственность решения, метод интегральных тождеств, существование решения, ряд, интегральное уравнение, устойчивость решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.310

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим более общее уравнение параболического типа

$$\mathcal{L}u \equiv N(x)u_t - K(t)u_{xx} + a(x,t)u_x + c(x,t)u = F(x,t) = f(x)g(t) \tag{1}$$

в области $D = \{(x,t)\, 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, l, T — заданные положительные постоянные, $N(x) > 0$, $K(t) > 0$, $a(x,t)$, $c(x,t)$ — заданные функции и поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти пару функций $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D), \quad u_x \in L_2(D); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,l) \cap L[0,l]; \tag{3}$$

$$\mathcal{L}u(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{6}$$

$$\int\limits_0^T u(x,t)g(t)\,dt = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Задача 2. Найти пару функций $u(x,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих условиям (2), (4)–(6) и, кроме этого,

$$g(t) \in C(0,T) \cap L[0,T],$$

$$\int_0^l u(x,t)f(x)\,dx = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

где $\varphi(x)$, $h(t)$ и $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$,

$$\int_0^l \varphi(x)f(x)\,dx = h(0). \tag{9}$$

В задачах 1 и 2 интегральные условия (7) и (8) являются дополнительными условиями для определения функций $f(x)$ и $g(t)$.

Аналогичные обратные задачи изучены в работе [1], стр. 123–126, [2], стр. 248–252, для уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2u_{xx} = f(x)g(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T \tag{10}$$

с нулевыми граничными и начальным условиями

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

с заданием дополнительного условия

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x_0 \in [0,l]. \tag{11}$$

Для обратной задачи по определению функций $u(x,t)$ и $g(t)$ доказана теорема единственности и существования решения, когда $f(x_0) \neq 0$. Приведён пример функции $f(x)$, такой, что $f(x) = -f(l-x)$, и точки $x_0 = l/2$, где $f(l/2) = 0$, для которых эта обратная задача имеет не единственное решение. В случае задачи по отысканию пары функций $u(x,t)$ и $f(x)$ относительно неизвестной функции $f(x)$ получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода, тем самым показана некорректность постановки этой задачи, хотя при $g(t) \equiv 1$ и $x_0 = 0$ доказана единственность решения интегрального уравнения в классе $L_2[0,l]$.

В нашей работе [3] обратная задача по отысканию пары функций $u(x,t)$ и $g(t)$ для уравнения (10) с дополнительным условием (11) исследована при более слабых условиях относительно функции $f(x)$ и при $u(x,0) = \varphi(x) \neq 0$. Отдельно изучены случаи, когда $f(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$; $f(x_0) = f''(x_0) = 0$ и $f^{IV}(x_0) \neq 0$ и т. д. Во всех этих случаях доказаны теоремы об однозначной разрешимости этой задачи. Обратная задача по нахождению пары функций $u(x,t)$ и $f(x)$ для уравнения (10) изучена с дополнительным условием

$$u(x,t_0) = \varphi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t_0 \leqslant T. \tag{12}$$

Здесь установлен критерий решения задачи, которое построено в виде суммы рядов Фурье.

Отметим, что задача 2 исследована для общих параболических уравнений с правой частью $F(x,t) = h(x,t)g(t)$ в работе [4]. Найдены достаточные условия относительно коэффициентов, при которых такая задача имеет единственное решение. При этом не исследованы вопросы о существенности достаточного условия

$$|h(x_0,t)| \geqslant h_0 = const > 0$$

на функцию $h(x,t)$ при неизвестной функции $g(t)$ и корректность задачи в зависимости от выбора точки x_0 из $[0,l]$.

В работе [5] рассмотрены обратные задачи нахождения свободного члена и коэффициента перед $u(x,t)$ в общем параболическом уравнении. Доказаны фредгольмовость линейной обратной задачи нахождения правой части специального вида, а также глобальные теоремы существования, единственности и устойчивости её решения.

Отметим также работу [6], где для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка

$$u'(t) = Au(t) + \varphi(t)p + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

в банаховом пространстве E изучена обратная задача по отысканию пары $u(t)$ и $p \in E$ с заданием условий $u(0) = u_0$, $u(T) = u_1$, где A — линейный замкнутый оператор и указаны достаточные условия на функции $\varphi(t)$ и $f(t)$, которые обеспечивают существование единственного решения поставленной задачи.

В работе [7] исследованы обратные задачи об определении функции $p(t) \in L_p(0,T;Y_0)$ (Y_0 — некоторое банахово пространство), входящей в правую часть операторно-дифференциального уравнения вида

$$L(t)u = u_t - A(t)u - B(t)u = f(t,u,p(t)),$$

где $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$, $\{B(t)\}_{t\in[0,T]}$ — семейства линейных определённых в некотором банаховым пространстве X операторов и $f(t,u,p(t))$ — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор. Получены локальные по времени теоремы существования и единственности решений. В другой работе [8] изучается обратная задача по отысканию решения и правой части специального вида для параболического уравнения

$$u_t - L_0 u = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)\delta(x - x_i) + f(x,t), \quad (x,t) \in (a,b) \times (0,T),$$

где $L_0 u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$ и δ — дельта-функция Дирака. Здесь неизвестными являются функции $u(x,t)$ — концентрация загрязняющего вещества в воздухе или водоёме, функции $N_i(t)$ — мощности источников загрязнения, точки $x_i \in (a,b)$ — точечные источники и r — число этих источников. Изучен вопрос о разрешимости, единственности и некоторых качественных свойствах решений. Приведены примеры, показывающие, что без дополнительных условий на взаимное расположение источников и точек измерений единственность может отсутствовать. В работе [9] для параболического уравнения

$$u_t + A(t,x,D)u = \sum_{i=1}^{s} f_i(x,t)q_i(t) + f_0(x,t),$$

где $A(t,x,D)$ — эллиптический оператор второго порядка, рассматривается обратная задача об определении решения u и функции $q_i(t)$ по интегральным данным переопределения $\int_G u\varphi_i(x)dx = \psi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,s$. Решение параболического уравнения является обобщённым и в качестве правой части допускаются распределения из некоторых классов. При определённых условиях на данные задачи показано, что обратная задача корректна в классах Соболева и, в частности, имеют оценки об устойчивости.

В работе [10] для общего параболического уравнения исследуется обратная задача восстановления источника — правой части $F(x,t) = h(x,t)f(x)$, где неизвестной является функция $f(x)$. Для нахождения $f(x)$ помимо начальных и граничных условий задаётся дополнительное условие нелокального наблюдения вида

$$\int_0^T u(x,t)d\mu(t) = \chi(x).$$

Для поставленной задачи доказано свойство фредгольмовости, получены достаточные условия существования и единственности её решения. Эти условия имеют вид легко проверяемых неравенств и не содержат ограничений на величину $T > 0$ и диаметр рассматриваемой области Ω. Доказательство основывается на априорных оценках и качественных свойствах решений начально-краевых задач для параболических уравнений.

В данной работе введение дополнительных интегральных условий в виде (7) и (8) [11] вместо условий (11) и (12) позволяет установить на прямую единственность решения задач 1 и 2 для уравнения (1) методом интегральных тождеств и в случае, когда $N(x) \equiv 1$, $K(t) \equiv a^2$, $a = \mathrm{const} > 0$, $a(x,t) \equiv 0$, $c(x,t) \equiv \mathrm{const} \equiv c \geqslant 0$, построить решение в явном виде.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Теорема 1. *Пусть $K(t) \in C[0,T]$, $K(t) > 0$ при $t > 0$, $K(0) \geqslant 0$; $N(x) \in C[0,l]$, $N(x) > 0$ при $x > 0$, $N(0) \geqslant 0$, $a(x,t)$, $c(x,t)$, $a'_x(x,t) \in C(\overline{D})$, $2c - a'_x \geqslant 0$ в D; $g(t) \in C(0,T) \cap L[0,T]$, $g(t) \neq 0$ на $(0,T)$. Тогда, если существует решение задачи 1, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ и $f(x)$ — решение задачи 1 при нулевых условиях $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$. Тогда в области D имеет место тождество

$$2u\mathcal{L}u = (N(x)u^2)_t - (2K(t)uu_x - au^2)'_x + 2Ku_x^2 + (2c - a'_x)u^2 = 2uF(x,t). \tag{13}$$

Интегрируя тождество (13) по области $D_{\varepsilon,\delta} = \{(x,t)\, \varepsilon < x < l - \varepsilon,\ \delta < t < T - \delta\}$, где ε и δ — достаточно малые постоянные, затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, получим

$$\int\limits_0^l N(x)u^2(x,t)\,dx + \int\limits_D \left[2K(t)u_x^2 + (2c - a'_x)u^2\right] dxdt =$$
$$= 2\int\limits_D uF(x,t)\,dxdt = 2\int\limits_0^l f(x)\left(\int\limits_0^T ug(t)\,dt\right) dx = 0.$$

Из данного равенства следует, что $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$, а из уравнения (1) при условии $g(t) \neq 0$ на $(0,T)$ вытекает, что $f(x) \equiv 0$.

Отметим, что идея доказательства этой теоремы исходит из работы [12]. □

Теорема 2. *Пусть коэффициенты $K(t)$, $N(x)$, $a(x,t)$, $c(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и $f(x) \in C(0,l) \cap L[0,l]$, $f(x) \neq 0$ на $(0,l)$. Тогда, если существует решение задачи 2, то оно единственно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и проводится на основании тождества (13).

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В дальнейшем установим теоремы существования и устойчивости решений задач 1 и 2 для уравнения теплопроводности, т. е. в уравнении (1) положим, что $N(x) \equiv 1$, $K(t) \equiv a^2$, $a = \mathrm{const} > 0$, $a(x,y) \equiv 0$, $c(x,y) \equiv \mathrm{const} = c \geqslant 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$u_t - a^2u_{xx} + cu = F(x,t). \tag{14}$$

В постановке обратных задач 1 и 2 прямой задачей является начально-граничная задача (2), (5), (6) и (14). Решение этой задачи нами построено в явном виде [13], стр. 18–24,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x), \tag{15}$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n^2 t} + \int\limits_0^t F_n(s) e^{-\lambda_n^2 (t-s)}\, ds, \tag{16}$$

$$\varphi_n = \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx, \tag{17}$$

$$F_n(t) = \int\limits_0^l F(x,t) X_n(x)\, dx, \tag{18}$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad \lambda_n^2 = (a\mu_n)^2 + c.$$

При $F(x,t) = f(x)g(t)$ функции (18) и (16) принимают вид

$$F_n(t) = g(t) f_n,$$

$$f_n = \int\limits_0^l f(x) X_n(x)\, dx, \tag{19}$$

$$u_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n^2 t} + f_n g_n(t), \tag{20}$$

$$g_n(t) = \int\limits_0^t g(s) e^{-\lambda_n^2 (t-s)}\, ds. \tag{21}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $f(x) \in C^1[0,l]$, $f(0) = f(l) = 0$, $g(t) \in C[0,T]$, *то существует единственное решение задачи* (2), (5), (6) *и* (14) *и оно определяется формулой* (15), *где* $u_n(t)$ *находится по формуле* (20).

Доказательство теоремы 3 можно найти в работе [13], стр. 20–23.

Далее перейдём к обоснованию существования решения задачи 1 для уравнения (14).

Функцию (15) удовлетворим нелокальному интегральному условию (7):

$$\int\limits_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \right) g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int\limits_0^T g(t) u_n(t)\, dt = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x), \tag{22}$$

где

$$\psi_n = \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx.$$

Из равенства (22) с учётом (20) найдём равенство для нахождения коэффициентов f_n:

$$\int\limits_0^T g(t) u_n(t)\, dt = \int\limits_0^T g(t) \Big[\varphi_n e^{-\lambda_n^2 t} + f_n g_n(t) \Big]\, dt = \psi_n$$

или

$$f_n \int\limits_0^T g(t) g_n(t)\, dt = \psi_n - \varphi_n \int\limits_0^T g(t) e^{-\lambda_n^2 t}\, dt. \tag{23}$$

Пусть $g(t) \equiv 1$. Тогда равенство (23) принимает вид

$$f_n \frac{1}{\lambda_n^2} \left[T + \frac{e^{-\lambda_n^2 T}}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_n^2} \right] = \psi_n - \frac{\varphi_n}{\lambda_n^2} \Big(1 - e^{-\lambda_n^2 T} \Big). \tag{24}$$

Отсюда находим неизвестные коэффициенты

$$f_n = \frac{\lambda_n^2}{\delta_n(T)} \left[\psi_n - \frac{\varphi_n}{\lambda_n^2} \Big(1 - e^{-\lambda_n^2 T} \Big) \right] \tag{25}$$

при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_n(T) = T - \frac{1}{\lambda_n^2} \Big(1 - e^{-\lambda_n^2 T} \Big) \neq 0.$$

В силу теоремы единственности решения задачи 1 выражение $\delta_n(T)$ не равно нулю при всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$. Тогда $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$. Если при некотором $n = p \in \mathbb{N}$ выражение $\delta_p(T) = 0$, то из равенства (24) следует, что f_p — произвольная постоянная, вообще говоря, не равная нулю. Тогда обратная задача 1 с нулевыми граничными условиями при $g(t) \equiv 1$ имеет ненулевое решение

$$u(x,t) = \frac{f_p}{\lambda_p^2} \Big(1 - e^{-\lambda_p^2 t} \Big) X_p(x), \quad f(x) = f_p X_p(x).$$

Далее, найденные значения f_n по формуле (25) подставив в (20), получим

$$u_n(t) = \varphi_n \left[e^{-\lambda_n^2 t} - \frac{(1 - e^{-\lambda_n^2 t})(1 - e^{-\lambda_n^2 T})}{\lambda_n^2 \delta_n(T)} \right] + \psi_n \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 t}}{\delta_n(T)}. \tag{26}$$

Тогда решение обратной задачи 1 для уравнения (14) определяется рядами

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{27}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \tag{28}$$

где $u_n(t)$ и f_n находятся соответственно формулами (26) и (25).

Лемма. *Для коэффициентов $u_n(t)$ и f_n справедливы следующие оценки:*

$$|u_n(t)| \leqslant M_1 \Big(|\varphi_n| + |\psi_n| \Big), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{29}$$

$$|u_n(t)| \leqslant M_2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} |\varphi_n| + |\psi_n| \right), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$|u_n'(t)| \leqslant M_3 \lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2 t_0} \Big(|\varphi_n| + |\psi_n| \Big), \quad 0 < t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$|f_n| \leqslant M_4 \Big(|\varphi_n| + \lambda_n^2 |\psi_n| \Big), \tag{30}$$

где M_i — здесь и далее положительные постоянные, которые не зависят от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, t_0 — достаточно малое число.

Справедливость этих оценок непосредственно следует из формул (26) и (25) в силу ограниченности и отделённости от нуля выражения $\delta_n(T)$.

На основании леммы 1 ряд (27) на $\overline{D}$ и его производные по t и дважды по x на $\overline{D}_{t_0} = \overline{D} \cap \{t \geqslant t_0\}$ мажорируются соответственно числовыми рядами

$$M_5 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_n| + |\psi_n|\Big),$$

$$M_6 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_n| + n^2|\psi_n|\Big). \tag{31}$$

А ряд (28) в силу оценки (30) мажорируется рядом (31).

Теорема 4. *Если* $\varphi(x) \in C[0,l]$, $\varphi'(x) \in L_2(0,l)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(x) \in C^2[0,l]$, $\psi'''(x) \in L_2(0,l)$, $\psi(0) = \psi''(0) = \psi(l) = \psi''(l) = 0$, $g(t) \equiv 1$, *то существует единственное решение обратной задачи* 1 *для уравнения* (14) *и оно определяется суммами рядов* (27) *и* (28), *при этом* $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{D}_{t_0})$ *и* $f(x) \in C[0,l]$.

Доказательство. В силу наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ условий коэффициенты φ_n и ψ_n, определённые соответственно формулами (17) и (14), их разложения в ряд Фурье по системе $X_n(x)$ на сегменте $[0,l]$ можно представить в виде

$$\varphi_n = \frac{1}{\mu_n}\varphi_n^{(1)}, \quad \psi_n = \frac{1}{\mu_n^3}\psi_n^{(3)},$$

здесь

$$\varphi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi'(x)\cos\mu_n x\,dx, \quad \psi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi'''(x)\cos\mu_n x\,dx,$$

при этом справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(1)}|^2 \leqslant \|\varphi'(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(3)}|^2 \leqslant \|\psi'''(x)\|^2_{L_2[0,l]}.$$

Тогда числовой ряд (31) мажорируется сходящимся рядом

$$M_7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(|\varphi_n^{(1)}| + |\psi_n^{(3)}|\Big).$$

В силу этого ряды (27) и (28) сходятся равномерно на $\overline{D}$ и $[0,l]$ соответственно, при этом ряд (27) допускает почленное дифференцирование по t и дважды по x в $\overline{D}_{t_0}$. Покажем, что эти ряды удовлетворяют в $\overline{D}_{t_0}$ уравнению (14):

$$u_t - a^2u_{xx} + cu = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)X_n(x) + a^2\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 u_n(t)X_n(x) + c\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_n'(t) + \lambda_n^2 u_n(t)\Big]X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) = f(x),$$

так как функция (20) удовлетворяет при $g(t) \equiv 1$ равенству

$$u_n'(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = f_n.$$

□

Замечание. Заметим, что при построении решения обратной задачи 1, формально воспользовавшись формулой (15) решения прямой задачи и условием (7), найдены неизвестные коэффициенты f_n по формуле (25). Затем решение задачи 1 ищется в виде суммы рядов (27) и (28) и доказано, что эти ряды удовлетворяют условиям (2)–(4), т. е. здесь мы не пользуемся теоремой 3. Можно было напрямую искать решение обратной задачи в виде суммы рядов (27) и (28). Исходя из условий (4), (6) и (7) найти неизвестные их коэффициенты $u_n(t)$ и f_n.

Устойчивость решения задачи 1 от заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ устанавливается следующим утверждением.

Теорема 5. *Для решения задачи* (2), (3), (5)–(7), (14) *имеют место оценки*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leqslant M_8\Big(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\Big), \tag{32}$$

$$\|f(x)\|_{L_2[0,l]} \leqslant M_9\Big(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi''(x)\|_{L_2[0,l]}\Big), \tag{33}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leqslant M_{10}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{C[0,l]}\Big),$$

$$\|f(x)\|_{C[0,l]} \leqslant M_{11}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'''(x)\|_{C[0,l]}\Big). \tag{34}$$

Доказательство. Поскольку система $X_n(x)$ ортонормированная на $[0,l]$, то в силу оценки (29) на основании формулы (27) имеем

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leqslant 2M_1^2 \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n^2 + \psi_n^2) = 2M_1^2\Big(\|\varphi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]}\Big).$$

Отсюда следует оценка (32).

Пусть (x,t) — любая точка из $\overline{D}$. Тогда из формулы (27) с учётом оценки (29) получим

$$|u(x,t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} M_1 \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| + |\psi_n|. \tag{35}$$

Далее, используя представления

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^{(1)}}{\mu_n}, \quad \psi_n = \frac{\psi_n^{(1)}}{\mu_n},$$

где

$$\varphi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'(x)\cos\mu_n x\,dx, \quad \psi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'(x)\cos\mu_n x\,dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(1)}|^2 \leqslant \|\varphi'(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(1)}|^2 \leqslant \|\psi'(x)\|^2_{L_2[0,l]},$$

и неравенство Коши—Буняковского из (35), получим

$$|u(x,t)| \leqslant \widetilde{M}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|\varphi_n^{(1)}| + \frac{1}{n}|\psi_n^{(1)}| \leqslant \widetilde{M}_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(1)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n^{(1)}|^2\right)^{1/2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}_2\Big(\|\varphi'(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{L_2[0,l]}\Big) \leqslant M_{10}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{C[0,l]}\Big),$$

где $\widetilde{M}_i$ — здесь и далее положительные постоянные.

Аналогично доказываются оценки (33) и (34).

Пусть теперь $g(t) \not\equiv 1$. В условиях теоремы 1 $g(t) \neq 0$ на $(0,T)$. Поэтому при $g(t) \in C[0,T]$ можно считать, что $g(t) \geqslant g_0 = \mathrm{const} > 0$. Тогда функции $g_n(t)$ можно представить в виде

$$g_n(t) = g(\xi) \int\limits_0^t e^{-\lambda_n^2(t-s)}\, ds = g(\xi) \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2},$$

где $0 < \xi < t$, и аналогично устанавливаются справедливость теорем 4 и 5. □

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 2

Решение начально-граничной задачи (15) удовлетворим нелокальному интегральному условию (8). Тогда с учётом (19) получим

$$\int\limits_0^l u(x,t) f(x)\, dx = \int\limits_0^l \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) f_n = h(t). \tag{36}$$

В равенство (36) подставим (20) с учётом (21). Тогда получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $g(t)$:

$$\int\limits_0^t g(s) K(s,t)\, ds = \widetilde{h}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{37}$$

где

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 e^{-\lambda_n^2(t-s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{38}$$

$$\widetilde{h}(t) = h(t) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{39}$$

При этом необходимо с учётом равенства (9) выполнение условия

$$\int\limits_0^l \varphi(x) f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n f_n. \tag{40}$$

В силу наложенных условий относительно функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ в теореме 3 при исследовании прямой задачи (2), (5), (6) и (14) ядро $K(s,t)$ и правая часть $\widetilde{h}(t)$ интегрального уравнения (37) непрерывны дифференцируемы по t в областях определения, т. е. ряды в (38) и (39) сходятся равномерно в областях задания и допускают почленное дифференцирование по t. В силу этого дифференцируя уравнение (37) получим

$$g(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 + \int\limits_0^t \frac{\partial K(s,t)}{\partial t} g(s)\, ds = \widetilde{h}'(t). \tag{41}$$

В силу теоремы 2 функция $f(x) \neq 0$ на $(0,l)$, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \int\limits_0^l f^2(x)\, dx = \|f(x)\|^2_{L_2[0,l]} > 0.$$

Следовательно, интегральное уравнение (41) является уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Как известно, что такие уравнения однозначно разрешимы в классе непрерывных на $[0,T]$ функций.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 3, $f(x)\not\equiv 0$ на $(0,l)$, $h(t)\in C^1[0,T]$ и выполнены условия* (9) *и* (40), *то существует единственное решение обратной задачи* 2 *для уравнения* (14). *При этом функция $g(t)$ определяется как решение интегрального уравнения* (41), *затем функция $u(x,t)$ — по формуле* (15) *как решение начально-граничной задачи* (2), (5), (6) *и* (14).

Далее докажем устойчивость решения задачи 2 для уравнения (14) в зависимости от функций $\varphi(x)$ и $h(x)$.

Теорема 7. *Для решения задачи 2 для уравнения* (14) *справедливы оценки*

$$\|g(t)\|_{C[0,T]}\leqslant M_{12}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}+\|h'(t)\|_{C[0,T]}\Big). \tag{42}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})}\leqslant M_{13}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}+\|h'(x)\|_{C[0,T]}\Big). \tag{43}$$

Отметим, что в этих оценках постоянные M_{11} и M_{12} зависят от функции $f(x)$.

Доказательство. Решение интегрального уравнения (41) можно построить через резольвенту $R(s,t,\lambda)$ ядра $H(s,t)=\dfrac{\partial K(s,t)}{\partial t}$ по формуле

$$g(t)=\overline{h}(t)+\lambda\int\limits_0^t R(s,t,\lambda)\overline{h}(t)\,ds, \tag{44}$$

где

$$\lambda=\frac{1}{\|f\|^2_{L_2}},\quad \overline{h}=\frac{\widetilde{h}'(t)}{\|f\|^2_{L_2}}.$$

Поскольку λ не является характеристическим числом ядра $H(s,t)$, то резольвента $R(s,t,\lambda)$ при любом $\lambda>0$ является непрерывной на квадрате $[0,T]\times[0,T]$, поэтому она ограничена. Предварительно оценим

$$\begin{gathered}|\widetilde{h}'(t)|\leqslant|h'(t)|+\sum_{n=1}^{\infty}|f_n||\varphi_n|\lambda_n^2\leqslant\\ \leqslant|h'(t)|+\widetilde{M}_3\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^{(1)}||\varphi_n^{(1)}|\leqslant|h'(t)|+\widetilde{M}_3\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^{(1)}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(1)}|^2\right)^{1/2}\leqslant\\ \leqslant\|h'(t)\|_{C[0,T]}+\widetilde{M}_3\|\varphi'(x)\|_{L_2[0,l]}\leqslant\|h'(t)\|_{C[0,T]}+\widetilde{M}_4\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]},\end{gathered} \tag{45}$$

где

$$f_n^{(1)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f'(x)\cos\mu_n x\,dx.$$

Тогда из формулы (44) с учётом (45) имеем

$$|g(t)|\leqslant\widetilde{M}_5\Big(\|h'(t)\|_{C[0,T]}+\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}\Big).$$

Отсюда следует оценка (42).

Пусть $(x,t)\in\overline{D}$. Тогда из формулы (15) на основании (20), (42), получим оценку (43):

$$|u(x,t)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(t)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|+|f_n||g_n(t)|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\varphi_n|+\frac{|f_n|}{\lambda_n^2}\|g(t)\|_{C[0,T]}\right)\leqslant\widetilde{M}_6\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n^{(1)}|}{n}+\|g(t)\|_{C[0,T]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}|f_n|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\widetilde{M}_7\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(1)}|^2\right)^{1/2}+\|g(t)\|_{C[0,T]}\right)\leqslant M_{13}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}+\|h'(t)\|_{C[0,T]}\Big).$$

□

В заключение отметим, что представляет интерес исследование обратных задач 1 и 2 для общего параболического уравнения (1) по части доказательства теорем существования и устойчивости решения. Особый интерес представляют случаи, когда $K(t)=t^n$, $N(x)=x^m$, $n,m\in\mathbb{R}$, $|n|+|m|>0$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджетов Института механики имени Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН (прект 123021200015-5 (FMRS-2023-00-15)) и Стерлитамакского филиала Уфимского университета науки и технологии. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.
2. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
3. *Сабитов К. Б., Зайнуллов А. Р.* Обратные задачи для уравнения теплопроводности по отысканию начального условия и правой части // Учён. зап. Казан. ун-та. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 161, № 2. С. 271–291.
4. *Прилепко А. И., Соловьёв В. В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I; II // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 10. С. 1791–1799; Т. 23, № 11. С. 1971–1980.
5. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сб. 1992. Т. 184, № 4. С. 49–68.
6. *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.
7. *Пятков С. Г.* О некоторых обратных задачах для операторно-дифференциальных уравнений первого порядка // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 1. С. 183–193.
8. *Пятков С. Г., Сафонов Е. И.* О некоторых классах обратных задач об определении функции источников // Матем. тр. 2016. Т. 19, № 1. С. 178–196.
9. *Пятков С. Г., Уварова М. В.* Об определении функции источника в задачах тепломассопереноса по интегральным условиям переопределения // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19, № 4. С. 93–100.
10. *Костин А. Б.* Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 10. С. 3–46.

11. *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1468–1478.
12. *Romanov V., Hasanov A.* Uniqueness and stability analysis of final data inverse sourse problems for evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2022. V. 30, N 3. P. 425–446.
13. *Сабитов К. Б.* Обратные задачи для уравнений математичской физики. М.: Наука, 2023.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.956

INVERSE PROBLEMS OF FINDING A SOURCE IN THE HEAT EQUATION FROM A NONLOCAL OBSERVATION

© 2024

K. B. Sabitov

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, 450054 Russia,
Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Bashkortostan, 453103 Russia

E-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Received 27.11.2023, revised 27.03.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The article presents the statement of inverse problems of finding the right-hand side of the heat equation from an additional integral condition and justifies their Hadamard wellposedness in the class of regular solutions. The uniqueness of solutions of the problems is proved on the basis of integral identities. The solutions of the problems are constructed explicitly using separation of variables and the integral equation method.

Keywords: heat equation, inverse problem, uniqueness of solution, method of integral identities, existence of solution, series, integral equation, stability of solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.310

REFERENCES

1. A. M. Denisov, *Introduction to the Theory of Inverse Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1994) [in Russian].
2. S. I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems* (Sib. Nauchn. Izd., Novosibirsk, 2009) [in Russian].
3. K. B. Sabitov and A. R. Zainullov, "Inverse problems for the heat equation to find the initial condition and the right-hand side," Uch. Zap. Kazan. Univ. Fiz.-Mat. Nauki **161** (2), 271–291 (2019) [in Russian].
4. A. I. Prilepko and V. V. Solov'ev, "Solvability theorems and Rothe's method in inverse problems for parabolic equations. I; II," Differ. Uravn. **23** (10), 1791–1799 (1987); **23** (11), 1971–1980 (1987) [in Russian].
5. A. I. Prilepko and A. B. Kostin, "On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation," Mat. Sb. **184** (4), 49–68 (1992) [Sb. Math. **75** (2), 473–490 (1993)].
6. D. G. Orlovskii, "On the problem of determining the parameter of the evolution equation," Differ. Uravn. **26** (9), 1614–1621 (1990) [in Russian].
7. S. G. Pyatkov, "On some inverse problems for first order operator-differential equations," Sib. Mat. Zh. **60** (1), 183–193 (2019). [Sib. Math. J. **60** (1), 140–147 (2019)].
8. S. G. Pyatkov and E. I. Safonov, "On some classes of inverse problems of recovering a source function," Mat. Tr. **19** (1), 178–198 (2016) [Sib. Adv. Math. **27** (2), 119–132 (2017)].
9. S. G. Pyatkov and M. V. Uvarova, "On determining the source function in heat and mass transfer problems under integral overdetermination conditions," Sib. Zh. Ind. Mat. **19** (4), 93–100. [J. Appl. Ind. Math. **10** (4), 549–555 (2016)].
10. A. B. Kostin, "The inverse problem of recovering the source in a parabolic equation under a condition of nonlocal observation," Mat. Sb. **204** (10), 3–46 (2013). [Sb. Math. **204** (10), 1391–1434 (2013)].

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 536–547.

11. K. B. Sabitov, “Boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a nonlocal integral condition,” Differ. Uravn. **46** (10), 1468–1478 (2010). [Differ. Equations **46** (10), 1472–1481 (2010)].

12. V. Romanov and A. Hasanov, “Uniqueness and stability analysis of final data inverse sourse problems for evolution equations,” J. Inverse Ill-Posed Probl. **30** (3), 425–446 (2022).

13. K. B. Sabitov, *Inverse Problems for Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 2023) [in Russian].