СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 4. С. 5–19

УДК 519.6:517.95

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

© 2024 А. А. Афанасьева[a], А. В. Старченко[b]

*Томский государственный университет,
просп. Ленина, 36, г. Томск 634050, Россия*

E-mails: [a]anna.afanaseva@stud.tsu.ru, [b]starch@math.tsu.ru

Поступила в редакцию 09.06.2024 г.; после доработки 05.11.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

Разработан вычислительный алгоритм решения обратной задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке, представляющей собой обратную коэффициентную задачу для разностной схемы, построенной на неструктурированных сетках для уравнения эллиптического типа с интегро-дифференциальными граничными условиями. Итерационный алгоритм основан на итеративно регуляризированном методе Гаусса—Ньютона, в котором вычисляется обратная матрица от основной матрицы системы линейных уравнений; аналитически находятся производные от основной матрицы, коэффициенты которой линейно зависят от проводимости. Реализация вычислительного алгоритма выполнена для двумерного случая 16-электродной модели круга с одной вставкой. Проведено исследование влияния выбора начального приближения и погрешности входных данных на сходимость итерационного процесса.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, уравнение эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами, интегро-дифференциальное граничное условие, метод конечного объёма, неструктурированные сетки, полная электродная модель, реконструкция проводимости, итеративно регуляризованный метод Гаусса—Ньютона.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.401

ВВЕДЕНИЕ

Электроимпедансная томография (ЭИТ) — это метод визуализации, который позволяет восстановить значения электрической проводимости внутри проводящего ток объекта с помощью измерений результирующего напряжения на электродах, расположенных на его границе, вызванных электродными токами известной величины. Сложность ЭИТ в том, что она является некорректной обратной задачей и из-за недостаточно проработанных математических подходов данный метод визуализации демонстрирует лишь скромное качество изображения по сравнению с другими методами [1], являясь, в то же время, одним из самых безопасных.

На практике обратная задача ЭИТ решается разными методами [2]: неитерационными, итерационными, машинного обучения и другими. Среди этих методов в ЭИТ широко применяются методы регуляризации [3–5]. Они улучшают устойчивость получения решения за счёт добавления регуляризирующего слагаемого к целевой функции. Среди итерационных методов решения нелинейных некорректных обратных задач широкое применение получили итеративно регуляризованные методы Гаусса—Ньютона [6–8].

Итеративно регуляризованные методы Гаусса—Ньютона применяются для получения в процессе итераций устойчивого решения нелинейной плохо обусловленной задачи $F(x) = y$, где $F : X \to Y$ — дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор, X, Y — гильбертовы пространства, а входные данные y задаются приближенно y^δ, где $\|y^\delta - y\| \leqslant \delta$. В этом методе итерационная последовательность $\{x_k^\delta\}$ вычисляется из [6–8]

$$x_{k+1}^\delta = x_k^\delta - \left(\alpha_k E + F'(x_k^\delta)F'(x_k^\delta)\right)^{-1}\left[F'(x_k^\delta)(F'(x_k^\delta) - y^\delta) + \alpha_k(x_k^\delta - x_0)\right], \quad k = 0, ..., k^\delta - 1, \quad (1)$$

где α_k — заданная монотонно уменьшающаяся последовательность положительных чисел; $x_0 \in X$; k^δ — индекс остановки итерационного процесса. В [6] были указаны требования к выбору начального приближения x_0 и последовательности α_k, что в итоге позволило доказать сходимость итерационного процесса (1) и его регуляризирующие свойства. В [7] было предложено апостериорное правило выбора значения k^δ. В [8] итерационный процесс (1) был применён к решению обратной задачи ЭИТ в полной электродной постановке, в которой прямые задачи решались с помощью метода Галеркина и использовались синтетические данные. В [8] отмечается, что для итеративно регуляризованного метода Гаусса—Ньютона (1) необходимо проводить дальнейшие исследования для повышения качества реконструкции изображений в условиях зашумлённых данных.

Целью данной работы является построение алгоритма на основе итеративно регуляризуемого метода Гаусса—Ньютона [6–8] для численно решения обратной задачи ЭИТ в полной электродной постановке по реконструкции распределения электрической проводимости в области исследования с помощью консервативного метода конечного объёма на неструктурированных сетках.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается, что исследуемый биологический объект D, через который пропускается слабый электрический ток относительно низкой частоты, находится в воздухе, имеет достаточно гладкую границу Γ и его внутренняя структура характеризуется кусочно-постоянными значениями коэффициента электропроводности σ (рис. 1).

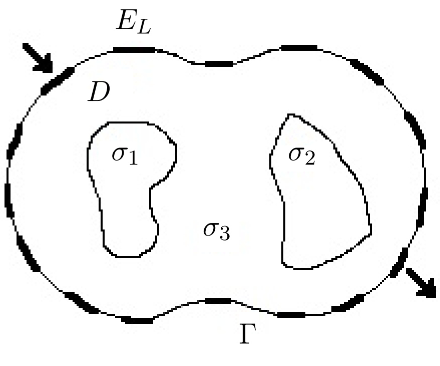


Рис. 1. Модель объекта с приложенными электродами и неоднородностями внутри

На поверхности объекта прикреплены электроды размерами E_l ($l = 1, ..., L$ — количество электродов), через которые можно подавать и принимать электрический ток. Электроды имеют одинаковые размеры. На электродах фиксируется не только сила тока $\{I_l\}$, но и напряжение $\{U_l\}$. Предполагая, что рассматриваемый процесс не изменяется во времени и двумерен, величина магнитного поля невелика, внутренние источники тока отсутствуют, из уравнений Максвелла и закона Ома в стационарных проводниках можно получить уравнение эллиптического типа для электрического потенциала u внутри области D в следующем виде [1, 9–11]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (x,y) \in D. \quad (2)$$

Здесь $\sigma(x, y)$ — распределение электрической проводимости внутри D.

На границе объекта Γ_{air}, граничащей с воздухом, плотность электрического тока равна нулю, и из закона Ома получаются граничные условия Неймана для электрического потенциала

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_{air}} = 0. \tag{3}$$

Здесь n — внешняя нормаль к границе области D.

На границе области Γ_l, соприкасающейся с поверхностью l-го электрода, в данной работе используется наиболее отвечающая реальным условиям, так называемая полная электродная модель [1, 8–10, 12–14]

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, (x, y) \in \Gamma_l, \quad \int\limits_{\Gamma_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = I_l, \quad l = 1, ..., L. \tag{4}$$

Эта параметризация взаимодействия токопроводящего объекта с электродами учитывает качество крепления электрода длиной E_l к поверхности за счёт различных значений электрического сопротивления z_l, $l = 1, ..., L$. Заметим, что в случае, когда напряжения $\{U_l\}$ на электродах неизвестны, а известны значения силы электрического тока $\{I_l\}$, можно, скомбинировав граничные условия полной электродной модели (4), получить интегро-дифференциальное граничное условие вида

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{E_l} \left(\int\limits_{\Gamma_l} u\, ds + z_l I_l \right), \quad l = 1, ..., L. \tag{5}$$

Из-за отсутствия источников тока внутри объекта сумма $\sum\limits_{l=1}^{L} I_l$ должна быть равна нулю по закону сохранения заряда [1, 8–10, 12–14].

Если решается прямая задача ЭИТ, её математическая постановка при известных значениях распределения электрической проводимости $\sigma(x, y)$, электрического сопротивления электродов $\{z_l\}$ и электрического тока на электродах $\{I_l\}$ включает дифференциальное уравнение (2) и граничные условия к нему (3) и (5). Искомой величиной является распределение электрического потенциала $u(x, y)$, по которой из

$$U_l = \frac{1}{E_l} \left(\int\limits_{\Gamma_l} u\, ds + z_l I_l \right), \quad l = 1, ..., L$$

можно найти напряжения на электродах.

В работе [13] доказано, что такая математическая постановка (2)–(4) имеет единственное решение при выполнении условия

$$\sum_{l=1}^{L} U_l = 0.$$

При решении обратной задачи ЭИТ требуется при известных наборах пропускания электрического тока через электроды (при, так называемых, токовых конфигурациях $\{I_l\}$) и измерениях напряжения на электродах $\{U_l\}$ получить распределение электрической проводимости $\sigma(x, y)$ внутри области $\bar{D}$. Если значения электрического сопротивления электродов $\{z_l\}$ неизвестны, то они также подлежат определению при решении обратной задачи [1, 12]. Таким образом, постановка обратной задачи ЭИТ предполагает, что известны значения напряжения на электродах $\{\widetilde{U}_l^\mu\}$, $l = 1, ..., L$, $\mu = 1, ..., M$ при M рассмотренных токовых конфигурациях $\{I_l^\mu\}$, $l = 1, ..., L$, $\mu = 1, ..., M$. Причём для каждого μ выполняются следующие условия:

$$\sum_{l=1}^{L} I_l^\mu = 0, \quad \sum_{l=1}^{L} \widetilde{U}_l^\mu = 0.$$

Предположим также, что известными являются и значения электрического сопротивления электродов $\{z_l\}$. Тогда искомое распределение электрической проводимости $\sigma_{min}(x, y)$ внутри области D должно удовлетворять минимуму функции

$$\Phi(\sigma_{min}) = \arg\min_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{M} (\vec{r}^\mu(\sigma), \vec{r}^\mu(\sigma)) \right), \quad \vec{r}^\mu(\sigma) = \vec{U}^\mu(\sigma) - \vec{\widetilde{U}}^\mu, \quad \mu = 1, ..., M. \tag{6}$$

В (6) $\vec{U}^\mu(\sigma)$ — полученные значения напряжения на электродах в результате решения μ-й прямой задачи (2)–(5) при некотором распределении $\sigma(x, y)$ и известной токовой конфигурации $\vec{I}^\mu = (I_1^\mu, I_2^\mu, ..., I_L^\mu)^T$.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЭИТ (2)–(5)

Для решения прямой задачи ЭИТ (2)–(5) будет использоваться численный метод, опирающийся на неструктурированные сетки и метод конечного объёма, в результате применения которых получается консервативная разностная схема в виде системы линейных уравнений с разреженной несимметричной матрицей без диагонального преобладания. Выбор неструктурированной сетки обусловлен сложной формой рассматриваемой замкнутой области $\bar{D}$ в общем случае (рис. 1). Триангуляция области исследования выполнялась с использованием пакета Gambit [15]. В качестве конечных объёмов рассматривались барицентрические ячейки [16, 17]. Использование барицентрических ячеек в качестве конечных объёмов не требует применения условий сопряжения на границе конечного объёма, поскольку она проходит по треугольникам $P_0 P_m P_{m+1}$, внутри каждого из которых коэффициент электрической проводимости принимается постоянным (рис. 2).

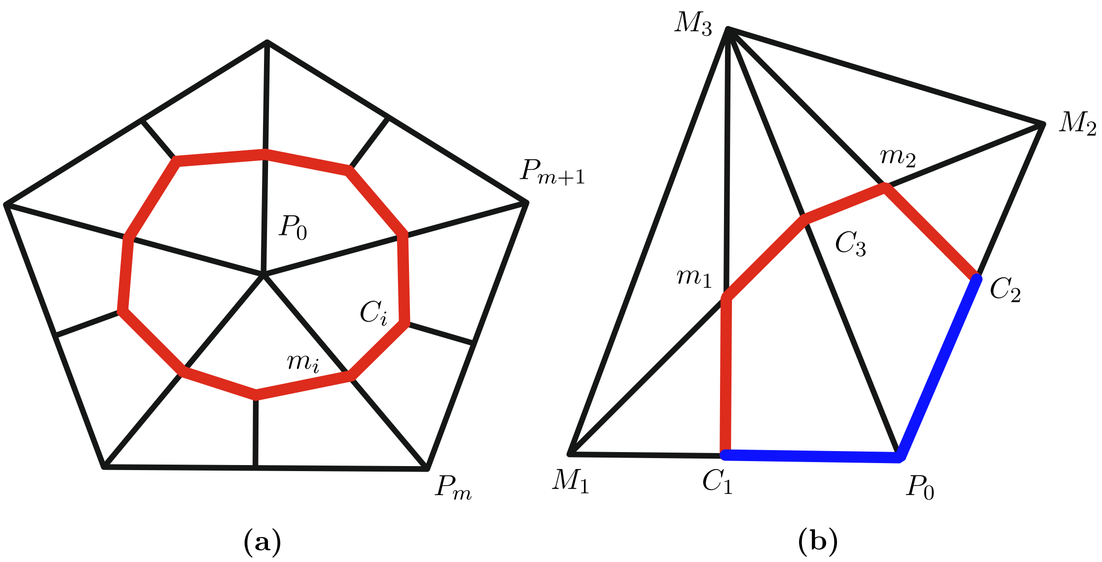


Рис. 2. Барицентрические ячейки: внутри триангулированной области (a) и примыкающая к границе (b). Красным выделена граница ячейки — конечного объёма, синим — часть границы

Искомые значения электрического потенциала $u(x, y)$ ассоциируются с вершинами треугольников, а значения электрической проводимости — с номером треугольника. В результате интегрирования по каждому конечному объёму, включая и приграничные конечные объёмы, получается система линейных уравнений, коэффициенты матрицы которой представляют собой результат геометрических вычислений, умноженный на значение сеточной функции электрической проводимости для внутренних узлов сетки. При вычислении интегралов в (4) или (5) использовалась формула трапеций. В итоге для внутренних узлов неструктурированной сетки разностная схема для нахождения сеточных значений u_h будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{M_0} \frac{\sigma_m}{4S_m}[u_{P_0}\left((y_{P_m}-y_{P_{m+1}})^2+(x_{P_{m+1}}-x_{P_m})^2\right)+$$
$$+u_{P_m}\left((y_{P_{m+1}}-y_{P_0})(y_{P_m}-y_{P_{m+1}})+(x_{P_0}-x_{P_{m+1}})(x_{P_{m+1}}-x_{P_m})\right)+$$
$$+u_{P_{m+1}}\left((y_{P_0}-y_{P_m})(y_{P_m}-y_{P_{m+1}})+(x_{P_m}-x_{P_0})(x_{P_{m+1}}-x_{P_m})\right)]=0, \quad P_0\in\omega_h.$$

Здесь M_0 — количество треугольников в барицентрической ячейке с общей вершиной P_0. Суммирование выполняется по всем треугольным элементам сетки с общей вершиной P_0, находящейся внутри области $\bar{D}$, причём, когда значение индекса $m+1$ становится больше M_0, то нужно его взять равным 1 (рис. 2).

Для граничных узлов сетки

$$\sum_{m=1}^{M_0} \frac{\sigma_m}{4S_m}[u_{P_0}\left((y_{P_m}-y_{P_{m+1}})^2+(x_{P_{m+1}}-x_{P_m})^2\right)+$$
$$+u_{P_m}\left((y_{P_{m+1}}-y_{P_0})(y_{P_m}-y_{P_{m+1}})+(x_{P_0}-x_{P_{m+1}})(x_{P_{m+1}}-x_{P_m})\right)+$$
$$+u_{P_{m+1}}\left((y_{P_0}-y_{P_m})(y_{P_m}-y_{P_{m+1}})+(x_{P_m}-x_{P_0})(x_{P_{m+1}}-x_{P_m})\right)]+$$
$$+\frac{j_1|C_1P_0|}{z_l}\left(\frac{1}{2E_l}\sum_{k=1}^{K-1}(u_{N_k}+u_{N_{k+1}})|N_kN_{k+1}|+\frac{z_lI_l}{E_l}-\frac{u_{M_1}+3u_{P_0}}{4}\right)+$$
$$+\frac{j_2|P_0C_2|}{z_l}\left(\frac{1}{2E_l}\sum_{k=1}^{K-1}(u_{N_k}+u_{N_{k+1}})|N_kN_{k+1}|+\frac{z_lI_l}{E_l}-\frac{3u_{P_0}+u_{M_2}}{4}\right)=0, \quad P_0\in\gamma_h.$$

Здесь $j_1=1$, если $M_1P_0\in\Gamma_l$, иначе $j_1=0$; $j_2=1$, если $P_0M_2\in\Gamma_l$, иначе $j_2=0$; K — количество узлов сетки на электроде с номером l (рис. 2).

После аппроксимации дифференциальной задачи (2), (3), (5) получается разностная схема вида

$$A_h(\sigma_h)u_h=b_h(\vec{I}). \tag{7}$$

Здесь $A_h(\sigma_h)$ — матрица коэффициентов разностной схемы, $A_h\in\mathbb{R}^{N\times N}$, коэффициенты матрицы линейно зависят от электрической проводимости, N — количество узлов неструктурированной сетки; $b_h(\vec{I})$ — правая часть разностной схемы, зависящая от выбранной токовой конфигурации $\vec{I}=(I_1,I_2,...,I_L)^T$, $\sum\limits_{l=1}^{L}I_l=0$; $u_h=(u_1,u_2,...,u_N)^T$ — численное решение (7) — потенциал электрического тока.

При решении прямой задачи ЭИТ при известных токовых конфигурациях $\vec{I}$ искомыми величинами наряду с потенциалом электрического тока являются значения напряжения на внешней поверхности электродов, которые с учётом полной электродной модели, определяются из дискретного аналога следующего условия: $U_l=\frac{1}{E_l}\int\limits_{E_l}u\,ds+\frac{z_lI_l}{E_l}$, $l=1,..,L$. Эти условия при дискретизации можно переписать в виде: $\vec{U}=Pu_h+\vec{d}$, где компоненты вектора $\vec{d}$ имеют вид: $d_l = \frac{z_l I_l}{E_l}$, а P — это матрица размером $L \times N$, в которой ненулевые элементы суть коэффициенты квадратурной формулы трапеций. В конце концов зависимость напряжения на электродах от электрической проводимости можно представить как

$$\vec{U}(\sigma_h) = Pu_h(\sigma_h) + \vec{d}.$$

Заметим, что среди уравнений или ко всем уравнениям системы (7) должно быть добавлено условие: $0 = \sum_l P_l u_h + \sum_l d_l$ обеспечивающее единственное решение прямой задачи [13]. Обозначим модифицированную таким образом систему (7) как

$$B_h(\sigma_h)u_h = c_h(\vec{I}).$$

И тогда

$$\vec{U}(\sigma_h) = P[B_h(\sigma_h)]^{-1}c_h(\vec{I}) + \vec{d}. \tag{8}$$

Численное решение разностной схемы выполняется либо прямым методом Гаусса с частичным выбором главного элемента или итерационным методом бисопряженных градиентов BiCGStab Вандерворста. Решения прямой задачи ЭИТ, получаемые с помощью этих двух методов, совпадают с высокой точностью ($\sim 10^{-14}$) при использовании в расчётах на компьютере вещественного типа с двойной точностью. Оценённый по правилу Рунге из численных решений прямых задач на сетках ω_h, $\omega_{h/2}$ (получена путём разбиения каждого треугольника сетки ω_h на 4 треугольника путём добавления в вершины середин сторон треугольника сетки ω_h) и $\omega_{h/4}$ (получена путём разбиения каждого треугольника сетки $\omega_{h/2}$ на 4 треугольника путём добавления в вершины середин сторон треугольника сетки $\omega_{h/2}$) порядок аппроксимации разностной схемы близок ко второму, трудность определения устойчивости разностной схемы связана с интегро-дифференциальным граничным условием. Более подробная информация про численный метод решения прямой задачи ЭИТ опубликована в [18].

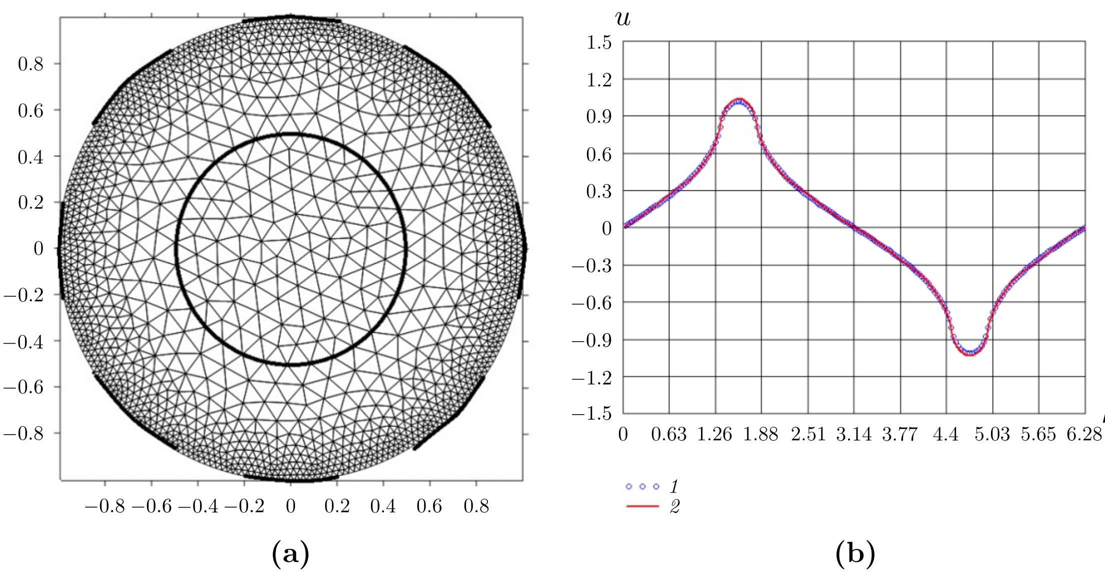


Рис. 3. Неструктурированная сетка из 1547 узлов для круговой области ($\sigma = 1.0$) с концентрической вставкой с $\sigma = 0.66$ и 8 электродной модели (a) и сравнение рассчитанных численно (*1*) и с использованием приближенного аналитического (*2*) решения [18, 19] значений электрического потенциала на границе области (b)

Для проверки численного метода решения прямой задачи ЭИТ была взята простая модель, для которой известно приближенное аналитическое решение в виде рядов Фурье [19] и сопоставлено с численным решением. В качестве тестовой задачи была рассмотрена модель круга радиусом единица, на поверхности круга располагалось 8 электродов, а внутри — круглая вставка радиусом 0.5 м и имеющая электрическую проводимость 0.66 См/м. Электроды, расположенные сверху и снизу, служили токоподающими и токопринимающми электродами ($\phi = \pi/2$; $\phi = 3\pi/2$). Рассматривалась сила тока 1 мА. Для рассчитанных численно и с помощью приближенного аналитического решения значений электрического потенциала на границе области среднеквадратическая ошибка RMSE составила 0.0065. Полученная ошибка составляет менее 1% и говорит о хорошей точности численного решения при относительно небольшом количестве используемых узлов неструктурированной сетки (рис. 3).

3. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭИТ

В данной работе при решении обратной задачи ЭИТ применяется один из широко известных методов решения нелинейных плохообусловленных задач — регуляризация А. Н. Тихонова [3–6]. Следуя её основной идее, добавим в (6) так называемый регуляризирующий член, управляя которым можно устойчиво получить приближенное распределение проводимости внутри области, близкое к истинному. В таком случае

$$\Phi(\sigma_{min}) = \arg\min_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{M} \|\vec{U}^{\mu}(\sigma) - \vec{\tilde{U}}^{\mu}\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|\sigma - \sigma_0\|_2^2 \right). \tag{9}$$

В (9) $\|\cdot\|_2$ — сферическая норма; σ_0 — некоторое известное распределение электрической проводимости. Рассмотрим итерационный процесс последовательной минимизации целевой функции (9), следуя [6–8]:

$$\sigma_h^{(k+1)} = \sigma_h^{(k)} - (H(\sigma_h^{(k)}) + \alpha_{k+1} E)^{-1} \nabla\Phi(\sigma_h^{(k)}). \tag{10}$$

Здесь $\sigma_h^{(k)} = (\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, ..., \sigma_{NT}^{(k)})^T$ — кусочно-постоянное распределение электрической проводимости в $\bar{D}$ на k-й итерации; NT — количество треугольников;

$$\nabla\Phi(\sigma_h) = \left(\frac{\partial\Phi(\sigma_h)}{\partial\sigma_1}, \frac{\partial\Phi(\sigma_h)}{\partial\sigma_2}, ..., \frac{\partial\Phi(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}} \right)^T;$$

$$\frac{\partial\Phi(\sigma_h)}{\partial\sigma_j} = \sum_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_j}, \vec{r}^{\mu}(\sigma_h) \right) + \alpha_{k+1}(\sigma_h - (\sigma_0)_h), \quad j = 1, ..., NT;$$

E — единичная матрица размером $NT \times NT$; $H(\sigma_h)$ — приближенное представление матрицы Гессе:

$$H(\sigma_h) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_1}, \frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_1} \right) & \cdots & \sum\limits_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_1}, \frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}}, \frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_1} \right) & \cdots & \sum\limits_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}}, \frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}} \right) \end{bmatrix};$$

$$\alpha_k > \alpha_{k+1} > 0, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0 \ [6,7].$$

При вычислении производных от величин напряжений на электродах $\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)$ воспользуемся следующим приёмом [17].

Дифференцируя (8), получим

$$\frac{\partial\vec{U}(\sigma_h)}{\partial\sigma_j} = P \frac{\partial[B_h(\sigma_h)]^{-1}}{\partial\sigma_j} c_h(\vec{I}) = P \frac{\partial[B_h(\sigma_h)]^{-1}}{\partial\sigma_j} B_h(\sigma_h) u_h(\sigma_h), \quad j = 1, .., NT.$$

Пользуясь тождеством $[B_h(\sigma_h)]^{-1}B_h(\sigma_h) = E$, получим окончательную формулу

$$\frac{\partial \vec{U}(\sigma_h)}{\partial \sigma_j} = P\frac{\partial [B_h(\sigma_h)]^{-1}}{\partial \sigma_j}c_h(\vec{I}) = -P[B_h(\sigma_h)]^{-1}\frac{\partial B_h(\sigma_h)}{\partial \sigma_j}u_h(\sigma_h), \quad j = 1, ..., NT. \tag{11}$$

В итоге итерационный алгоритм решения обратной задачи ЭИТ будет состоять из следующих этапов:

0. Задание начального распределения электрической проводимости $\sigma_h^{(0)}, (\sigma_0)_h$, $\alpha_0 = Const > 0$, $k = 0$, расчёт матрицы P;
1. нахождение обратной матрицы для основной матрицы системы линейных уравнений разностной схемы $B_h(\sigma_h^{(k)})$;
2. аналитическое вычисление производных от основной матрицы $\frac{\partial B_h(\sigma_h)}{\partial \sigma_j}$;
3. численное решение набора прямых задач ЭИТ для различных токовых конфигураций активных электродов: $u_h^\mu(\sigma_h^{(k)}) = [B_h(\sigma_h^{(k)})]^{-1}\vec{c_h}(\vec{I^\mu})$, $\mu = 1, ..., M$;
4. вычисление напряжений на электродах по формуле (8) и производных по формуле (11);
5. расчёт параметра $\alpha_{k+1} = \alpha_k/2$, вычисление $\nabla\Phi(\sigma_h^{(k)})$ и H;
6. обращение матрицы $H + \alpha_{k+1}E$ методом Холесского;
7. уточнение электрической проводимости $\sigma_h^{(k+1)}$ с помощью (10).

Если условия завершения глобального итерационного процесса не выполнены, то $k = k+1$ и перейти на п. 1.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Рассмотрим применение разработанного итерационного алгоритма решения обратной задачи ЭИТ на следующем примере. Пусть исследуемый объект, для которого нужно найти значения электрической проводимости, имеет форму круга единичного радиуса и к нему на границе прикреплены шестнадцать электродов, значения сопротивления которых известны: $z_l = 1.0$ Ом · м, $l = 1, \ldots, L$. Внутри области исследования размещена одна круговая вставка (рис. 4). Центр вставки — $(-0.5; 0.1)$, её радиус $\rho_1 = 0.3$ м. Центры электродов шириной 0.1 м расположены при $\phi_l = 2\pi/L \cdot (l-1)$, $l = 1, ..., L$.

Для получения «измеренных» значений напряжений на электродах рассматривалось $M = L(L-1)/2 = 120$ [14] вариантов парного подключения электродов (один электрод рассматривался как токоподающий, другой — токопринимающий). Т. е. всего рассматривалось для решения обратных задач $120 \cdot 16 = 1920$ измерений. Решения M прямых задач ЭИТ для получения синтетических данных проводились на сетке с 3057 вершинами и 5696 треугольниками (рис. 4(a)) при следующих значениях электрической проводимости: $\sigma_1 = 0.5$ См/м; $\sigma_2 = 1.0$ См/м. Сила тока равнялась ± 1 мА Решение обратной задачи по этим синтетическим данным выполнялось на сетке с 1424 треугольниками (рис. 4(b)).

При решении обратной задачи ЭИТ по описанной выше итерационной процедуре рассматривались два варианта задания начального распределения электрической проводимости внутри области:

- Вариант 1: $\sigma_1 = 1.0$; $\sigma_2 = 1.0$; $\sigma_0 = 1.0$; $\alpha_0 = 1.0$ (использование фонового значения σ_2 при задании начальных значений проводимости).

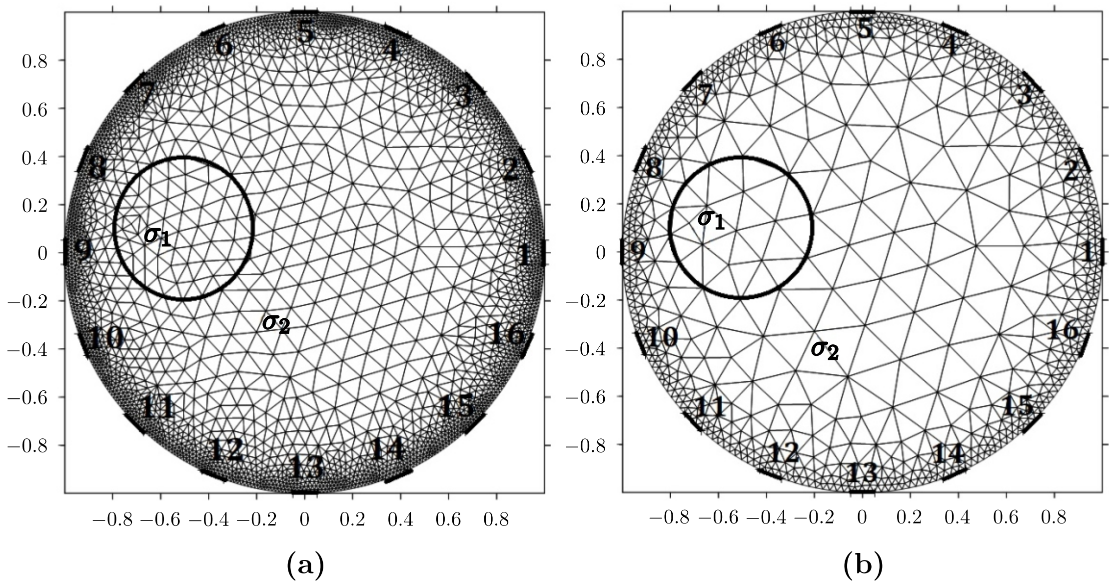


Рис. 4. (a) — расчётная сетка для решения прямой задачи для получения синтетических данных, (b) — расчётная сетка для решения обратной задачи

- Вариант 2: $\sigma_1 = 0.5$; $\sigma_2 = 1.0$; $\sigma_0 = 0.5$ в области 1 и 1.0 в области 2; $\alpha_0 = 1.0$ (идеальный вариант).

Также был рассмотрен вариант с другим начальным значением параметра регуляризации:

- Вариант 3: $\sigma_1 = 1.0$; $\sigma_2 = 1.0$; $\sigma_0 = 1.0$; $\alpha_0 = 0.1$ (по сравнению с вариантом 1 уменьшено начальное значение параметра регуляризации).

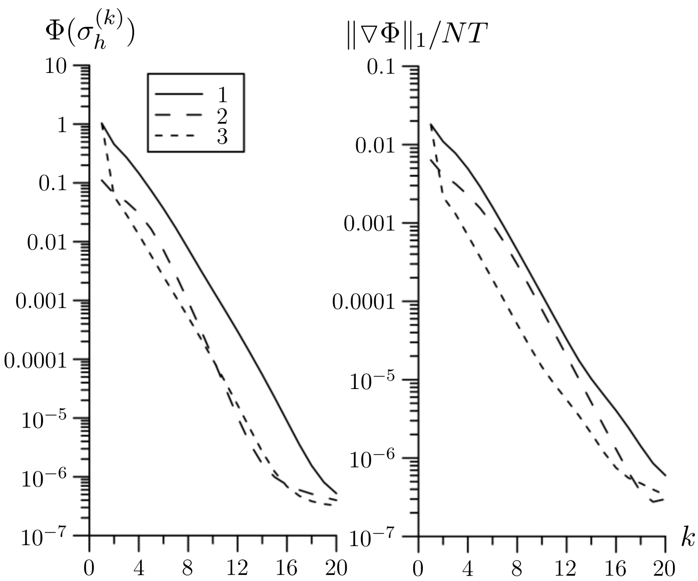
На рис. 5(a) приведены графики изменения значений функции $\Phi(\sigma_h^{(k)})$ (6) и l_1-нормы её градиента $\|\nabla\Phi\|_1/NT$ от номера итерации для различных вариантов задания начальных приближений электрической проводимости и начального значения параметра регуляризации. Из рисунка видно, что с увеличением номера итерации для всех рассмотренных вариантов наблюдается монотонная сходимость итерационного процесса. Причём, чем дальше начальное распределение электрической проводимости находится от искомого, тем большего количества итераций требуется для получения минимума целевой функции с наперёд заданной точностью. Кроме того, результаты расчётов показывают, что важную роль в ускорении сходимости итерационного процесса играет выбор начального значения регуляризационного параметра α_0.

Для оценки качества реконструкции распределения проводимости внутри области исследования (рис. 5(b)) рассчитывались значения среднеквадратичной ошибки

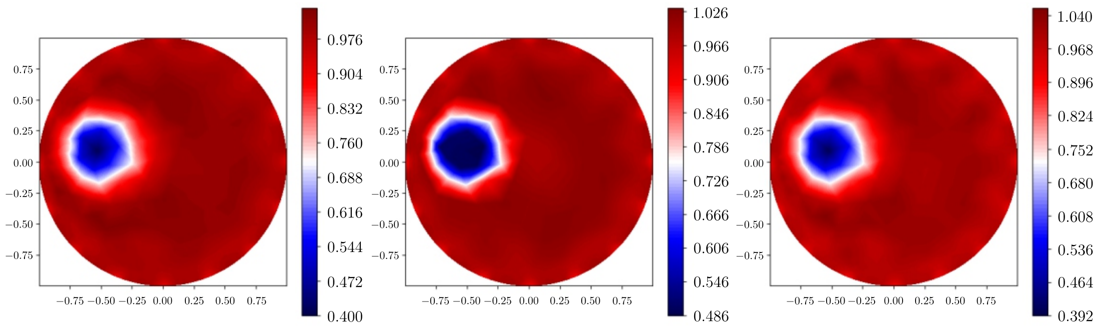
$$\mathrm{RMSE} = \left[\frac{1}{NT}\sum_{i=1}^{NT}\left(\sigma_i - (\sigma_{exact})_i\right)^2\right]^{1/2}.$$

Для рассмотренных вариантов получены следующие значения RMSE = 0.040 (вариант 1), 0.029 (вариант 2), 0.041 (вариант 3). Эти значения позволяют сделать вывод о небольшом влиянии выбранных начальных условий итерационного процесса на результат реконструкции.

Также для рассматриваемого случая решения обратной задачи ЭИТ (рис. 4(b)) было проведено исследование влияние величины «шума» в измеренных значениях напряжения на электродах (в синтетических данных значения напряжения на электродах по абсолютной величине менялось от 11.5 до 0.0002 В) на качество определения значений электрической проводимости. Сравнивались результаты решения обратной задачи ЭИТ для следующих входных данных, полученных из численного решения M прямых задач:



(a)



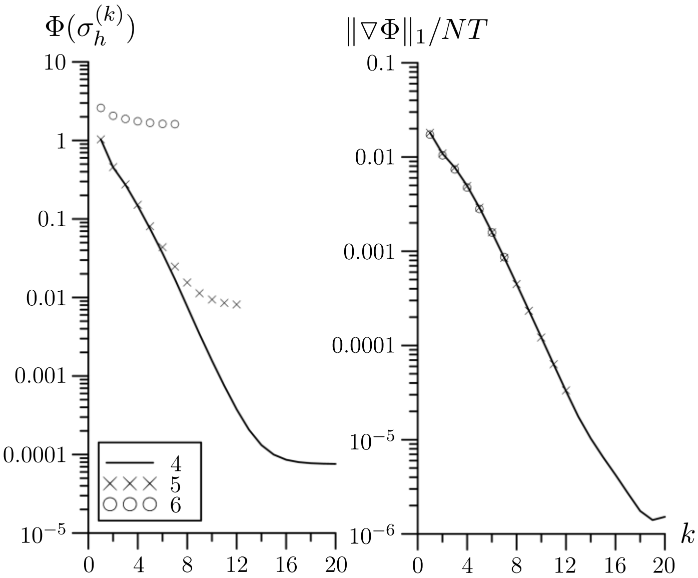
(b)

Рис. 5. (a) — сходимость итерационного процесса в зависимости от выбора начального приближения (k — итерации), (b) — результаты реконструкции распределения электрической проводимости для вариантов 1–3

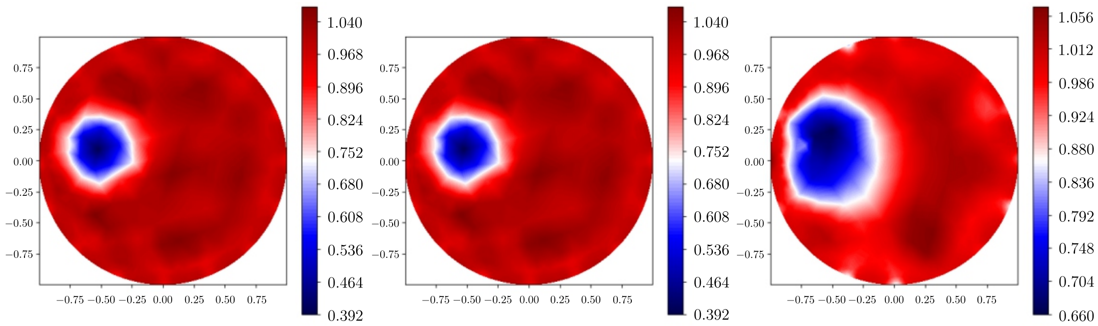
- Вариант 4: Округлённые до тысячных значения $\tilde{\vec{U}}^{\mu}$, $\mu = 1, ..., M$.
- Вариант 5: Округлённые до сотых значения $\tilde{\vec{U}}^{\mu}$, $\mu = 1, ..., M$.
- Вариант 6: К невозмущённым значениям $\tilde{\vec{U}}^{\mu}$, $\mu = 1, ..., M$ добавлен 1% «шума» (с помощью псевдослучайных чисел с нормально распределённым отклонением с нулевым средним значением и единичной дисперсией).

Итерационный процесс решения обратной задачи ЭИТ заканчивался в случае, когда число итераций становилось больше 20, либо, когда итерационный процесс для «зашумлённых» данных начинал расходиться — увеличивались значения целевой функции и нормы её градиента. Из рис. 6(a) видно, что варианты слабого возмущения синтетических измерений (варианты 4 и 5) практически не оказывают заметного влияния на ход итерационных вычислений и приводят к близким к искомым значениям электрической проводимости (рис. 6(b)). Получены значения RMSE = 0.043 (вариант 4), 0.045 (вариант 5), 0.053 (вариант 6).

Эти результаты подтверждают выводы, полученные в работе [10], о том что большую информацию, необходимую для успешного решения обратной задачи ЭИТ, несут измерения



(a)



(b)

Рис. 6. (a) — сходимость итерационного процесса с использованием входных данных с погрешностью (k — итерации), (b) — результаты реконструкции распределения электрической проводимости для вариантов 4–6

на электродах, наиболее близких к расположенным внутри области реконструкции неоднородностям, или на активных (токоподающих и токопринимающих) электродах, расположенных оппозитно искомым артефактам. Напряжения на электродах, более удалённых от неоднородностей или основного пути прохождения электрического тока, невелики, и они дают малый вклад в общее влияние измерений на процесс реконструкции внутренней структуры объекта. Для варианта 6, когда относительная величина «шума» была одного уровня для значений напряжений всех электродов (1% «шума») независимо от их величины, получено наименее качественное воспроизведение искомых значений электрической проводимости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для восстановления распределения электрической проводимости внутри исследуемого объекта разработан итерационный метод решения обратной задачи электроимпедансной томографии, который опирается на итеративно регуляризированный метод Гаусса—Ньютона, в котором вычисляется обратная матрица от основной матрицы системы линейных уравнений; аналитически находятся производные от основной матрицы, коэффициенты которой линейно зависят от проводимости.

Итерационный метод реализован численно для двумерного случая и протестирован с помощью синтетических данных на модели круга с 16 электродами и одной неконцентрической круговой вставкой, имеющей отличающуюся электрическую проводимость. Исследовано влияние выбора начального приближения и неустранимой погрешности входных данных на сходимость итерационного процесса и точность определения значений электрической проводимости внутри области решения. Результаты расчётов показали, что среднеквадратичная ошибка реконструкции электрической проводимости для рассмотренных в работе условий не превосходит 6%.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашения 075-02-2024-1437 и 075-02-2025-1728/2). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Borcea L.* Electric Impedance Tomography. Topical Review // Inverse Probl. 2002. V. 18. P. R99–R136.
2. *Hao Y., Liu H., Liu Z., Wang Z., Jia J.* High-resolution conductivity reconstruction by electrical impedance tomography using structure-aware hybrid-fusion learning // Comput. Methods Programs Biomed. 2024. V. 243. Article 107861; DOI: 10.1016/j.cmpb.2023.107861
3. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
4. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
5. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
6. *Бакушинский А. Б.* К проблеме сходимости интеративно-регуляризованного метода Гаусса—Ньютона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32, № 9. С. 1503–1509.
7. *Qi-Nian J.* On the Iteratively Regularized Gauss-Newton Method for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems // Math. Comp. 2000. V. 69, N 232. P. 1603–1623; DOI: 10.1090/S0025-5718-00-01199-6
8. *Ahmad S., Strauss T., Kupis S., Khan T.* Comparison of statistical inversion with iteratively regularized Gauss Newton method for image reconstruction in electrical impedance tomography // Appl. Math. Comput. 2019. V. 358. P. 436–448; DOI: 10.1016/j.amc.2019.03.063
9. *Gehre M., Kluth T., Lipponen A., Jin B., Seppanen A., Kaipio J. P., Maass P.* Sparsity reconstruction in electrical impedance tomography: An experimental evaluation // J. Comput. Appl. Math. 2012. V. 236, N 8. P. 2126–2136; DOI: 10.1016/j.cam.2011.09.035
10. *Darbas M., Heleine J., Mendoza R., Velasco A. C.* Sensitivity analysis of the complete electrode model for electrical impedance tomography // AIMS Mathematics. 2021. V. 6, N 7. P. 7333–7366; DOI: 10.3934/math.2021431
11. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 1. 5-е изд., испр. М.: Наука, 1994.
12. *Gehre M., Jin B.* Expectation Propagation for Nonlinear Inverse Problems — with an Application to Electrical Impedance Tomography // Numer. Anal. 2013. P. 1–35; DOI: 10.1016/j.jcp.2013.12.010
13. *Somersalo E., Cheney M., Isaacson D.* Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography // SIAM J. Appl. Math. 1992. V. 52. P. 1023–1040; DOI: 10.1137/0152060
14. *Cheney M., Isaacson D., Newell J. C.* Electrical Impedance Tomography // SIAM Review. 1999. V. 41, N 1. P. 85–101.
15. *Батурин О. В., Батурин Н. В., Матвеев В. Н.* Построение расчётных моделей в препроцессоре Gambit универсального программного комплекса Fluent. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2010.

16. *Шерина Е. С., Старченко А. В.* Разностные схемы на основе метода конечных объёмов для задачи электроимпедансной томографии // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2014. № 3(29). С. 25–38.
17. *Li J., Yuan Y.* Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography // Appl. Math. Model. 2009. V. 3. N 5. P. 2175–2186; DOI: 10.1016/j.apm.2008.05.025
18. *Афанасьева А. А., Старченко А. В.* Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2022. № 78. С. 5–21; DOI: 10.17223/19988621/78/1
19. *Старченко А. В., Седнев М. А., Панько С. В.* Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учётом сопротивления электродов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. № 74. С. 19–29; DOI: 10.17223/19988621/74/3

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.6:517.95

NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY USING THE ITERATION METHOD

© 2024 **A. A. Afanasyeva**[a], **A. V. Starchenko**[b]

Tomsk State University, Tomsk, 634050 Russia

E-mails: [a]anna.afanaseva@stud.tsu.ru, [b]starch@math.tsu.ru

Received 09.06.2024, revised 05.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. A computational algorithm has been developed for solving the inverse problem of electrical impedance tomography in a complete electrode model, which is an inverse coefficient problem for a difference scheme built on unstructured grids for an elliptic equation with integro-differential boundary conditions. The iteration algorithm is based on the iterative regularized Gauss—Newton method in which the inverse matrix of the main matrix of the system of linear equations is calculated; the derivatives of the main matrix whose coefficients depend linearly on conductivity are found analytically. The implementation of the computational algorithm is performed for the two-dimensional case of a 16-electrode disk model with one insert. The influence of the choice of the initial approximation and the error in the input data on the convergence of the iteration process has been studied.

Keywords: coefficient inverse problem, elliptic equation with piecewise constant coefficients, integro-differential boundary condition, finite volume method, unstructured grid, complete electrode model, conductivity reconstruction, iteratively regularized Gauss—Newton method.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.401

REFERENCES

1. L. Borcea, "Electric Impedance Tomography. Topical Review," Inverse Probl. **18**, R99–R136 (2002).
2. Y. Hao, H. Liu, Z. Liu, Z. Wang, and J. Jia, "High-resolution conductivity reconstruction by electrical impedance tomography using structure-aware hybrid-fusion learning," Comput. Methods Programs Biomed. **243**, 107861 (2024). https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2023.107861
3. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
4. M. M. Lavrent'ev, V. G. Romanov, and S. P. Shishatskii, *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
5. S. I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems* (Sib. Nauchn. Izd., Novosibirsk, 2009) [in Russian].
6. A. B. Bakushinskii, "To the problem of convergence of the iterative-regularized Gauss—Newton method," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **32** (9), 1503–1509 (1992) [Comput. Math. Math. Phys. **32** (9), 1353–1359 (1992)].
7. J. Qi-Nian, "On the iteratively regularized Gauss—Newton method for solving nonlinear ill-posed problems," Math. Comp. **69** (232), 1603–1623 (2000). https://doi.org/10.1090/S0025-5718-00-01199-6
8. S. Ahmad, T. Strauss, S. Kupis, and T. Khan, "Comparison of statistical inversion with iteratively regularized Gauss Newton method for image reconstruction in electrical impedance tomography," Appl. Math. Comput. **358**, 436–448 (2019). https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.03.063

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 631–642.

9. M. Gehre, T. Kluth, A. Lipponen, B. Jin, A. Seppanen, J. P. Kaipio, and P. Maass, “Sparsity reconstruction in electrical impedance tomography: An experimental evaluation,” J. Comput. Appl. Math. **236** (8), 2126–2136 (2012). https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.09.035
10. M. Darbas, J. Heleine, R. Mendoza, and A. C. Velasco, “Sensitivity analysis of the complete electrode model for electrical impedance tomography,” AIMS Math. **6** (7), 7333–7366 (2021). https://doi.org/10.3934/math.2021431
11. L. I. Sedov, *Continuum Mechanics. Vol. 1* (Nauka, Moscow, 1994) [in Russian].
12. M. Gehre and B. Jin, “Expectation propagation for nonlinear inverse problems — with an application to electrical impedance tomography,” Numer. Anal., 1–35 (2013). https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.12.010
13. E. Somersalo, M. Cheney, and D. Isaacson, “Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography,” SIAM J. Appl. Math. **52**, 1023–1040 (1992). https://doi.org/10.1137/0152060
14. M. Cheney, D. Isaacson, and J. C. Newell, “Electrical impedance tomography,” SIAM Rev. **41** (1), 85–101 (1999).
15. O. V. Baturin, N. V. Baturin, and V. N. Matveev, *Construction of Computational Models in the Gambit Preprocessor of the Universal Software Package Fluent* (Izd. Samarsk. Gos. Aerokosm. Univ., Samara, 2010) [in Russian].
16. E. S. Sherina and A. V. Starchenko, “Difference schemes based on the finite volume method for the problem of electrical impedance tomography,” Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. no. 3 (29), 25–38 [in Russian].
17. J. Li and Y. Yuan, “Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography,” Appl. Math. Model. **3** (5), 2175–2186 (2009). https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.05.025
18. A. A. Afanasyeva and A. V. Starchenko, “Numerical solution of the direct problem of electrical impedance tomography in the complete electrode formulation,” Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. (78), 5–21 (2022) [in Russian]. https://doi.org/10.17223/19988621/78/1
19. A. V. Starchenko, M. A. Sednev, and S. V. Pan’ko, “Approximate analytical solution of the direct problem of electrical impedance tomography in an inhomogeneous disk taking into account the resistance of the electrodes,” Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. (74), 19–29 (2021) [in Russian]. https://doi.org/10.17223/19988621/74/3