УДК 517.44

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2024 **Д. С. Аниконов**[a], **Д. С. Коновалова**[b]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]anik@math.nsc.ru, [b]dsk@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 04.07.2023 г.; после доработки 18.04.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

В нечётномерном евклидовом пространстве вводится понятие псевдовыпуклого множества, состоящего из конечного числа ограниченных областей. Получена формула обращения преобразования Радона для подынтегральной кусочно-непрерывной функции, заданной на псевдовыпуклом множестве. Достигнутый результат является обобщением ранее известного свойства, доказанного для гладких функций.

Ключевые слова: преобразование Радона, разрывные функции, псевдовыпуклое множество, зондирование, томография, формула обращения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.301

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассматривается нечётномерное евклидово пространство E_n, $n = 2m + 1$, $m = 1, \dots$ с заданной в нём декартовой системой координат. Будем использовать следующие обозначения: $B(x, \delta) = \{y : y \in E_n, |y - x| < \delta\}$, $x \in E_n$; Δ_x — оператор Лапласа по переменной x; $x = (x_1, \dots, x_n)$; $const$ — положительное число; Ω — единичная сфера в E_n; s — элемент сферы Ω; ∂T — граница множества T; $\mu_k(T)$ — мера Лебега множества T в пространстве E_k; $\mu_\Omega(Q)$ — мера Лебега множества Q, $Q \subset \Omega$, по мере, определённой на Ω; $Y(s, p) = \{y : y \in E_n, y \cdot s = p\}$ — гиперплоскость в E_n, $p \in R^1$.

Пусть в E_n задана ограниченная область G, содержащая непересекающиеся подобласти G_i, $i = 1, \dots, N$, причём для их объединения G_0 верно равенство $\overline{G_0} = \overline{G}$. Предполагается, что каждая граница ∂G_i является $(n-1)$-мерной непрерывной поверхностью. Ясно, что $\partial G_0 = \partial G_1 \bigcup \dots \bigcup \partial G_N$.

Назовём G_0 псевдовыпуклым множеством, если существует множество Ω', $\Omega' \subset \Omega$ и числа $p^+(s)$, $p^-(s)$, $s \in \Omega'$ со следующими свойствами.

1. Мера множества $\Omega \setminus \Omega'$ равна нулю, т. е. $\mu_\Omega(\Omega \setminus \Omega') = 0$.

2. Для любого вектора $s \in \Omega'$ и для $p \geqslant p^+(s)$, $p \leqslant p^-(s)$ справедливо равенство $Y(s, p) \bigcap G = \emptyset$.

3. Для всех $s \in \Omega'$ и для $p^-(s) < p < p^+(s)$ пересечение $Y(s, p) \bigcap G_0$ является непустым множеством, граница которого имеет нулевую меру по мере пространства E_{n-1} и $\mu_{n-1}(Y(s, p) \bigcap \partial G_0) = 0$.

4. Для всех $s \in \Omega'$, если $p \to p^+(s)$ или $p \to p^-(s)$, то $\mu_{n-1}(Y(s, p) \bigcap G) \to 0$.

Для пояснения данного определения приведём два простых, но характерных примера.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $G = B(0, 2\delta)$, $G_1 = \{y : y \in E_3, -\delta < y_i < \delta, i = 1, 2, 3\}$, $G_2 = G \backslash \overline{G_1}$. Тогда из сферы Ω достаточно убрать вектора, коллинеарные координатным осям, чтобы получить Ω' и псевдовыпуклое множество $G_0 = G_1 \bigcup G_2$.

Пример 2. Пусть $n = 3$, G_1, G_2 — два шара в E_3 на положительном расстоянии друг от друга. Если $G_0 = G_1 \bigcup G_2$, то это множество не является псевдовыпуклым поскольку нарушается третье условие из определения. Однако, если добавить фиктивный шар G, содержащий G_1 и G_2, то для $G_0 = G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3$, $G_3 = G \backslash (\overline{G_1} \bigcup \overline{G_2})$, G_0, оказывается псевдовыпуклым, причём $\Omega' = \Omega$.

Вообще, введённое определение охватывает многие случаи ограничений, адекватных теории зондирования.

Определим класс V разрывных функций $v(y)$, $y \in E_n$, удовлетворяющих условиям: $|v(y) - v(\tilde{y})| \leqslant const|y - \tilde{y}|^\alpha$, $y, \tilde{y} \in G_i$, $i = 1, \ldots, N$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и $v(y) = 0$ для $y \notin G$.

Рассмотрим следующий поверхностный интеграл первого рода по гиперплоскости $Y(s, p)$

$$[Rv](s, p) = \int_{y \cdot s = p} v(y) d_y \sigma, \quad s \in \Omega, \quad -\infty < p < \infty. \tag{1}$$

Ясно, что если $v \in V$, G_0 — псевдовыпуклое множество, то интеграл в правой части равенства (1) существует. Именно он и называется преобразованием Радона функции v.

2. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Не претендуя на обзор темы, скажем, что имеются многочисленные публикации, посвящённые исследованию и применению преобразования Радона в различных направлениях математики. Так оно оказалось эффективным в теории дифференциальных уравнений [1, 2]. Кроме того, преобразование Радона широко применяется в теории зондирования, например, в томографии [3–5]. Вообще, некоторое представление о состоянии исследований преобразований Радона можно получить из публикаций [6–20], где в том числе рассмотрены и различные обобщения преобразования Радона. Настоящая работа посвящена проблеме обращения преобразования Радона, и является обобщением формулы, доказанной в [2] для гладких подынтегральных функций, что не вполне соответствует естественным ограничениям, например, для проблем зондирования. Здесь мы рассматриваем случай разрывных подынтегральных функций. Несмотря на имеющееся многообразие вариантов исследований, наша работа не имеет близких аналогов среди всех известных авторам публикаций.

Теорема. *Пусть $v \in V$, G_0 — псевдовыпуклое множество. Тогда справедливо равенство:*

$$(\Delta_x)^m \int_\Omega [Rv](s, x \cdot s) ds = (-1)^m 2(2\pi)^{2m} v(x), \quad x \in G_0. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала докажем, что функция $[Rv](s, p)$ непрерывна по p при почти всех $s \in \Omega$. Возьмём произвольный вектор $s \in \Omega'$ и запишем преобразование Радона в декартовой системе координат с ортами осей $a_1, \ldots, a_n$, $a_n = s$. Тогда функция $[Rv](s, p)$ записывается в следующем простом виде

$$[Rv](s, p) = \int_{E_{n-1}} v(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p) d\eta_1, \ldots, d\eta_{n-1}.$$

Используем числа $p^+(s), p^-(s)$, указанные в определении псевдовыпуклого множества G_0. Рассмотрим случай $p^+(s) > p > p^-(s)$. Такому значению p соответствует сечение $Y(s, p) \bigcap G_0$. Для произвольной точки $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p)$ из этого сечения существует шар $B(\eta, \delta) \subset G_0$, в котором функция v непрерывна. Пусть $\{p_k\}$ — произвольная числовая последовательность, сходящаяся к p. Начиная с некоторого номера, все точки $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p_k) \in B(\eta, \delta)$. Поэтому $v(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p_k) \to v(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p)$. В силу выбора точки $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p)$ такая сходимость имеется для почти всех $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$, соответствующих сечению $Y(s,p) \bigcap G$. Отсюда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_{n-1}} v(\eta_1, ..., \eta_{n-1}, p_k) d\eta_1, ..., d\eta_{n-1} = \int_{E_{n-1}} v(\eta_1, ..., \eta_{n-1}, p) d\eta_1, ..., d\eta_{n-1},$$

что и означает непрерывность функции $[Rv](s,p)$ по p, $p^-(s) < p < p^+(s)$.

Что касается непрерывности этой функции для остальных значений p, то она легко следует из второго и четвёртого условий псевдовыпуклости.

Далее мы следуем схеме рассуждений, использованной, в частности, в [1, 2] для гладких функций.

Рассмотрим выражение

$$U(x) = \int_G \int_\Omega v(y)|(y-x)\cdot s| ds dy, \quad s \in \Omega',\, x \in G_0$$

и выразим его через преобразование Радона, меняя порядок интегрирования и используя теорему Фубини:

$$U(x) = \int_\Omega \int_G v(y)|(y-x)\cdot s| dy ds = \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} |p| [Rv](s, p + x\cdot s) dp ds.$$

Обратим внимание на внутренний интеграл по переменной p. Как уже доказано, подынтегральная функция непрерывна по p. Этого свойства оказывается достаточно для следующего равенства

$$\Delta_x \int_{-\infty}^{\infty} |p| [Rv](s, p + x\cdot s) dp ds = 2[Rv](s, x\cdot s).$$

Следовательно,

$$\Delta_x U(x) = 2 \int_\Omega [Rv](s, x\cdot s) ds. \tag{3}$$

Для значения $\Delta_x U(x)$ можно получить и другое представление. Для этого нам понадобятся известные свойства

$$\int_\Omega |\xi\cdot s)| ds = \frac{2(\pi^m)}{m!}|\xi|, \quad \xi \in E_n, \quad \Delta_x |y-x| = 2m|y-x|^{-1}.$$

Тогда нетрудно убедиться в том, что

$$U(x) = \frac{2(\pi^m)}{m!} \int_G v(y)|y-x| dy, \quad \Delta_x U(x) = \frac{4m(\pi^m)}{m!} \int_G v(y)|y-x|^{-1}| dy. \tag{4}$$

Сравнивая выражения для $\Delta_x U(x)$ в (3) и в (4), получаем равенство

$$\int_\Omega [Rv](s, x\cdot s) ds = \gamma_1 \int_G \frac{v(y)}{|y-x|} dy, \quad \gamma_1 = \frac{2m\pi^m}{m!},$$

которое можно записать также в виде

$$\int_\Omega [Rv](s, x\cdot s) ds = \frac{\gamma_1}{2m} \int_G \Delta_x v(y)|y-x| dy. \tag{5}$$

Теперь нам понадобятся следующие тождества, приведённые, например, в [2],

$$
\begin{gathered}
(\Delta_x)^m |y-x| = \gamma_2 |y-x|^{2-n}, \quad \gamma_2 = \frac{(-1)^m 2^n \Gamma(1,5)\Gamma(m+1)\Gamma(n/2)}{\pi(2-n)}, \\
\Delta_x \int_G \frac{v(y)}{|y-x|^{n-2}} dy = \gamma_3 v(x), \quad \gamma_3 = \frac{2\pi^{n/2}(2-n)}{\Gamma(n/2)}
\end{gathered} \tag{6}
$$

Применяя к обеим частям равенства (5) оператор $(\Delta_x)^m$ и используя тождества (6), получаем

$$
(\Delta_x)^m \int_\Omega [Rv](s, x\cdot s)ds = \frac{\gamma_1}{2m}(\Delta_x)^m \int_G (\Delta_x)\frac{v(y)}{|y-x|}dy = \frac{\gamma_1}{2m}\Delta_x \int_G \gamma_2 \frac{v(y)}{|y-x|^{n-2}}dy = \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{2m}v(x).
$$

Нетрудно проверить, что $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)/2m = (-1)^m 2(2\pi)^{2m}$, что и означает справедливость равенства (2). Теорема доказана. $\square$

В заключение отметим, что формула (2) отличается от формулы обращения в [2] только тем, что она справедлива не для всех, а для почти всех точек в E_n, что несколько снижает её ценность. Однако в [2] требуется принадлежность функции $v(y)$ пространству $C^1(E_n)$, а в нашей работе допускаются и разрывные функции. Такой результат стал возможен за счёт введения нового определения псевдовыпуклого множества. Можно надеяться, что формула (2) послужит основанием для новых алгоритмов в теории зондирования, где разрывные характеристики являются естественными.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.
3. *Markoe A.* Analytic tomography. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
4. *Anikonov D. S., Prokhorov I. V., Kovtanyuk A. E.* Investigation of scattering and absorbing media by methods of X-ray tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N 4. P. 259–281.
5. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
6. *Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.* Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields // Numerical computations: Theory and algorithms. 2020. P. 97–111.
7. *Svetov I. E., Polyakova A. P.* Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor // Inverse Probl. 2024. V. 40, N 1. Article 015009; DOI: 10.1088/1361-6420/ad0fac
8. *Светов И. Е.* Метод приближенного обращения для операторов преобразования Радона функций и нормального преобразования Радона векторных и симметричных 2-тензорных полей в R3 // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 1073–1087.

9. *Темиргалиев Н., Абикенова Ш. К., Ажгалиев Ш. У., Таугынбаева Г. Е.* Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази- Монте-Карло // Изв. вузов. Матем. 2020. № 3. С. 98–104.

10. *Vinohradov M., Ponomarenko O., Moshensky A., Savchenko A.* Conformal Mapping of Discontinuous Functions for Inverse Radon Transform // Systems, Decision and Control in Energy V. 2023. V. 481. P. 115–126; DOI: 10.1007/978-3-031-35088-7_8

11. *Olugboji T., Zhang Z., Carr S., Cetin C.* On the detection of upper mantle discontinuities with radon-transformed receiver functions (CRISP-RF) // Geophys. J. Int. 2024. V. 236. P. 748–763.

12. *Katsevich A.* Analysis of Reconstruction from Discrete Radon Transform Data in R^3 When the Function Has Jump Discontinuities // SIAM J. Math. Anal. 2020. V. 52, N 4. P. 3990-4021; DOI: 10.1137/19M1295039

13. *Баев А. В.* Использование преобразования радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 4, С. 550–560.

14. *Bellet J. B.* An Exact Radon Formula for Lambertian Tomography // J. Math. Imaging Vis. 2022. V. 64. P. 939–947; DOI: 10.1007/s10851-022-01103-0

15. *Webber J.* Microlocal Analysis of Generalized Radon Transforms from Scattering Tomography // SIAM J. Math. Anal. 2021. V. 14, N 3. P. 976–1003; DOI: 10.1137/20M1357305

16. *Agranovsky M., Kuchment P., Kunyansky L.* On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography // Photoacoustic Imaging Spectrosc. 2017. P. 89–102.

17. *Ambartsoumian G., Kuchment P.* A range description for the planar circular Radon transform // SIAM J. Math. Anal. 2006. V. 38, N 2. P. 681–692.

18. *Аниконов Д. С., Балакина Е. Ю., Коновалова Д. С.* Обратная задача для обобщённого преобразования Радона // Научно-технич. ведомости СПбГПУ. Сер. Физ.-мат. науки. (2022) С. 41–51

19. *Anikonov D. S., Kazantsev S. G., Konovalova D. S.* A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2023. V. 31, N 6. P. 959–965; DOI: 10.1515/jiip-2023-0038

20. *Kalnin T. G., Ivonin D. A., Abrosimov K. N., Grachev E. A., Sorokina N. V.* Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods // Eurasian Soil Science. 2021. V. 54, N 9. P. 1400–1409.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.44

RADON TRANSFORM INVERSION FORMULA IN THE CLASS OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS

© 2024 D. S. Anikonov[a], D. S. Konovalova[b]

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia

E-mails: [a]anik@math.nsc.ru, [b]dsk@math.nsc.ru

Received 04.07.2023, revised 18.04.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. We introduce the concept of a pseudoconvex set in an odd-dimensional Euclidean space. The inversion formula is obtained for the Radon transform in the case where the integrand is a piecewise continuous function defined on a pseudoconvex set. The result achieved is a generalization of a previously known property proved for smooth functions.

Keywords: Radon transform, discontinuous functions, pseudoconvex set, probing, tomography, inversion formula.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.301

REFERENCES

1. R. Courant, *Partial Differential Equations* (Interscience, Paris, 1962; Mir, Moscow, 1964).
2. F. John, *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations* (Springer, New York, 1981; Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1958).
3. A. Markoe, *Analytic tomography* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006).
4. D. S. Anikonov, I. V. Prokhorov, and A. E. Kovtanyuk, "Investigation of scattering and absorbing media by methods of X-ray tomography," J. Inverse Ill-Posed Probl. **1** (4), 259–281 (1993).
5. F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography* (John Wiley, Stuttgart, 1986; Mir, Moscow, 1990).
6. E. Yu. Derevtsov, Yu. S. Volkov, and T. Schuster, "Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields," in *Numerical Computations: Theory and Algorithms* (2020), 97–111.
7. I. E. Svetov and A. P. Polyakova, "Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor," Inverse Probl. **40** (1), 015009 (2024). https://doi.org/10.1088/1361-6420/ad0fac
8. I. E. Svetov, "Approximate inversion method for Radon transform operators of functions and normal Radon transform of vector and symmetric 2-tensor fields in R^3," Sib. Elektron. Mat. Izv. **17**, 1073–1087 (2020).
9. N. Temirgaliev, Sh. K. Abikenova, Sh. U. Azhgaliev, and G. E. Taugynbaeva, "The Radon transform in the scheme of C(N)D-investigations and the quasi-Monte Carlo theory," Russ. Math. **64**, 87–92 (2020).
10. M. Vinohradov, O. Ponomarenko, A. Moshensky, and A. Savchenko, "Conformal mapping of discontinuous functions for inverse Radon transform," Syst. Decis. Control Energy **481**, 115–126 (2023). https://doi.org/10.1007/978-3-031-35088-7_8
11. T. Olugboji, Z. Zhang, S. Carr, and C. Cetin, "On the detection of upper mantle discontinuities with Radon-transformed receiver functions (CRISP-RF)," Geophys. J. Int. **236**, 748–763 (2024).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 379–383.

12. A. Katsevich, "Analysis of reconstruction from discrete Radon transform data in R^3 when the function has jump discontinuities," SIAM J. Math. Anal. **52** (4), 3990–4021 (2020). https://doi.org/10.1137/19M1295039

13. A. V. Baev, "Radon transform for solving an inverse scattering problem in a planar layered acoustic medium," Comput. Math. Math. Phys. **58** (4), 537–547 (2018).

14. J. B. Bellet, "An exact Radon formula for Lambertian tomography," J. Math. Imaging Vis. **64**, 939–947 (2022). https://doi.org/10.1007/s10851-022-01103-0

15. J. Webber, "Microlocal analysis of generalized Radon transforms from scattering tomography," SIAM J. Math. Anal. **14** (3), 976–1003 (2021). https://doi.org/10.1137/20M1357305

16. M. Agranovsky, P. Kuchment, and L. Kunyansky, "On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography," Photoacoust. Imaging Spectrosc. 89–102 (2017).

17. G. Ambartsoumian and P. Kuchment, "A range description for the planar circular Radon transform," SIAM J. Math. Anal. **38** (2), 681–692 (2006).

18. D. S. Anikonov, E. Yu. Balakina, and D. S. Konovalova, "Inverse problem for the generalized Radon transform," Nauchn.-Tekh. Vedomosti SPbGU. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 41–51 (2022).

19. D. S. Anikonov, S. G. Kazantsev, and D. S. Konovalova, "A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform," J. Inverse Ill-Posed Probl. **31** (6), 959–965 (2023). https://doi.org/10.1515/jiip-2023-0038

20. T. G. Kalnin, D. A. Ivonin, K. N. Abrosimov, E. A. Grachev, and N. V. Sorokina, "Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods," Eurasian Soil Sci. **54** (9), 1400–1409 (2021).