УДК 517.44:517.95

ЧИСЛЕННАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ДВУМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПО ЛУЧЕВЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ЕГО МОМЕНТОВ

© 2024 **И. Е. Светов[1,2a], Е. Ю. Деревцов[1,2b], С. В. Мальцева[1,2c], А. П. Полякова[1,2d]**

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]dert@math.nsc.ru, [c]sv_maltseva@mail.ru, [d]apolyakova@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 07.05.2024 г.; после доработки 28.11.2024 г.; принята к публикации 11.12.2024 г.

В работе предложены и обоснованы алгоритмы восстановления векторного поля по известным продольным или поперечным лучевым преобразованиям его моментов. Исследованы свойства нескольких алгоритмов в зависимости от степени дискретизации данных, уровня и характера внесённого в данные шума, гладкости векторного поля и степени связности его носителя. Вычислительные эксперименты показали хорошие результаты восстановления векторных полей по лучевым преобразованиям их моментов.

Ключевые слова: векторное поле, лучевое преобразование моментов, дифференциальное свойство лучевых преобразований, алгоритм реконструкции, аппроксимация, численный эксперимент.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.408

ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Преобразование Радона $\mathcal{R}$ [1] функции $\varphi(x)$, $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{R}\varphi)(\xi, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s\xi(\theta) + t\eta(\theta))dt, \tag{1}$$

порождает многочисленные интегральные операторы, представляющее собой математическое описание механизма сбора исходных данных в в более общих моделях эмиссионной, тензорной, рефракционной томографии и интегральной геометрии [2–6].

В определении (1) использованы обозначения $\xi = (\xi^1, \xi^2) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\xi^\perp = \eta = (\eta^1, \eta^2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ для нормального и направляющего векторов прямая $L_{\xi,s} \in \mathbb{R}^2$, вдоль которой осуществляется интегрирование, задаётся параметрическим $x = s\xi + t\eta$ и нормальным $\langle \xi, x\rangle - s = 0$ уравнениями. Здесь $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Через B, ∂B обозначаем единичный (открытый) круг и единичную окружность.

В модели 2D томографии симметричных тензорных полей [5] в качестве исходных данных выступают значения лучевых преобразований $\mathcal{P}_m^{(j)}$, m целое, $m \geqslant 0$, $j = 0, \ldots, m$, действующих на симметричные m-тензорные поля $w(x)$, $x = s\xi + t\eta$ и переводящих их в функции $g_m^{(j)}(\xi(\theta), s)$:

$$(\mathcal{P}_m^{(j)} w)(\xi, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{i_1\ldots i_m}(x)\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_j}\eta^{i_{j+1}}\ldots\eta^{i_m}dt = g_m^{(j)}(\xi, s). \tag{2}$$

В (2) и далее используется правило Эйнштейна, состоящее в том, что по повторяющимся сверху и снизу одноимённым индексам производится суммирование от 1 до 2.

Лучевые преобразования моментов тензорных полей отличаются от лучевых преобразований (2) наличием под интегралом множителя t^k:

$$(\mathcal{P}^{(j)}_{km}w)(\xi,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k w_{i_1\dots i_m}(x)\xi^{i_1}\dots\xi^{i_j}\eta^{i_{j+1}}\dots\eta^{i_m}dt=g^{(j)}_{km}(\xi,s), \tag{3}$$

$x=s\xi+t\eta$, η, $\xi\in\mathbb{S}^1$, $w(x)$ — заданное в B тензорное поле ранга m, $\operatorname{supp} w\subset\bar{B}$. Индекс (j) отвечает за количество компонент нормального вектора в определении (3), индекс m — ранг тензорного поля, k — порядок моментов в (3). Продольные лучевые преобразования моментов симметричных тензорных полей, заданных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности, введены в [3]. Показано, что симметричное тензорное поле ранга m однозначно определяется по первым $(m+1)$-м продольным лучевым преобразованиям его моментов. В терминах нашего определения (3), имеем

$$(\mathcal{P}^{(0)}_{km}w)(\xi,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k w_{i_1\dots i_m}(x)\eta^{i_1}\dots\eta^{i_m}dt=g^{(0)}_{km}(\xi,s).$$

Лучевым преобразованиям моментов тензорных полей в последние несколько лет посвящено довольно много работ, в большей части которых исследуются традиционные вопросы реконструкции тензорных полей ранга m, заданных на римановых многообразиях или евклидовых пространствах, по их известным продольным лучевым преобразованиям моментов, см., например, [7–10]. В частности, получены формулы Решетняка, оценки устойчивости в нормах весовых соболевских пространств. Описаны образы лучевых преобразований моментов, доказаны теоремы единственности по данным веерной схемы наблюдений и инъективность лучевых преобразований моментов тензорных полей, заданных в римановых многообразиях с простой метрикой. Предложено оригинальное разложение произвольного m-тензорного поля в $\mathbb{R}^n$, позволившее описать ядра и образы лучевых преобразований моментов в терминах уравнений Йона. В работе [11] техника лучевых преобразований моментов симметричных тензорных полей используется при исследовании обратной задачи для полигармонического оператора с возмущением по данным отображения Дирихле—Неймана на части границы (обратной задачи типа Кальдерона). Заметим, что практически во всех работах в качестве данных используются продольные лучевые преобразования моментов симметричных тензорных полей.

Существенно меньше работ, в которых предлагаются формулы или процедуры обращения, конструктивные методы и алгоритмы решения задач восстановления тензорных полей по лучевым преобразованиям их моментов. Так, работа [7] содержит алгоритм восстановления заданного в $\mathbb{R}^n$ симметричного тензорного поля ранга m по его известным $m+1$ продольным лучевым преобразованиям с весом t^k, $k=0,\dots,m+1$. Приведён частный случай алгоритма при $n=2$. В [12] разработан итеративный способ обращения лучевых преобразований с весами t^k, $k=0,\dots,m$, симметричных тензорных полей, заданных в $\mathbb{R}^n$. Предложена концепция частичных преобразований моментов, которая успешно использована в процедуре обращения. Работа [13] посвящена обоснованию алгоритма восстановления двумерного симметричного m-тензорного поля по лучевым преобразованиям его моментов. Существенное место при обращении занимает техника A-аналитических функций. В двух работах, также при $n=2$, предложены относительно простые алгоритмы восстановления векторного поля [9] по продольным лучевым преобразованиям моментов; векторного и симметричного 2-тензорного поля [14] по лучевым преобразованиям любого типа — продольным, поперечным или смешанным — моментов векторного или симметричного 2 тензорного поля.

Насколько известно авторам, до сих пор не имеется ни одной работы, в которой были бы приведены численные эксперименты по восстановлению тензорных полей малого ранга по известным лучевым преобразованиям их моментов. Целью данной статьи, которую можно трактовать как продолжение работы [14], является не только дальнейшее развитие численных методов и алгоритмов, направленных на восстановление векторного поля по его лучевым преобразованиям моментов, но и сравнительное исследование нескольких подходов методом вычислительных экспериментов. Более того, проводится сравнение алгоритмов восстановления векторного поля, основанных на известных ранее методах и инструментах [5] с данными в форме продольных и поперечных лучевых преобразований, и предлагаемым в настоящей работе алгоритмам к восстановлению векторного поля по его известным лучевым преобразованиям моментов.

В секции 1 рассматриваются лучевые преобразования моментов векторных полей. Установленные в [5, 14] дифференциальные свойства и связи общего характера между лучевыми преобразованиями моментов, детализируются. На основе полученного в [14] результата о том, что векторное поле однозначно восстанавливается по продольным или поперечным лучевым преобразованиям с весом t^k, $k = 0, 1$, в секции 2 разработаны алгоритмы восстановления векторных полей, основанных на дифференциальных свойствах и связях между лучевыми преобразованиями моментов векторных полей. В секции 3 приводятся результаты вычислительных экспериментов, направленные на изучение влияния степени связности носителя поля и его гладкости, дискретизации данных, уровня и характера внесённого в них шума на точность реконструкции. Проведено сравнение результатов тестов с результатами, полученными в ходе исследований ранее разработанных и хорошо себя зарекомендовавших алгоритмов решения задач векторной томографии с данными в форме значений продольных и поперечных лучевых преобразований [5].

Напомним определения некоторых множеств и функциональных пространств.

$\mathbb{S}^1$ — множество векторов единичной длины, $\mathbb{S}^1 = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| = 1\}$;

$S^1(B)$ — множество заданных в B векторных полей;

$C^l(B)$ — пространства непрерывно дифференцируемых вместе со своими производными до порядка l функций, определённых в B функций;

$L_2(B)$ — пространство интегрируемых с квадратом в B функций;

$H^l(B)$ ($H^l_0(B)$) — соболевское пространство интегрируемых с квадратом, вместе со своими производными вплоть до порядка l, l целое, $l \geqslant 0$, заданных в B функций (обращающихся в нуль на границе ∂B вместе со своими производными вплоть до порядка $l-1$), $H^0(B) \equiv L_2(B)$.

Введённые определения пространств легко переносятся на пространства векторных полей путём их применения по отношению к каждой компоненте. Это пространства $H^l(S^1(B))$, $H^l_0(S^1(B))$, где l, m целые, $l, m \geqslant 0$. В дальнейшем символ круга B в обозначениях перечисленных гильбертовых пространств будет опускаться.

Зафиксируем **ограничения и соглашения**, которые принимаются в используемой в рамках настоящей работы модели скалярной и векторной томографии.

1. Источники физического поля и его приёмники сосредоточены на единичной окружности, т.е. система наблюдения соответствует модели трансмиссионной томографии.

2. Носитель скалярного (векторного) поля отделён от системы наблюдения, $\operatorname{supp} f (\operatorname{supp} w) \subset B$. Напомним, что B — открытый круг.

3. Скалярное f (векторное w) поле допускает разрывы первого рода, в том числе на части или на всей границе носителя $\operatorname{supp} f$ ($\operatorname{supp} w$).

4. Вне носителя, в том числе и на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus B$, функция f (векторное поле w) обращается в нуль.

Перечисленные условия представляются естественными при организации сбора данных в рамках трансмиссионной томографии и ограничений, вытекающих из физических соображений и природы изучаемых объектов.

Приведём строгое описание пространства (разрывных) функций и векторных полей, соответствующих рассматриваемой нами модели томографии. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$, такая что $\overline{D} \subset B$, состоит из конечного числа непересекающихся подобластей $\{D_i\}$, $i = 1,\ldots,N$. Объединение $D_0 = \cup D_i$ подобластей плотно в $\overline{D}$, а их границы кусочно-непрерывны. Отметим, что $\partial D \subset \partial D_0$, а граница ∂D_0 совпадает с объединением границ $\cup D_i$ подобластей D_i, $i = 1,\ldots,N$.

Пусть функция (скалярное поле) $\varphi(x^1, x^2)$ класса C^k, k целое, $k \geqslant -1$, определена в B, причём она обращается в 0 на множестве $B \setminus \overline{D} \neq \emptyset$, а её носитель совпадёт с замыканием D, $\operatorname{supp}\varphi = \overline{D}$. Вне круга B функция продолжена нулём. В точках $x \in D$ функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема. В точках $(x^1, x^2) \in \partial D_0$ она непрерывно дифференцируема до k-го порядка включительно, причём при $x \in \partial D$ функция φ и все её производные до k-го порядка включительно обращаются в 0. В силу своей гладкости в области D функция φ обладает частными производными любого порядка. Что касается точек, принадлежащих ∂D_0, то в них все частные производные $\frac{\partial^l \varphi}{\partial (x^1)^j \partial (x^2)^{l-j}}$, $l = 0, \ldots, k$, $j \leqslant l$, до порядка k включительно, непрерывны, а производные порядка $k+1$ терпят разрыв 1-го рода. Иными словами, если функция f терпит разрыв первого рода в точках $x \in \partial D_0$, то мы полагаем $k = -1$ и пишем $f \in C^{-1}(B)$. Будем говорить, что функция φ является *потенциалом гладкости* k, $\varphi \in \mathcal{C}^k$, или $\mathcal{C}^k$*-потенциалом*, $k \geqslant -1$, в $\mathbb{R}^2$. Легко видеть, что $\mathcal{C}^k$-потенциалы образуют функциональное пространство.

Наряду с $\mathcal{C}^k$-потенциалами введём, аналогичным образом, $\mathcal{C}^k$-векторные в $\mathbb{R}^2$ поля $u(x) = \big(u_1(x), u_2(x)\big)$. Именно, $\mathcal{C}^k$-векторные в $\mathbb{R}^2$ поля — это поля, каждая компонента которых является $\mathcal{C}^k$-потенциалом в $\mathbb{R}^2$. Пространство $\mathcal{C}^k$-векторных в $\mathbb{R}^2$ полей будем обозначать $\mathcal{C}^k(S^1(B))$. Ниже обозначение B единичного круга в обозначениях функциональных пространств опускается.

В качестве переменных образов лучевых преобразований используются пары ξ, s либо θ, s для образов $g_m^{(j)}(\xi, s)$ $(g_m^{(j)}(\theta, s))$, $j = 0, 1$, $m = 1$, операторов лучевых преобразований; образов $g_{km}^{(j)}(\xi, s)$ $(g_{km}^{(j)}(\theta, s))$ при $j = 0, 1$, $m = 1$, k целое, $k \geqslant 0$, операторов лучевых преобразований моментов.

В заключение параграфа приведём конструкции векторных полей и операторы, действующие на них. Рассматриваются векторные поля $w, u, v \in \mathcal{C}^l(S^1)$.

Операторы ∇, $\nabla^\perp : H_0^l(B) \to H^{l-1}(S^1(B))$, $l \geqslant 1$, действуют на функцию $\varphi \in H_0^l(B)$, $l \geqslant 1$, и дают векторные поля u, $v \in H^{l-1}(S^1(B))$ по следующим правилам:

$$u := \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right), \quad v := \nabla^\perp\varphi = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right).$$

Дивергенция $\delta : H_0^l(S^1(B)) \to H^{l-1}(B)$, $l \geqslant 1$ действует на векторное поле w по формуле

$$\delta w = \frac{\partial w_1}{\partial x^1} + \frac{\partial w_2}{\partial x^2}.$$

Векторное поле $w \in H^l(S^1(B))$ называется *потенциальным*, если существует функция $\varphi \in H^{l+1}(B)$ такая, что $w = \nabla\varphi$. Векторное поле $w \in H^l(S^1(B))$ называется *соленоидальным*, если $\delta w = 0$. Нетрудно проверить, что поле $\nabla^\perp\psi$ является соленоидальным для $\psi \in H^{l+1}(B)$. Потенциальное поле ∇h называется *гармоническим*, если $\delta(\nabla h) = \triangle h = 0$.

Известно [5, 15], что любое векторное поле $w \in H^l(S^1(B))$ единственным образом представимо в виде

$$w = \nabla\varphi + \nabla h + \nabla^\perp\psi, \quad \varphi, \psi \in H_0^1(B), \quad \triangle h = 0.$$

В силу ограничений и соглашений, в настоящей работе рассматриваются векторные поля без гармонической части.

1. ЛУЧЕВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОМЕНТОВ

Рассматривая (3) при $j = m = 0$, получаем преобразование Радона с весом t^k, $k \geqslant 0$:

$$(\mathcal{R}_k\varphi)(\xi, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(s\xi + t\eta)dt = g_{k0}^{(0)}(\xi, s),$$

которое при $k = 0$ совпадает с преобразованием Радона (1).

При $m = 1$, $j = 0, 1$, $k \geqslant 0$ приходим к лучевым преобразованиям с весом $\mathcal{P}_{k1}^{(j)}$ векторного поля $w = (w_1, w_2)$: продольному (при $j = 0$) и поперечному (при $j = 1$)

$$(\mathcal{P}_{k1}^{(0)}w)(\xi, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k w_i \eta^i dt = g_{k1}^{(0)}(\xi, s), \quad (\mathcal{P}_{k1}^{(1)}w)(\xi, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k w_i \xi^i dt = g_{k1}^{(1)}(\xi, s). \tag{4}$$

При $k = 0$ получаем продольные и поперечные лучевые преобразования векторных полей [5]. Непосредственная проверка показывает, что эти лучевые преобразования нечётны по совокупности своих переменных, то есть $g_1^{(j)}(-\xi, -s) = -g_1^{(j)}(\xi, s)$, $j = 0, 1$, или $g_1^{(j)}(\theta + \pi, -s) = -g_1^{(j)}(\theta, s)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\int\limits_0^{2\pi} g_{k1}^{(j)}(\xi(\theta), s)\, d\theta = 0, \quad j = 0, 1.$$

Значения лучевых преобразований представляют собой исходные данные для задач векторной томографии, состоящих в реконструкции векторного поля w по продольному и поперечному лучевым преобразованиям; его соленоидальной (по продольному преобразованию) или потенциальной (по поперечному преобразованию) части.

Напомним, что прямая $L_{\xi,s}$ задаётся нормальным $x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta - s = 0$ или параметрическими уравнениями $x^1 = s\cos\theta - t\sin\theta$, $x^2 = s\sin\theta + t\cos\theta$. Здесь $\xi(\xi^1, \xi^2) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\eta(\eta^1, \eta^2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} \cos\theta = \xi^1 = \eta^2 = \frac{\partial x^1}{\partial s} = \frac{dx^2}{dt}, \quad \sin\theta = \xi^2 = -\eta^1 = \frac{\partial x^2}{\partial s} = -\frac{dx^1}{dt}, \\ \frac{\partial x^1}{\partial\theta} = s(-\sin\theta) - t\cos\theta = s\eta^1 - t\xi^1, \quad \frac{\partial x^2}{\partial\theta} = s\cos\theta - t\sin\theta = s\eta^2 - t\xi^2. \end{gathered} \tag{5}$$

Предположим, что зависящая от t функция $\varphi(x(t;\theta, s)) \in \mathcal{C}^1$ с параметрами θ, s такова, что $x = s\xi + t\eta$ и $\varphi\big|_{\partial B} = 0$. Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \big\langle \nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\big\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\xi^2 = \langle\nabla\varphi, \xi\rangle = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\eta^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\eta^2 = \langle\nabla^\perp\varphi, \eta\rangle.$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \big\langle \nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial t}\big\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\eta^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\eta^2 = \langle\nabla\varphi, \eta\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\xi^1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\xi^2 = -\langle\nabla^\perp\varphi, \xi\rangle.$$

Результаты дифференцирования функции φ по параметрам s, θ сформулируем в виде следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x) \in C^1$, и $x = s\xi + t\eta$, $s, t \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in \mathbb{S}^1$. Тогда*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \langle\nabla\varphi, \xi\rangle = \langle\nabla^\perp\varphi, \eta\rangle, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = s\big\langle\nabla\varphi, \frac{dx}{dt}\big\rangle - t\big\langle\nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\big\rangle = s\big\langle\nabla^\perp\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\big\rangle - t\big\langle\nabla^\perp\varphi, \frac{dx}{dt}\big\rangle. \tag{7}$$

Доказательство. Дифференцирование функции φ по параметру s приводит к соотношению (6):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \Big\langle \nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\Big\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\xi^2 = \langle\nabla\varphi,\xi\rangle = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\eta^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\eta^2 = \langle\nabla^\perp\varphi,\eta\rangle.$$

Вычисление производной по θ с использованием (5), (6) приводит к формуле (7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= \Big\langle\nabla\varphi,\frac{\partial x}{\partial\theta}\Big\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(-s\sin\theta - t\cos\theta) + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}(s\cos\theta - t\sin\theta)\\ &= s\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(-\sin\theta) + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\cos\theta\Big) - t\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\sin\theta\Big)\\ &= s\Big\langle\nabla\varphi,\frac{dx}{dt}\Big\rangle - t\Big\langle\nabla\varphi,\frac{\partial x}{\partial s}\Big\rangle = s\Big\langle\nabla^\perp\varphi,\frac{\partial x}{\partial s}\Big\rangle - t\Big\langle\nabla^\perp\varphi,\frac{dx}{dt}\Big\rangle.\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. □

Полученные соотношения приводят к непосредственно проверяемому следствию.

Следствие 1. *Пусть $(\mathcal{R}\varphi)(\xi,s)$ — преобразование Радона (1) заданной в B функции $\varphi\in\mathcal{C}^1$. Тогда*

$$\frac{\partial(\mathcal{R}\varphi)}{\partial\theta}(\xi,s) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\xi^i\,dt = -(\mathcal{P}^{(1)}_{11}\nabla\varphi)(\xi,s) = -(\mathcal{P}^{(0)}_{11}\nabla^\perp\varphi)(\xi,s).$$

2. ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Приведём полученную в [14] лемму и следствие из неё.

Лемма 2. *Пусть в B заданы потенциалы $\varphi,\psi\in H^l_0(B)$, $l\geqslant 1$ целое, и векторные поля $u=\nabla\varphi$, $v=\nabla^\perp\psi$, $u,v\in H^{l-1}(S^1(B))$. Тогда*

$$\mathcal{P}^{(0)}_{k1}u = -k\mathcal{P}^{(0)}_{(k-1)0}\varphi, \quad \mathcal{P}^{(1)}_{k1}v = k\mathcal{P}^{(0)}_{(k-1)0}\psi.$$

Следствие 2. *Пусть известны поперечные $\mathcal{P}^{(1)}_{k1}w$ или продольные $\mathcal{P}^{(0)}_{k1}w$ лучевые преобразования с весом t^k, $k=0,1$ векторного поля $w\in\mathcal{C}^l$, $l\geqslant 1$, $w=u+v$, $u=\nabla\varphi$, $v=\nabla^\perp\psi$ для $\varphi,\psi\in\mathcal{C}^{l+1}$. Тогда поле w однозначно восстанавливается по поперечным или продольным лучевым преобразованиям моментов.*

Соотношения, полученные в [5,14] и в настоящей работе, необходимые для построения алгоритмов, собраны в следующем утверждении, в котором (как и в тексте ниже) используются более компактные обозначения для производных.

Предложение. *Пусть в B заданы потенциалы $\varphi,\psi\in\mathcal{C}^l$, $l\geqslant 2$ — целое, и векторное поле $w=u+v$, где $u=\nabla\varphi$, $v=\nabla^\perp\psi\in\mathcal{C}^{l-1}$. Тогда:*

1. Имеют место следующие связи лучевых преобразований векторного поля w и преобразования Радона его компонент:

$$\mathcal{P}^{(0)}_{01}w = \eta^i\mathcal{R}w_i, \quad \mathcal{P}^{(1)}_{01}w = \xi^i\mathcal{R}w_i, \quad \mathcal{R}w_j = \eta^j\mathcal{P}^{(0)}_{01}w + \xi^j\mathcal{P}^{(1)}_{01}w, \quad j=1,2.$$

2. Справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\mathcal{P}^{(0)}_{01}\nabla\varphi = 0, \quad \mathcal{P}^{(0)}_{01}\nabla^\perp\psi = (\mathcal{R}\psi)'_s, \quad \mathcal{P}^{(1)}_{01}\nabla\varphi = (\mathcal{R}\varphi)'_s, \quad \mathcal{P}^{(1)}_{01}\nabla^\perp\psi = 0,\\ \mathcal{P}^{(0)}_{11}\nabla\varphi = -\mathcal{R}\varphi, \quad \mathcal{P}^{(0)}_{11}\nabla^\perp\psi = -(\mathcal{R}\psi)'_\theta, \quad \mathcal{P}^{(1)}_{11}\nabla\varphi = -(\mathcal{R}\varphi)'_\theta, \quad \mathcal{P}^{(1)}_{11}\nabla^\perp\psi = \mathcal{R}\psi.\end{gathered}$$

3. Лучевые преобразования поля $w = \nabla\varphi + \nabla^{\perp}\psi$ связано с преобразованиями Радона его потенциалов соотношениями

$$\mathcal{P}_{01}^{(0)}w = (\mathcal{R}\psi)'_s, \quad \mathcal{P}_{01}^{(1)}w = (\mathcal{R}\varphi)'_s, \quad \mathcal{P}_{11}^{(0)}w = -(\mathcal{R}\psi)'_\theta - \mathcal{R}\varphi, \quad \mathcal{P}_{11}^{(1)}w = \mathcal{R}\psi - (\mathcal{R}\varphi)'_\theta.$$

Связи лучевых преобразований векторных полей, полученные в [5], и собранные в предложении связи с лучевыми преобразованиями моментов $\mathcal{P}_{k1}^{(j)}$, $j,k = 0,1$ векторных полей и с преобразованиями Радона $\mathcal{R}$, позволяют воспользоваться различными путями для восстановления векторного поля, исходя только из лучевых преобразований моментов.

Задача 0. *Даны значения продольного $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$ и поперечного $\mathcal{P}_{01}^{(1)}w$ лучевых преобразований векторного поля w. Требуется найти поле w.* Эта задача хорошо изучена (см., например, [15]). В частности известно, что по значениям $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$ и $\mathcal{P}_{01}^{(1)}w$ восстанавливаются соленоидальная $\nabla^{\perp}\psi$ и потенциальная $\nabla\varphi$ части поля w, соответственно.

Предлагаемые в настоящей работе алгоритмы, направленные на решение сформулированных ниже задач 1 и 2, используют исходные данные в форме значений однотипных (либо продольных, либо поперечных) лучевых преобразований нулевого и первого моментов искомого векторного поля, что существенно отличает задачу 0 от задач 1 и 2.

Задача 1. *Даны значения $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$, $\mathcal{P}_{11}^{(0)}w$ продольных лучевых преобразований моментов порядков* $0,1$ *векторного поля w. Требуется найти поле w.*

Следующие формулы дают решение задачи 1:

1. $\mathcal{P}_{01}^{(0)}(\nabla^{\perp}\psi) = (\mathcal{R}\psi)'_s = \mathcal{P}_{01}^{(0)}w,$
2. $$\begin{aligned}\mathcal{P}_{01}^{(1)}(\nabla\varphi) &= (\mathcal{R}\varphi)'_s = -(\mathcal{P}_{11}^{(0)}(\nabla\varphi))'_s = -\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}(w-\nabla^{\perp}\psi)\big)'_s = -\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - \mathcal{P}_{11}^{(0)}(\nabla^{\perp}\psi)\big)'_s \\ &= -(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w)'_s - (\mathcal{R}\psi)''_{s\theta} = -(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w)'_s - (\mathcal{P}_{01}^{(0)}w)'_\theta.\end{aligned}$$

Задача 2. *Даны значения $\mathcal{P}_{01}^{(1)}w$, $\mathcal{P}_{11}^{(1)}w$ поперечных лучевых преобразований моментов порядков* $0,1$ *векторного поля w. Требуется найти поле w.*

Следующие формулы дают решение задачи 2:

1. $\mathcal{P}_{01}^{(1)}(\nabla\varphi) = (\mathcal{R}\varphi)'_s = \mathcal{P}_{01}^{(1)}w,$
2. $$\begin{aligned}\mathcal{P}_{01}^{(0)}(\nabla^{\perp}\psi) &= (\mathcal{R}\psi)'_s = \big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}(\nabla^{\perp}\psi)\big)'_s = \big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}(w-\nabla\varphi)\big)'_s = \big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}w - \mathcal{P}_{11}^{(1)}(\nabla\varphi)\big)'_s \\ &= (\mathcal{P}_{11}^{(1)}w)'_s + (\mathcal{R}\varphi)''_{s\theta} = (\mathcal{P}_{11}^{(1)}w)'_s + (\mathcal{P}_{01}^{(1)}w)'_\theta.\end{aligned}$$

Схемы алгоритмов, направленных как на решение задачи 1, так и на решение задачи 2, полностью аналогичны и отличаются лишь набором используемых формул. Для алгоритма 1 приводим решения как задачи 1, так и задачи 2, для каждой из которых пригоден свой набор исходных данных.

Выбор метода сингулярного разложения для решения поставленных задач обусловлен хорошей точностью приближенно восстановленных векторных полей, полученной ранее при проведении вычислительных экспериментов [15, 16], в том числе в динамическом случае [17]. Кроме того, SVD-метод позволяет вычислять значения лучевых преобразований аппроксимаций как потенциалов, так и векторных полей аналитически.

Остановимся на этом подробнее. В ряде формул, лежащих в основе алгоритмов, присутствуют частные производные по s и θ от исходных данных. Для этого достаточно в рамках SVD-метода найти производные принадлежащих базису потенциалов и их образов. Поясним этот подход на примере задачи 1.

Этап 1. По значениям $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$ с использованием SVD-подхода строим приближение $\sum a_i\nabla^\perp\psi_i$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w. При этом известны приближения $\sum a_i\psi_i$ и для потенциала ψ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля, и $\sum a_i(\mathcal{R}\psi_i)$ для образа ψ. Формируем данные $\mathcal{R}\varphi$ для определения потенциала φ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w. Именно, $\mathcal{R}\varphi = -\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - (\mathcal{R}\psi)'_\theta \approx -\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - \sum a_i(\mathcal{R}\psi_i)'_\theta$, где $(\mathcal{R}\psi_i)'_\theta$ могут быть найдены аналитически.

Этап 2. По значениям $\mathcal{R}\varphi \approx -\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - \sum a_i(\mathcal{R}\psi_i)'_\theta$, с использованием имеющегося сингулярного разложения, строим приближение $\sum b_i\varphi_i$ потенциала φ. Одновременно построено приближение $\sum b_i\nabla\varphi_i$ для потенциальной части $\nabla\varphi$.

Этот приём, в частности, применим при реализации алгоритма 2.

Алгоритм 1. Восстановление соленоидальной $\nabla^\perp\psi$ и потенциальной $\nabla\varphi$ частей векторного поля w по-отдельности с использованием сингулярных разложений безвесовых лучевых преобразований векторных полей.

При решении задачи 1 для восстановления поля w реализуем следующую последовательность действий:

1. построение аппроксимации $\widetilde{\nabla^\perp\psi}$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w по значениям $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$;

2. построение аппроксимации $\widetilde{\nabla\varphi}$ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w по значениям выражения $-\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w\big)'_s - (\mathcal{P}_{01}^{(0)}\widetilde{\nabla^\perp\psi})'_\theta$, где $\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w\big)'_s$ вычисляется с помощью разностной схемы, а значение $(\mathcal{P}_{01}^{(0)}\widetilde{\nabla^\perp\psi})'_\theta$ вычисляется аналитически, с использованием формул (10) из приложения;

3. суммируя результаты, полученные после реализации шагов $1, 2$, получаем аппроксимацию $\widetilde{w}$ поля w.

При рассмотрении задачи 2 для восстановления векторного поля w нужно осуществить следующие действия:

1. построение аппроксимации $\widetilde{\nabla\varphi}$ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w по значениям $\mathcal{P}_{01}^{(1)}w$;

2. построение аппроксимации $\widetilde{\nabla^\perp\psi}$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w по значениям выражения $\big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}w\big)'_s + (\mathcal{P}_{01}^{(1)}\widetilde{\nabla\varphi})'_\theta$, где $\big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}w\big)'_s$ вычисляется разностными методами, а значение $(\mathcal{P}_{01}^{(1)}\widetilde{\nabla\varphi})'_\theta$ находится аналитически;

3. суммируя результаты, полученные действиями $1, 2$, получить приближение $\widetilde{w}$ поля w.

Алгоритм 2. Восстановление соленоидальной $\nabla^\perp\psi$ и потенциальной $\nabla\varphi$ частей векторного поля w по-отдельности с применением ранее построенных SVD-разложений безвесовых лучевых преобразований векторных полей и потенциалов. Отличие от алгоритма 1 состоит в различных реализациях шагов 2 при решении задач 1 или 2.

Решая задачу 1, восстановление векторного поля w реализуется следующим путём:

1. строится аппроксимация $\widetilde{\nabla^\perp\psi}$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w по значениям лучевого преобразования $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$;

2. строится аппроксимация $\widetilde{\varphi}$ потенциала φ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w по значениям выражения $-\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - (\mathcal{R}\widetilde{\psi})'_\theta$, в котором производная преобразования Радона $(\mathcal{R}\widetilde{\psi})'_\theta$ аппроксимации $\widetilde{\psi}$ вычисляется аналитически, с использованием формул (11) из приложения; коэффициенты, полученные при построении аппроксимации $\widetilde{\varphi}$, используются для построения аппроксимации $\widetilde{\nabla\varphi}$ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w;

3. суммируя результаты, полученные на этапах $1, 2$, получаем приближение $\widetilde{w}$ поля w.

Алгоритм 3. Восстановление соленоидальной $\nabla^\perp\psi$ и потенциальной $\nabla\varphi$ частей векторного поля w по-отдельности, с применением ранее построенных сингулярных разложений безвесовых лучевых преобразований векторных полей.

Рассматривая задачу 1, для восстановления векторного поля w делаем следующие шаги:

1. строим аппроксимацию $\widetilde{\nabla^\perp\psi}$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w по значениям $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$;

2. строим аппроксимацию $\widetilde{\nabla\varphi}$ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w по значениям выражения $-\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w\big)'_s-(\mathcal{P}_{01}^{(0)}w)'_\theta$ (производные вычисляются с использованием разностных схем), которое равно $\mathcal{P}_{01}^{(1)}(\nabla\varphi)$;

3. суммируя полученные результаты, приходим к реконструкции $\widetilde{w}$ поля w.

Алгоритм 4. Цель — восстановление компонент w_i, $i=1,2$ векторного поля w, на основе сингулярного разложение преобразования Радона потенциалов.

Для решения задачи 1 необходимы следующие действия:

1. составляем выражения $\eta^i(\mathcal{P}_{01}^{(0)}w)-\xi^i\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w\big)'_s-\xi^i(\mathcal{P}_{01}^{(0)}w)'_\theta$, $i=1,2$, которые равны $\mathcal{R}w_i$, $i=1,2$ (производные вычисляются с использованием разностных схем);

2. восстанавливаем компоненты w_i, $i=1,2$ векторного поля w.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Детально численная реализация алгоритмов восстановления векторных полей, основанных на методе сингулярного разложения, описана в работе [16]. Основные формулы, необходимые для обоснования алгоритмов обращения лучевых преобразований векторных полей и потенциалов, приведены в приложении.

При проведении вычислительных экспериментов исходными данными являются значения лучевых преобразований $\mathcal{P}_{01}^{(0)}(w)$, $\mathcal{P}_{11}^{(0)}(w)$ (задача 1), $\mathcal{P}_{01}^{(1)}(w)$, $\mathcal{P}_{11}^{(1)}(w)$ (задача 2), или $\mathcal{P}_{01}^{(0)}(w)$, $\mathcal{P}_{01}^{(1)}(w)$ (задача 0), известных в точках равномерной сетки. Решение задачи 0, при одновременном решении задачи 1 или 2, преследует цель сравнения результатов расчётов по ранее апробированному алгоритму и предлагаемых в работе алгоритмов восстановления векторных полей по их лучевым преобразованиям моментов.

Фиксируя натуральное L, получаем последовательности

$$s_p=p\cdot\Delta s,\quad p=-L+1,\dots,L-1,\quad \Delta s=1/L,$$

$$\theta_q=q\cdot\Delta\theta,\quad q=0,1,\dots,2L-1,\quad \Delta\theta=\pi/L$$

дискретных значений переменных s,θ. Выбор пары s_p,θ_q означает задание векторов $\xi_q=(\cos\theta_q,\sin\theta_q)$, $\eta_q=(-\sin\theta_q,\cos\theta_q)$ и точки

$$x_{pq}=\Big(\cos\theta_q s_p+\sin\theta_q\sqrt{1-s_p^2}\,,\,\sin\theta_q s_p-\cos\theta_q\sqrt{1-s_p^2}\Big)\in\partial B,$$

из которой выпускается луч в направлении η_q. Использовались дискретизации 200×200, 400×400 и 600×600 по (s,θ).

При вычислении значений лучевых преобразований тестовых полей, состоящее в интегрировании вдоль прямой по формулам (4), использовалась формула трапеции. SVD-метод приводит к полиномиальной аппроксимации (псевдо)обратных операторов ((8) из приложения). Вычисление скалярных произведений $\big\langle g,G_{kn}^{im}\big\rangle_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}$, состоящее в интегрировании по переменным s,θ, использовалась формула Симпсона. Для конструирования базисных полей мы использовали потенциалы ((9) из приложения) максимальной степени $N=101$. При реализации алгоритмов 1, 3, 4 необходимо использование первых производных от функций, заданных на равномерной сетке. В вычислениях применялась пятиточечная разностная схема

$$f'(t_0)\approx\frac{f(t_0-2h)-8f(t_0-h)+8f(t_0+h)-f(t_0+2h)}{12h}$$

высокой степени точности $O(h^4)$.

В первой серии тестов рассматривается векторное поле $w^{(1)} = \nabla^{\perp}\psi^{(1)} + \nabla\varphi^{(1)}$, порождаемое потенциалами класса гладкости C^3, задаваемыми формулой

$$\psi^{(1)}(x) = \varphi^{(1)}(x) = \begin{cases} x^1x^2(0.64 - (x^1+0.1)^2 - (x^2)^2)^3, & \text{если } (x^1+0.1)^2 + (x^2)^2 < 0.64, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Исследовалась зависимость относительной погрешности (в процентах) восстановления в зависимости от дискретизации исходных данных — значений операторов $\mathcal{P}^{(0)}_{01}$, $\mathcal{P}^{(0)}_{11}$ (задача 1). Результаты тестов приведены в таблице 1. Жирным шрифтом выделена наименьшая погрешность для каждой из дискретизаций. В случае, если оптимальное значение степени N базисных многочленов в SVD-разложении меньшее 101,приводится его значение в скобках. Например, запись 0.13 (56) означает, что при данной дискретизации наименьшая погрешность равна 0.13%, и достигается она при $N = 56$. Результаты восстановления при использовании алгоритмов 3 и 4 оказались практически идентичными. Поэтому результаты для алгоритма 4 не приводятся. Для сравнения приведены результаты восстановления по значениям продольного $\mathcal{P}^{(0)}_{01}$ и поперечного $\mathcal{P}^{(1)}_{01}$ лучевых преобразований (задача 0). Из таблицы видно, что при достаточной степени дискретизации алгоритмы 2 и 3 демонстрируют хорошую точность восстановления, близкую к погрешности, возникающую при решении задачи 0.

Таблица 1

Зависимость точности восстановления поля $w^{(1)}$ от дискретизации

Дискретизация	200×200	400×400	600×600
Алгоритм 1, задача 1	0.76 (79)	0.27	0.15
Алгоритм 2, задача 1	0.16 (63)	0.04 (97)	0.03
Алгоритм 3, задача 1	**0.06** (85)	**0.03**	**0.02**
Задача 0	0.03 (98)	0.02	0.02

На рис. 1 приведены результаты исследования зависимости точности восстановления поля $w^{(1)}$ (вертикальная ось, %) от уровня вносимого шума (горизонтальная ось, %) с равномерным (слева) и нормальным распределением (справа). Дискретизация исходных данных — 400×400. Отметим, что практически для всех уровней шума наименьшую погрешность восстановления демонстрирует алгоритм 2.

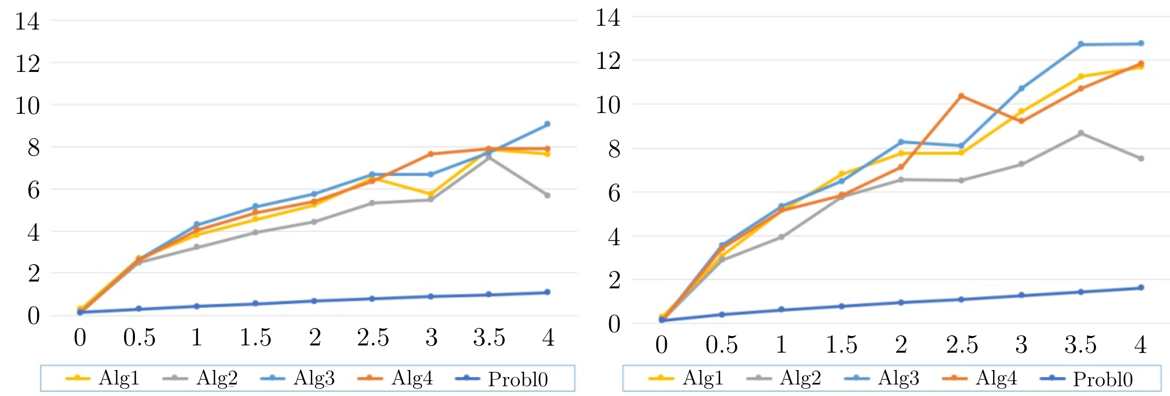

Рис. 1. Зависимость точности восстановления поля $w^{(1)}$ от уровня вносимого шума с равномерным (слева) и нормальным (справа) распределениями

На рис. 2 приведены компоненты поля $w^{(1)}$ (столбец (a)) и его лучших аппроксимаций при использовании алгоритма 2 (b) и алгоритма 3 (c) для восстановления по значениям операторов $\mathcal{P}^{(0)}_{01}$, $\mathcal{P}^{(0)}_{11}$ с внесённым нормально распределённым шумом уровня 4%. Результаты восстановления хорошо передают поведение векторного поля в пределах его носителя; вне же носителя

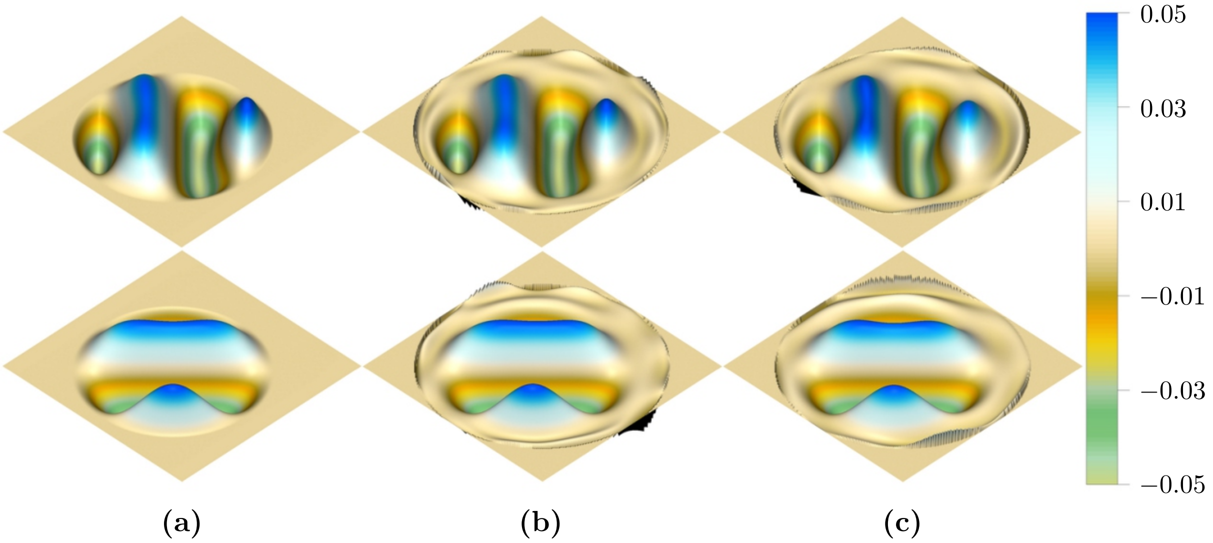

Рис. 2. Компоненты поля $w^{(1)}$ (столбец (a)) и его лучших аппроксимаций при решении задачи 1 с внесённым нормально распределённым шумом уровня 4% с использованием алгоритма 2 (b) и алгоритма 3 (c)

возникают незначительные артефакты, и, таким образом, отдать предпочтение какому-либо алгоритму затруднительно.

В следующей серии тестов рассматривается разрывное векторное поле $w^{(2)} = \nabla^{\perp}\psi^{(2)} + \nabla\varphi^{(2)}$, порождаемое потенциалами, которые задаются формулами

$$\psi^{(2)}(x) = \begin{cases} 0.5 - \sqrt{((x^1)^2 - 0.2)^2 + (x^2)^2}, & \text{если } ((x^1)^2 - 0.2)^2 + (x^2)^2 < 0.25, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$
$$\varphi^{(2)}(x) = \begin{cases} 0.5 - \sqrt{((x^1)^2 + 0.2)^2 + (x^2)^2}, & \text{если } ((x^1)^2 + 0.2)^2 + (x^2)^2 < 0.25, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Результаты восстановления приведены в таблице 2.

Таблица 2

Зависимость точности восстановления поля $w^{(2)}$ от дискретизации

Дискретизация	200×200	400×400	600×600
Алгоритм 1, задача 1	16.96 (49)	14.62 (68)	13.85 (73)
Алгоритм 2, задача 1	19.42 (47)	15.8 (58)	15.13 (69)
Алгоритм 3, задача 1	**16.67** (49)	**13.95** (73)	**12.9** (80)
Алгоритм 4, задача 1	16.75 (50)	14.02 (74)	12.92 (80)
Задача 0	10.59	10.4	10.39

Из таблицы 2 и рис. 3 можно сделать вывод, что при восстановлении разрывного поля при решении задачи 1 все алгоритмы дают точность хуже, чем при решении задачи 0, и связано это, по-видимому, с возникновением значительных артефактов, которых не наблюдается при решении задачи 0.

В последней серии тестов рассматривалось непрерывное векторное поле

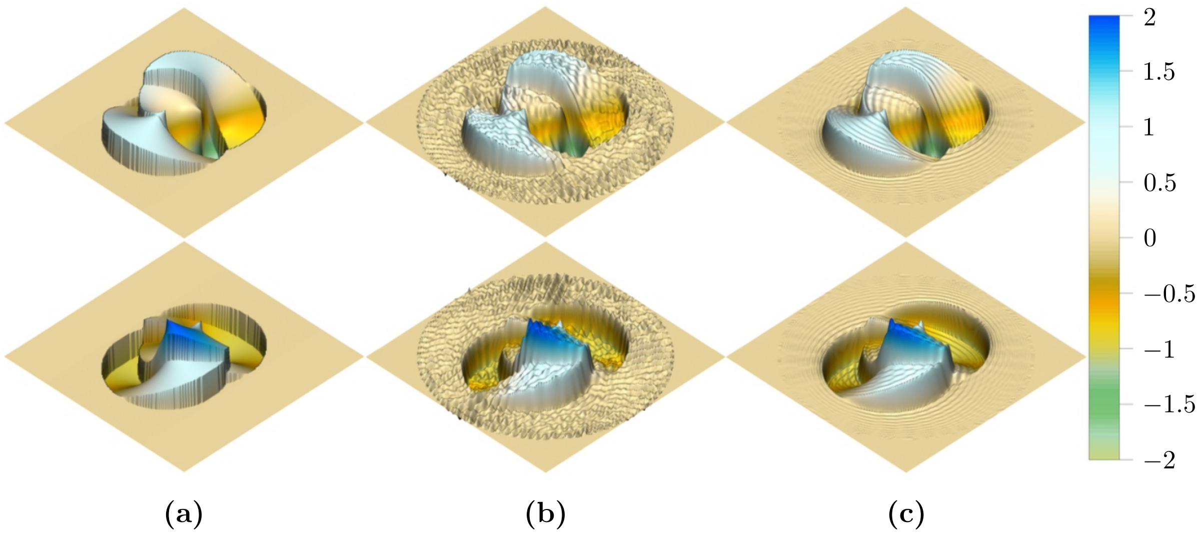

Рис. 3. Компоненты поля $w^{(2)}$ (столбец (a)) и его лучших аппроксимаций при решении задачи 1 с использованием алгоритма 3 (b) и при решении задачи 0 (c)

$w^{(3)} = \nabla^{\perp}\psi^{(3)} + \nabla\varphi^{(3)}$ с двусвязным носителем, задаваемое потенциалами

$$\psi^{(3)}(x) = \begin{cases} (0.3^2 - (x^1 - x^2 + 0.4)^2 - (x^2 - 0.1)^2)^2, & \text{если } (x^1 - x^2 + 0.4)^2 + (x^2 - 0.1)^2 < 0.3^2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi^{(3)}(x) = \begin{cases} \big(\cos(3x^1 - 0.5)\pi + \cos(2x^2 + 0.7)\pi\big)^2/200, & \text{если } |3x^1 - 0.5| + |2x^2 + 0.7| < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Результаты восстановления приведены в таблице 3 (без внесения шума) и на рис. 4 (с внесённым шумом).

Таблица 3

Зависимость точности восстановления поля $w^{(3)}$ от дискретизации

Дискретизация	200 × 200	400 × 400	600 × 600
Алгоритм 1, задача 1	13.06 (49)	10.06 (66)	9.34 (83)
Алгоритм 2, задача 1	18.81 (37)	16.46 (48)	16.03 (66)
Алгоритм 3, задача 1	**3.47** (75)	**1.78**	**1.72**
Алгоритм 4, задача 1	3.48 (75)	1.79	1.73
Задача 0	1.83	1.71	1.71

Проведённые вычислительные эксперименты позволяют сделать следующие выводы.

Серия тестов без внесения шума.

При восстановлении разрывного поля при решении задачи 1 алгоритмы 1–4 дают точность хуже, чем при решении задачи 0. При восстановлении непрерывного поля алгоритмы 3 и 4 при решении задачи 1 демонстрируют точность близкую к точности при решении задачи 0. При восстановлении C^2-гладкого поля при большой дискретизации алгоритмы 2 и 3 демонстрируют хорошую точность восстановления, близкую к точности при решении задачи 0.

Серия тестов с внесённым шумом.

При решении задачи 1 результаты восстановления значительно хуже, чем при решении задачи 0. Однако, необходимо отметить, что по сравнению с единственным известным авторам результатом численной реконструкции по значениям весовых операторов в [18], результаты проведённых в нашей работе вычислительных экспериментов демонстрируют лучшую

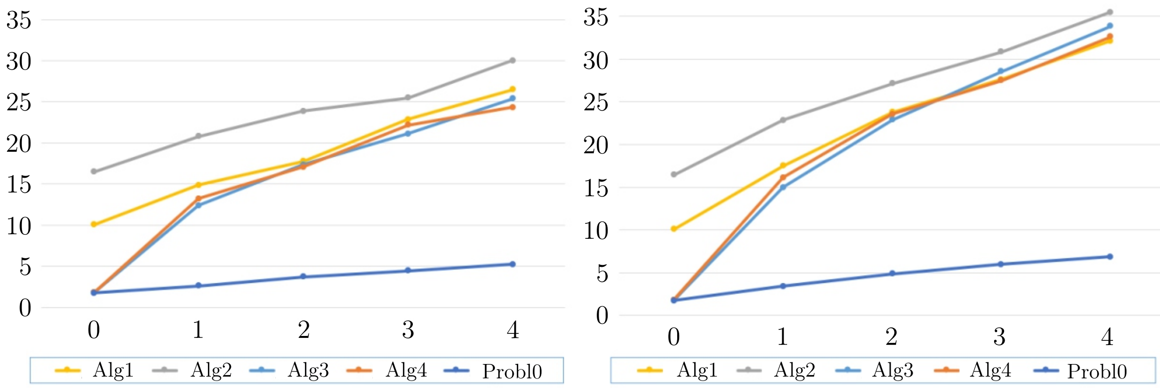

Рис. 4. Зависимость точности восстановления поля $w^{(3)}$ от уровня вносимого шума с равномерным (слева) и нормальным (справа) распределениями

точность. Так, в [18] приведены следующие результаты: внесение шума 0.1% даёт ошибку реконструкции 36%. В настоящей статье ошибка такого уровня получена при внесении шума 4%. Справедливости ради следует отметить, что в [18] задача изучается в трёхмерном пространстве.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена обоснованию, разработке и реализации алгоритмов восстановления векторного поля по лучевым преобразованиям его моментов нулевого и первого порядков. Опираясь на установленные связи между лучевыми преобразованиями моментов векторного поля с разными степенями k весов t^k, и связи с преобразованиями Радона его потенциалов, показано, что векторное поле однозначно восстанавливается по продольным или поперечным лучевым преобразованиям с весом t^k, $k = 0, 1$. Предложены и численно реализованы четыре варианта алгоритма восстановления векторного поля, основанных на установленных в работе свойствах лучевых преобразований. Основной численный метод — сингулярные разложения преобразования Радона и лучевых преобразований векторных полей. Проведены детальные численные эксперименты, направленные на исследование влияния на точность реконструкции векторного поля таких факторов, как дискретизация и зашумлённость данных, гладкость и связность носителя исследуемого поля. Большинство тестов показали заметное преимущество алгоритма, использующего в качестве данных совместно заданные продольные и поперечные лучевые преобразования векторного поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ. СИНГУЛЯРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Для обращения операторов часто используется метод разложения по сингулярным числам (метод SVD, singular value decomposition). Суть метода заключается в том, что оператор A представляется в виде ряда по сингулярным числам и базисным элементам в пространстве образов, тогда (псевдо)обратный оператор будет представлять собой ряд со схожей структурой, где задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа. При построении базисов используются полиномы Якоби $P_n^{(p,q)}(t)$, полиномы Гегенбауера $C_n^{(\mu)}(t)$ и тригонометрические функции $Y_k^1(\theta) = \cos k\theta$, $Y_k^2(\theta) = \sin k\theta$.

Сингулярные разложения операторов лучевых преобразований $\mathcal{P}_{0m}^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant m$ скалярных ($m = 0$, $\mathcal{R} := \mathcal{P}_{00}^{(0)}$) и векторных полей ($m = 1$, $\mathcal{P}_{01}^{(0)}, \mathcal{P}_{01}^{(1)}$) имеют вид

$$g(s,\theta) := [\mathcal{P}_{0m}^{(j)}\mathbf{u}](s,\theta) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=i-1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{kn}^{m}\langle \mathbf{u}, \mathbf{F}_{kn}^{ijm}\rangle_{L_2(S^m(B))} G_{kn}^{im}(s,\theta).$$

Значения (псевдо)обратных операторов $(\mathcal{P}_{0m}^{(j)})^{\dagger}$, $0 \leqslant j \leqslant m$, $m = 0, 1$, действующих на g, могут быть вычислены по формулам

$$[(\mathcal{P}_{0m}^{(j)})^{\dagger} g](x) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=i-1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_{kn}^{m})^{-1} \left\langle g, G_{kn}^{im} \right\rangle_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} \mathbf{F}_{kn}^{ijm}(x). \tag{8}$$

Поля $\mathbf{F}_{kn}^{ijm}$, $i = 1, 2$ определяются

$$\mathbf{F}_{kn}^{ijm}(x) \quad = \nabla^{j} \big(\nabla^{\perp}\big)^{m-j} \Phi_{kn}^{im}(x), \quad k \geqslant i-1,\ n \geqslant 0,\ 0 \leqslant j \leqslant m,$$

где потенциалы в полярной системе координат

$$\Phi_{kn}^{im}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \lambda_{kn}^{m} \left(1 - r^2\right)^{m} r^{k} Y_{k}^{i}(\varphi) P_{n}^{(k+1+m,k+1)}(r^2), \quad k \geqslant i-1,\ n \geqslant 0 \tag{9}$$

и нормирующий коэффициент

$$\lambda_{kn}^{m} = b_k \frac{(n+k)!}{2^m k!(n+m)!} \left(\frac{2n+k+1+m}{\pi}\right)^{1/2}, \quad \text{здесь } b_k = \begin{cases} \sqrt{2}, & k \geqslant 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Функции G_{kn}^{im}, $i = 1, 2$ определяются формулами

$$G_{kn}^{im}(s, \theta) = \frac{b_k (-1)^{n+m}}{\pi} (1 - s^2)^{1/2} C_{2n+k+m}^{(1)}(s) Y_{k}^{i}(\theta), \quad k \geqslant i-1,\ n \geqslant 0.$$

Сингулярные числа σ_{kn}^{m} вычисляются по формулам

$$\sigma_{kn}^{m} = \left(\frac{4\pi}{2n+k+m+1}\right)^{1/2}.$$

Для реализации алгоритмов 1 и 2 необходимы формулы

$$[\mathcal{P}_{01}^{(0)} \nabla^{\perp} \Phi_{kn}^{i1}]'_{\theta}(s, \theta) = (-1)^{n+1+i} \frac{k\, \sigma_{kn}^{1} b_k}{\pi} (1 - s^2)^{1/2} C_{2n+k+1}^{(1)}(s) Y_{k}^{3-i}(\theta), \tag{10}$$

$$[\mathcal{R} \Phi_{kn}^{i1}]'_{\theta}(s, \theta) = (-1)^{n+i} \frac{2\, k\, \sigma_{kn}^{1} b_k}{\pi(2n+k+1)(2n+k+3)} (1 - s^2)^{3/2} C_{2n+k}^{(2)}(s) Y_{k}^{3-i}(\theta), \tag{11}$$

где $k \geqslant i-1$, $n \geqslant 0$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00200). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrabwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Säch. Akad. Wiss. 1917. V. 69. P. 262–277.
2. *Deans S.* The Radon Transform and Some of its Applications. N. Y.: Wiley, 1983.

3. *Sharafutdinov V. A.* Integral Geometry of Tensor Fields. Urtecht: VSP, 1994.
4. *Wernick M. N., Aarsvold J. N.* Emission tomography: The fundamentals of PET and SPECT. London: Elsevier, 2004.
5. *Derevtsov E. Yu., Svetov I. E.* Tomography of tensor fields in the plane // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 2. P. 24–68.
6. *Derevtsov E. Y., Volkov Y. S., Schuster T.* Generalized attenuated ray transforms and their integral angular moments // Appl. Math. Comput. 2021. V. 409, N 15. Article 125494; DOI: 10.1016/j.amc.2020.125494
7. *Krishnan V. P., Manna R., Sahoo S. K., Sharafutdinov V. A.* Momentum ray transforms // Inverse Probl. Imaging. 2019. V. 13, N 3. P. 679–701; DOI: 10.3934/ipi.2019031
8. *Abhishek A., Mishra R. K.* Support theorems and an injectivity result for integral moments of a symmetric m-tensor field // J. Fourier Anal. Appl. 2019. V. 25, N 4. P. 1487–1512; DOI: 10.1007/s00041-018-09649-7
9. *Mishra R. K.* Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in $\mathbb{R}^n$ // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2020. V. 28, N 2. P. 173–184; DOI: 10.1515/jiip-2018-0028
10. *Mishra R. K., Sahoo S. K.* Injectivity and range description of first $(k+1)$ integral moment transforms over m-tensor fields in $\mathbb{R}^n$ // SIAM J. Math. Anal. 2021. V. 53, N 1. P. 253-–278; DOI: 10.1137/20M1347589
11. *Bhattacharyya S., Krishnan V. P., Sahoo S. K.* Momentum Ray Transforms and a Partial Data Inverse Problem for a Polyharmonic Operator // SIAM J. Math. Anal. 2023. V. 55, N 4. P. 4000–4038; DOI: 10.1137/22M1500617
12. *Denisiuk A.* Iterative inversion of the tensor momentum x-ray transform // Inverse Probl. 2023. V. 39, N 10. Article 105002; DOI: 10.1088/1361-6420/acef52
13. *Omogbhe D., Sadiq S. K.* On the X-ray transform of planar symmetric tensors // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2023. V.32, N 3. P. 431–452; DOI: 10.1515/jiip-2022-0055
14. *Деревцов Е. Ю.* Лучевые преобразования моментов планарных тензорных полей // Сиб. журн. индустр. матем. 2023. Т. 26, № 3. С. 26–41; DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.303
15. *Derevtsov E. Y., Efimov A. V., Louis A. K., Schuster T.* Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 19, N 4–5. P. 689–715; DOI: 10.1515/jiip.2011.047.
16. *Светов И. Е., Полякова А. П.* Сравнение двух алгоритмов численного решения задачи двумерной векторной томографии // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т. 10, № 1. С. 90–108.
17. *Polyakova A. P., Svetov I. E.* A numerical solution of the dynamic vector tomography problem using the truncated singular value decomposition method // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2024. V. 32, N 1. P. 145–160; DOI:10.1515/jiip-2022-0019
18. *Kunyansky L., McDugald E., Shearer B.* Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography // Inverse Probl. 2023. V. 39, N 6. Article 065014; DOI:10.1088/1361-6420/acd07a

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.44:517.95

NUMERICAL RECONSTRUCTION OF A TWO-DIMENSIONAL VECTOR FIELD FROM MOMENTUM RAY TRANSFORMS

© 2024 **I. E. Svetov**[1,2a], **E. Yu. Derevtsov**[1,2b], **S. V. Maltseva**[1,2c], **A. P. Polyakova**[1,2d]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]dert@math.nsc.ru, [c]sv_maltseva@mail.ru, [d]apolyakova@math.nsc.ru

Received 07.05.2024, revised 28.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. The algorithms for reconstructing a vector field from known longitudinal or transverse ray transforms of its moment are proposed and justified. The properties of several algorithms are studied depending on the degree of data discretization, the level and type of noise introduced into the data, the smoothness of the vector field, and the degree of connectivity of its support. Numerical simulations show good results of reconstructing vector fields from their momentum ray transforms.

Keywords: vector field, momentum ray transform, differential property of ray transforms, reconstruction algorithm, approximation, numerical simulation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.408

REFERENCES

1. J. Radon, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrabwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten," Ber. Säch. Akad. Wiss. **69**, 262–277 (1917).
2. S. Deans, *The Radon Transform and Some of Its Applications* (Wiley, New York, 1983).
3. V. A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields* (VSP, Urtecht, 1994).
4. M. N. Wernick and J. N. Aarsvold, *Emission Tomography: the Fundamentals of PET and SPECT* (Elsevier, London, 2004).
5. E. Yu. Derevtsov and I. E. Svetov, "Tomography of tensor fields in the plane," Eurasian J. Math. Comput. Appl. **3** (2), 24–68 (2015).
6. E. Y. Derevtsov, Y. S. Volkov, and T. Schuster, "Generalized attenuated ray transforms and their integral angular moments," Appl. Math. Comput. **409** (15), 125494 (2021). https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125494
7. V. P. Krishnan, R. Manna, S. K. Sahoo, and V. A. Sharafutdinov, "Momentum ray transforms," Inverse Probl. Imaging **13** (3), 679–701 (2019). https://doi.org/10.3934/ipi.2019031
8. A. Abhishek and R. K. Mishra, "Support theorems and an injectivity result for integral moments of a symmetric m-tensor field," J. Fourier Anal. Appl. **25** (4), 1487–1512 (2019). https://doi.org/10.1007/s00041-018-09649-7
9. R. K. Mishra, "Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in $\mathbb{R}^n$," J. Inverse Ill-Posed Probl. **28** (2), 173–184 (2020). https://doi.org/10.1515/jiip-2018-0028

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 861–875.

10. R. K. Mishra and S. K. Sahoo, "Injectivity and range description of first $(k + 1)$ integral moment transforms over m-tensor fields in $\mathbb{R}^n$," SIAM J. Math. Anal. **53** (1), 253–278 (2021). https://doi.org/10.1137/20M1347589

11. S. Bhattacharyya, V. P. Krishnan, and S. K. Sahoo, "Momentum ray transforms and a partial data inverse problem for a polyharmonic operator," SIAM J. Math. Anal. **55** (4), 4000–4038 (2023). https://doi.org/10.1137/22M1500617

12. A. Denisiuk, "Iterative inversion of the tensor momentum x-ray transform," Inverse Probl. **39** (10), 105002 (2023). https://doi.org/10.1088/1361-6420/acef52

13. D. Omogbhe and S. K. Sadiq, "On the X-ray transform of planar symmetric tensors," J. Inverse Ill-Posed Probl. **32** (3), 431–452 (2023). https://doi.org/10.1515/jiip-2022-0055

14. E. Yu. Derevtsov, "Momentum ray transforms of planar tensor fields," Sib. Zh. Ind. Mat. **26** (3), 26–41 (2023) [J. Appl. Ind. Math. **17** (3), 521–534 (2023)]. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2023.26.303

15. E. Y. Derevtsov, A. V. Efimov, A. K. Louis, and T. Schuster, "Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography," J. Inverse Ill-Posed Probl. **19** (4–5), 689–715 (2011). https://doi.org/10.1515/jiip.2011.047

16. I. E. Svetov and A. P. Polyakova, "Comparison of two algorithms for numerical solution of the problem of two-dimensional vector tomography," Sib. Elektron. Mat. Izv. **10** (1), 90–108 (2013) [in Russian].

17. A. P. Polyakova and I. E. Svetov, "A numerical solution of the dynamic vector tomography problem using the truncated singular value decomposition method," J. Inverse Ill-Posed Probl. **32** (1), 145–160 (2024). https://doi.org/10.1515/jiip-2022-0019

18. L. Kunyansky, E. McDugald, and B. Shearer, "Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography," Inverse Probl. **39** (6), 065014 (2023). https://doi.org/10.1088/1361-6420/acd07a