УДК 517.95

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЯЗКИХ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С $p(x)$-ЛАПЛАСИАНОМ С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2024 **А. С. Терсенов**

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 06.11.2023 г.; после доработки 17.09.2024 г.;
принята к публикации 06.11.2024 г.

В настоящей статье изучается первая краевая задача для уравнения с $p(x)$-лапласианом с одной пространственной переменной при наличии градиентных членов, не удовлетворяющих условию Бернштейна—Нагумо. Определён класс градиентных нелинейностей, для которого доказано существование вязкого по Лионсу решения непрерывного по Липшицу по x и по Гёльдеру по t.

Ключевые слова: уравнение с $p(x)$-лапласианом, условие Бернштейна—Нагумо, вязкие по Лионсу решения, априорные оценки.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.409

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим первую краевую задачу для эволюционного уравнения с $p(x)$-лапласианом

$$u_t - (|u_x|^{p(x)-2}u_x)_x = F(t,x,u,u_x) \quad \text{в} \quad \Omega_T = (0,T)\times(-l,l), \tag{1}$$

$$u(t,\pm l) = 0 \quad \text{при} \quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x\in[-l,l]. \tag{3}$$

Предполагаем, что $p(x) > 2$, функция $u_0(x)$ удовлетворяет

$$u_0(\pm l) = 0, \quad |u_0'(x)| \leqslant K, \quad x\in[-l,l]. \tag{4}$$

Интерес к исследованию начально-краевых задач как для (1), так и в многомерном случае, связан с большим количеством приложений в различных областях механики. Они возникают при моделировании течений неньютоновских жидкостей, как дилатантных ($p > 2$), так и псевдопластичных ($p < 2$), в моделях нелинейной упругости, теории капиллярных поверхностей и гляциологии, при описании течений жидкости в пористых средах. Отметим также использование многомерного аналога уравнений вида (1) при моделировании течений электрореологических и термореологических жидкостей [1–4], а также в обработке сигналов и изображений [5, 6].

Уравнения с главной частью, такой же как в (1), принадлежат к так называемому классу уравнений с нестандартными условиями роста, которые заключаются в следующем: если положить $a(x,u_x) = |u_x|^{p(x)-2}u_x$, тогда $a(x,q)$ удовлетворяет условиям

$$b_1|q|^{p_*-1} - b_2 \leqslant |a(x,q)| \leqslant b_3|q|^{p^*-1} + b_4,$$

где $p_* = \min_{x\in[-l,l]} p(x)$, $p^* = \max_{x\in[-l,l]} p(x)$, а b_k — некоторые неотрицательные постоянные. К настоящему моменту существует обширная литература, посвящённая вопросам глобального существования соболевских решений задачи (1)–(3) (см. [7] и ссылки в ней). Отметим также работы [8, 9], в которых были доказаны теоремы существования соболевских решений высокой гладкости для анизотропных уравнений с нестандартными условиями роста. Наряду с соболевскими решениями, исследование разрешимости задач вида (1)–(3), а также их изотропных аналогов, проводится в классе вязких по Лионсу решений [10–14]. В работах [15–17] исследуется эквивалентность соболевских и вязких решений .

Как известно, использование методов вариационного исчисления при решении указанных задач, связано с вариационностью главной части указанных уравнений. Однако наличие в уравнении градиентных членов существенно осложняет применение этих методов. В этом случае для доказательства разрешимости краевых задач широко используются топологические методы, основанные на получении априорных оценок, а также различные аппроксимационные методы.

В связи с этим отметим следующие работы, в которых исследование краевых задач проводилось при наличии градиентных членов. В работах [18–20] с помощью аппроксимационных методов доказывается существование слабых решений краевых задач для (1). В работах [21–25] с помощью различных топологических методов, основанных на теоремах лиувиллевского типа, на методе суб-/суперрешений с последующим применением теоремы Красносельского, доказаны аналогичные результаты. В [26] результаты о существовании решений были получены с помощью итерационного метода, основанного на методе горного перевала. В [27] авторы для получения существования решений использовали принцип неподвижной точки Лерэ-Шаудера, используя методы линеаризации, априорные оценки с весами и теоремы сравнения. Отметим также работы [28–31] в которых исследуются уравнения, содержащие градиентные члены.

Во всех вышеперечисленных работах младшие члены в уравнении удовлетворяют условию Бернштейна—Нагумо, которое в случае уравнения (1) принимает вид

$$|F(t,x,u,q)| \leqslant c\left(1+|q|^{p(x)}\right) \quad \text{для} \quad (t,x,u,q)\in \overline{\Omega}_T\times[-M,M]\times\mathbb{R} \tag{5}$$

с некоторой постоянной c при условии, что решение удовлетворяет условию $\max|u| \leqslant M$ с некоторой постоянной M. В работах [32–34] были доказаны теоремы существования обобщённых решений различного типа с нарушением условия Бернштейна—Нагумо. Эти результаты были получены при условии, что показатели анизотропности являются либо постоянными, либо функциями от времени. В настоящей статье мы рассмотрим случай, когда показатель p зависит от пространственной переменной.

Нас интересуют условия, при которых можно доказать существование решений непрерывных по Гёльдеру по времени и непрерывных по Липшицу по x при отсутствии ограничения вида (5). Насколько нам известно, на сегодняшний день нет результатов о существовании решений указанной гладкости для задачи (1)–(3) с произвольным ростом по градиенту.

Уравнение (1) с нелинейным источником, без градиентных членов и постоянным показателем p было рассмотрено в [35]. В статье [36] была рассмотрена задача (1)–(3) в предположении, что F имеет вид $F(x,u,u_x) = f_1(x,u)u_x + f_2(x,u)$ и выполнены следующие условия:

$$uF(x,u,0) \leqslant c_1u^2 + c_2,$$

где c_1 и c_2 — неотрицательные постоянные,

$$F(x,u_2,q) - F(x,u_1,q) \leqslant 0, \quad u_2 > u_1,$$

$$p(x)\in\mathbb{C}^1[-l,l], \quad F(x,u,q)\in\mathbb{C}^\sigma([-l,l]\times\mathbb{R}^2), \quad \sigma\in(0,1).$$

Было доказано существование слабого решения, в соболевском смысле, являющегося непрерывной по Липшицу функцией. Нам удалось показать, что при некоторых дополнительных предположениях о поведении функции F существует непрерывное по Липшицу вязкое по Лионсу решение в случае, когда F не удовлетворяет (5).

Доказательство теорем существования основано на регуляризации исходной задачи и предельном переходе по классическим решениям последней. При попытке доказать существование соболевского решения указанной гладкости, возникает проблема в предельном переходе в нелинейных градиентных членах. Это связано с отсутствием необходимых априорных оценок для осуществления указанного предельного перехода. Мотивация для поиска решения в классе вязких по Лионсу решений заключается в том, что для осуществления предельного перехода в этом случае требуется лишь априорная оценка семейства классических (являющихся одновременно и вязкими) решений регуляризованных задач в классе Гёльдера.

В [32–34] такой подход был реализован, когда показатели анизотропности не зависят от пространственной переменной. Здесь, хоть и ограничиваемся пока одномерным случаем, мы рассматриваем ситуацию, когда показатель анизотропности зависит от x. Более того, условия на градиентный член, приведённые в настоящей статье, позволяют расширить класс градиентных нелинейностей, для которых можно получить теорему существования.

Дадим определение вязкого решения для параболических уравнений следуя [37] (см. также [13, 38]). Заметим, что для произвольной функции $\phi(t,x) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\Omega_T)$ имеем

$$\phi_t - (|\phi_x|^{p(x)-2}\phi_x)_x = \phi_t - (p(x)-1)|\phi_x|^{p(x)-2}\phi_{xx} - p'(x)\phi_x|\phi_x|^{p(x)-2}\ln|\phi_x|$$

при условии, что $p(x) \in \mathbb{C}^1[-l,l]$. Для того, чтобы определить понятие вязкого решения, введём функцию

$$\Phi(t,x,u,q,X) = (p(x)-1)|q|^{p(x)-2}X + p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| + F(t,x,u,q), \tag{6}$$

где $(q,X) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Будем полагать, что по непрерывности для функции

$$b_0(x,q) = p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q|$$

имеем $b_0(x,0)=0$.

Определение. Будем говорить, что непрерывная функция $u(t,x)$ является вязким субрешением (суперрешением) задачи (1)–(3), если

$$u \leqslant 0 \ (\geqslant 0) \quad \text{на} \quad (0,T)\times\{-l,\,l\}, \quad u(0,x) \leqslant u_0(x) \ (\geqslant u_0(x)) \quad \text{для} \quad |x|<l$$

и для произвольной функции $\phi(t,x) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\Omega_T)$ и любой точки $(t_0,x_0) \in \Omega_T$ имеет место

$$\phi_t(t_0,x_0) - \Phi(t_0,x_0,\phi(t_0,x_0),\phi_x(t_0,x_0),\phi_{xx}(t_0,x_0)) \leqslant 0 \,\big(\geqslant 0\big),$$

где $\phi(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega_T$ удовлетворяет

$$u(t,x) \leqslant \phi(t,x) \,\big(\geqslant \phi(t,x)\big), \quad u(t_0,x_0) = \phi(t_0,x_0).$$

Непрерывная функция $u(t,x)$ является вязким решением задачи (1)–(3), если она одновременно является суб- и суперрешением.

Для более ясного представления результатов будем предполагать, что

$$F(t,x,u,q) = f(t,x,u,q) - u, \quad f(t,x,u,0) = 0.$$

Положим

$$M_1 = \inf_{|x|\leqslant l} u_0, \quad M_2 = \sup_{|x|\leqslant l} u_0, \quad M = \max\{M_2, M_2 - M_1, -M_1\}.$$

Далее, будем предполагать, что функция f удовлетворяет следующим ограничениям:

$$f(t,x,u,-q) \leqslant 0, \quad u > 0, \quad f(t,x,u,q) \geqslant 0, \quad u < 0, \tag{7}$$

где $q \in [q_0, q_1]$, $|x| \leqslant l$, $|u| \leqslant M$,

$$|f(t,x,u,q) - f(t,y,u,q)| \leqslant K_1(t,x,y,u,q)|x-y| \tag{8}$$

при $t \in [0,T]$, $x, y \in [-l,l]$, $0 < x-y < \tau_0$, $|u| \leqslant M$, $q_0 \leqslant |q| \leqslant q_1$, где $K_1 \geqslant 0$ — ограниченная функция по своим переменным на этом множестве,

$$f(t,x,u_1,q) - f(t,x,u_2,q) \geqslant \gamma(t,x,u_1,u_2,q)(u_2-u_1) \tag{9}$$

при $t \in [0,T]$, $|x| \leqslant l$, $|u_1|, |u_2| \leqslant M$, $u_2 \geqslant u_1$, $q_0 \leqslant |q| \leqslant q_1$, где $\gamma(t,x,u_1,u_2,q) \geqslant \gamma_0 > 0$ — ограниченная функция по своим переменным на этом множестве. Положительные постоянные q_0, q_1, τ_0 будут определены в (27), (28). Обозначим через $\mathbf{V}$ множество

$$\mathbf{V} = \{(t,x),(t,y) \in \overline{\Omega}_T, 0 < x-y < \tau_0, |u_1|, |u_2| \leqslant M, u_2 \geqslant u_1, q_0 \leqslant |q| \leqslant q_1\}.$$

Предположим, что

$$\sup_{\mathbf{V}} \frac{K_1(t,x,y,u_1,q)}{\gamma(t,x,u_1,u_2,q)} \leqslant C|q|^{\nu}, \quad \nu < 1, \tag{10}$$

где C — положительная постоянная.

Теорема 1. *Пусть $f(t,x,u,u_x) \in \mathbb{C}^{\sigma}([0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $\sigma \in (0,1)$, $p(x) \in \mathbb{C}^1([-l,l])$. Пусть выполнены условия (7)–(10). Тогда для произвольного $T > 0$, существует вязкое решение задачи (1)–(3) такое, что $u(t,x)$ является непрерывной по Гёльдеру по переменной t с показателем 1/2, непрерывной по Липшицу по x и*

$$M_1 \leqslant u \leqslant M_2, \quad ||u_x||_{\mathbb{L}^{\infty}(\Omega_T)} \leqslant q_1.$$

Прежде чем сформулировать теорему существования и единственности задачи (1)–(3), сделаем несколько замечаний об условиях, гарантирующих единственность вязкого решения. Как известно, доказательство теоремы сравнения для суб- и суперрешений класса $\mathbb{C}^{1,2}$, следствием которой является единственность, доказывается с помощью применения классического принципа максимума. В теории вязких решений аналогичная теорема сравнения формулируется для суб- и суперррешений, которые являются всего лишь полунепрерывными сверху и снизу функциями соответственно. Доказательство теоремы сравнения основано на адаптации классического принципа максимума для функций, не имеющих необходимую гладкость. Мы приведём без доказательства одно утверждение, на котором базируется данная адаптация. Делаем мы это для того, чтобы прояснить некоторые условия, которые мы накладываем на уравнение, для получения единственности.

Лемма 1 ([11], глава 3, лемма 3.1). *Пусть $O \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество и*

$$M_\beta = \sup_{O \times O} \left(u(x) - v(y) - \frac{\beta}{2}|x-y|^2 \right)$$

для $\beta > 0$, где $u(x)$ и $v(y)$ — непрерывные функции. Пусть $M_\beta < \infty$ при больших β и последовательность (x_β, y_β) такова, что

$$\lim_{\beta \to \infty} \left(M_\beta - \left[u(x_\beta) - v(y_\beta) - \frac{\beta}{2}|x_\beta - y_\beta|^2 \right] \right) = 0.$$

Тогда верны следующие соотношения

(i) $\lim\limits_{\beta\to\infty} \beta|x_\beta - y_\beta|^2 = 0$;

(ii) $\lim_{\beta\to\infty} M_\beta = u(\hat{x}) - v(\hat{x}) = \sup_O(u(x) - v(x))$, *где* $\hat{x} = \lim_{\beta\to\infty} x_\beta$.

Для единственности вязкого решения (см. [38], глава 3, условия 3.13, 3.14), необходимо наложить структурные ограничения на $\Phi(t, x, r, q, X)$. Предположим, что существует функция $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$, удовлетворяющая $\omega(0+) = 0$, такая, что

$$\Phi(t, x, r, \beta(x - y), X) - \Phi(t, y, r, \beta(x - y), Y) \leqslant \omega(\beta|x - y|^2 + |x - y|) \tag{11}$$

при достаточно большом β и каждом фиксированном $t \in (0, T)$, $x, y \in [-l, l]$, $r \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathbb{R}$, $X \leqslant Y$ и

$$-3\beta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leqslant 3\beta \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тогда теорема сравнения имеет место. Здесь $\beta > 0$ — параметр, удовлетворяющий

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta|x - y|^2 = 0,$$

где предел понимается в смысле условия (i) сформулированного выше утверждения. Заметим, что неравенство (12) мы понимаем в следующем смысле: говорим, что для матриц A и B выполняется $A \leqslant B$, если $(A\xi, \xi) \leqslant (B\xi, \xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. В случае, когда имеются более гладкие суб- и суперрешения для сравнения, условие (11) может быть ослаблено. Так в случае, когда хотя бы одно из этих решений липшицево по пространственным переменным равномерно по переменной t, это условие принимает следующий вид:

$$\Phi(t, x, r, \beta(x - y), X) - \Phi(t, y, r, \beta(x - y), Y) \leqslant \omega(\beta|x - y|^\theta + |x - y|) \tag{13}$$

с некоторым $\theta > 1$, где $\beta > 0$ является параметром, удовлетворяющим соотношению

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta|x - y|^\theta = 0 \tag{14}$$

при каждом фиксированном t. Таким образом, если вязкое решение липшицево по пространственным переменным равномерно по t, то для единственности достаточно потребовать выполнение условий (12)–(14).

Теорема 2. *Пусть* $f(t, x, u, u_x) \in \mathbb{C}^\sigma([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $\sigma \in (0, 1)$, $p(x) \in \mathbb{C}^1([-l, l])$. *Пусть выполнены условия* (7)–(10), (12)–(14). *Тогда для произвольного* $T > 0$, *существует единственное вязкое решение задачи* (1)–(3) *такое, что* $u(t, x)$ *является непрерывной по Гёльдеру по переменной* t *с показателем 1/2, непрерывной по Липшицу по* x *и*

$$M_1 \leqslant u \leqslant M_2, \quad ||u_x||_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_T)} \leqslant q_1.$$

Ниже мы приводим пример уравнения, когда условия (12)–(14), *гарантирующие единственность решения, выполнены.*

Пример. Рассмотрим (6), предполагая, что $p(x) \in \mathbb{C}^{1,1}([-l, l])$. Получим оценки вида (13) для каждого из трёх членов в (6) отдельно. Для первого члена нам надо надлежащим образом оценить разность

$$-(p(y) - 1)|q|^{p(y)-2}Y + (p(x) - 1)|q|^{p(x)-2}X = a^2(x, q)X - a^2(y, q)Y,$$

где $a^2(z, q) = (p(z) - 1)|q|^{p(z)-2}$. Домножим правую часть неравенства (12) на неотрицательную матрицу

$$\begin{pmatrix} a^2(x, q) & a(x, q)a(y, q) \\ a(x, q)a(y, q) & a^2(y, q) \end{pmatrix}$$

и возьмём след от обеих полученных матриц. Учитывая, что указанные преобразования сохранят знак неравенства в (12), получим

$$a^2(x,q)X - a^2(y,q)Y \leqslant 3\beta(a(x,q)-a(y,q))^2. \tag{15}$$

Оценим сначала разность $a(x,q)-a(y,q)$. Представим её в виде

$$a(x,q)-a(y,q) = a'_z(c,q)(x-y),$$

где c — некоторая промежуточная точка между x и y. Положим $a(z,q) = b(z)|q|^{r(z)}$, где $b(z) = \sqrt{p(z)-1}$, $r(z) = \frac{p(z)-2}{2}$. Тогда

$$a'_z(c,q) = b'(c)|q|^{r(c)} + b(c)r'(c)|q|^{r(c)}\ln|q|.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} a(x,q)-a(y,q) = b(x)|q|^{r(x)} - b(y)|q|^{r(y)} \leqslant \\ |b'(c)|\,|q|^{r(c)}|x-y| + |b(c)|\,|r'(c)|\,|q|^{r(c)}|\ln|q||\,|x-y|. \end{gathered} \tag{16}$$

Положим

$$b_1 = \max|b(z)|, \quad b'_1 = \max|b'(z)|, \quad r'_1 = \max|r'(z)|, \quad B = \max\{b_1, b'_1, r'_1\}.$$

Тогда неравенство (16) можно записать в виде

$$a(x,q)-a(y,q) \leqslant B|q|^{r(c)}|x-y|(1+|\ln|q||). \tag{17}$$

Заметим, что в (13) надо теперь вместо q подставить $\beta(x-y)$. Таким образом, для разности $a(x,q)-a(y,q)$ окончательно имеем

$$a(x,q)-a(y,q)\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant B\left[\beta|x-y|^{\frac{1+r(c)}{r(c)}}\right]^{r(c)}(1+|\ln\beta|x-y||). \tag{18}$$

Из (15), (17), (18) получаем

$$\begin{gathered} a^2(x,q)X - a^2(y,q)Y\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant 3\beta(a(x,q)-a(y,q))^2 \leqslant \\ 3\beta B^2\left[\beta|x-y|^{\frac{1+r(c)}{r(c)}}\right]^{2r(c)}(1+|\ln\beta|x-y||)^2. \end{gathered}$$

Внесём β внутрь квадратных скобок и окончательно получим

$$\begin{gathered} a^2(x,q)X - a^2(y,q)Y\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant \\ 3B^2\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}(1+2|\ln\beta|x-y||+\ln^2\beta|x-y|). \end{gathered} \tag{19}$$

Отбросив на время в правой части неравенства (19) множитель $3B^2$, последовательно оценим каждое из трёх слагаемых его составляющих.

Введём постоянную θ из (14) следующим образом:

$$1 < \theta < \min_{c\in[-l,l]}\left(1+\frac{1}{p(c)-1}\right). \tag{20}$$

Таким образом, мы полагаем, что (14) выполнено с указанным θ. Откуда, в частности, следует, что при достаточно больших β имеют место соотношения

$$\beta|x-y|^{\theta}<1, \quad |x-y|<1. \tag{21}$$

Из доказательства упомянутой леммы 1 (см. также [38], теорема 3.2) следует, что достаточно, чтобы условия (12), (13) выполнялись бы при достаточно большом β. Учитывая этот факт и (21), первое из слагаемых в (19) можно оценить следующим образом:

$$\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}=\left[\beta|x-y|^{\theta+1+\frac{1}{p(c)-1}-\theta}\right]^{p(c)-1}=$$

$$\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{p(c)-1}\left[|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}-\theta}\right]^{p(c)-1}\leqslant$$

$$\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{p(c)-1}\leqslant\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1}.$$

Переходим ко второму слагаемому

$$2\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}|\ln\beta|x-y||.$$

В силу (14), и, как следствие $|x-y|\to 0$ при $\beta\to\infty$, $|\ln\beta|x-y||$ можно оценить следующим образом:

$$|\ln\beta|x-y||=|\ln\beta|x-y|^{\theta}|x-y|^{1-\theta}|\leqslant$$

$$\frac{C_1}{(\beta|x-y|^{\theta})^{\mu_1}}+\frac{C_2}{|x-y|^{\mu_2}}$$

при некоторых достаточно малых $\mu_1>0$ и $\mu_2>0$, где C_1, C_2 — некоторые постоянные. Из последнего неравенства и (21) вытекает, что

$$2\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}|\ln\beta|x-y||\leqslant 2\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}\left(\frac{C_1}{(\beta|x-y|^{\theta})^{\mu_1}}+\frac{C_2}{|x-y|^{\mu_2}}\right)=$$

$$2C_1\left[\beta|x-y|^{\theta+\frac{p(c)-\theta\mu_1}{p(c)-1-\mu_1}-\theta}\right]^{p(c)-1-\mu_1}+2C_2\left[\beta|x-y|^{\theta+\frac{p(c)-\mu_2}{p(c)-1}-\theta}\right]^{p(c)-1}\leqslant$$

$$2C_1\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{p(c)-1-\mu_1}+2C_2\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{p(c)-1}\leqslant$$

$$\max\{2C_1,2C_2\}\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-\mu_1},$$

где мы учитываем, что

$$\frac{p(c)-\theta\mu_1}{p(c)-1-\mu_1}\geqslant\theta, \quad \frac{p(c)-\mu_2}{p(c)-1}\geqslant\theta,$$

когда θ удовлетворяет (20) и μ_2 достаточно мало.

Переходим к оценке третьего члена. Легко видеть, что $\ln^2\beta|x-y|$ может быть оценён следующим образом:

$$\ln^2\beta|x-y|\leqslant\frac{C_1^2}{(\beta|x-y|^{\theta})^{2\mu_1}}+\frac{C_1C_2}{(\beta|x-y|^{\theta})^{\mu_1}|x-y|^{\mu_2}}+\frac{C_2^2}{|x-y|^{2\mu_2}}.$$

Откуда, аналогично предыдущим рассуждениям, связанным с оценкой логарифма, получаем, учитывая малость μ_2 и (20), что

$$\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}\ln^2\beta|x-y|\leqslant\max\{C_1^2,C_2^2,2C_1C_2\}\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-2\mu_1}.$$

Суммируя полученные результаты, мы получаем итоговую оценку

$$\begin{gathered} a^2(x,q)X - a^2(y,q)Y\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant C^*\left[\beta|x-y|^\theta\right]^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-2\mu_1}, \\ C^* = 3B^2\max\{2C_1, 2C_2, C_1^2, C_2^2, 2C_1C_2\}. \end{gathered} \tag{22}$$

Таким образом, в качестве функции ω в (13) можно взять $\omega(z) = C^* z^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-2\mu_1}$.

Переходим теперь ко второму члену в (6). Согласно (13) нам нужно оценить следующую разность:

$$p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| - p'(y)q|q|^{p(y)-2}\ln|q|.$$

Добавив и отняв $p'(y)q|q|^{p(x)-2}\ln|q|$, получим

$$\begin{gathered} p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| - p'(y)q|q|^{p(y)-2}\ln|q| \leqslant \\ |p'(x)-p'(y)|\,|q|^{p(x)-1}|\ln|q|\,| + |p'(y)|\,|\ln|q|\,|\,\Big||q|^{p(x)-1} - |q|^{p(y)-1}\Big| \leqslant \\ K_p|x-y||q|^{p(x)-1}|\ln|q|\,| + \tilde K_p^2|x-y|\,|q|^{p(c)-1}\ln^2|q|, \end{gathered}$$

где

$$|q|^{p(x)-1} - |q|^{p(y)-1} = |q|^{p(c)-1}\ln|q|p'(c)(x-y) \leqslant \tilde K_p|q|^{p(c)-1}|\ln|q|\,|\,|x-y|,$$

c лежит между x и y, K_p — постоянная Липшица функции $p'(z)$, $|p'(z)| \leqslant \tilde K_p$. Таким образом, имеем

$$\begin{gathered} p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| - p'(y)q|q|^{p(y)-2}\ln|q|\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant \\ \hat K\left(\left[\beta|x-y|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}\right]^{p(x)-1}|\ln\beta|x-y|\,| + \left[\beta|x-y|^{\frac{p(c)}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}\ln^2\beta|x-y|\right), \end{gathered} \tag{23}$$

где $\hat K = \max\{K_p, K_p'^2\}$. Легко заметить, что (23) имеет такую же структуру как и (19). Используя рассуждения, приведённые для получения неравенства (22) из (19), получаем аналогично

$$p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| - p'(y)q|q|^{p(y)-2}\ln|q|\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant C_*\left[\beta|x-y|^\theta\right]^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-2\mu_1} \tag{24}$$

с некоторой постоянной C_*, порождаемой C^* и $\hat K$. Таким образом, в качестве функции ω в (13) можно взять $\omega(z) = C_* z^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-2\mu_1}$.

Рассмотрим теперь третий член в (6). Положим $F(t,x,u,q) = g(x)u|q|^s - u$. Предположим, что $g(x)$ непрерывна по Липшицу с постоянной K_{lip}, $s > \max_{z\in[-l,l]}p(z) - 1$. Покажем, что F удовлетворяет соотношению типа (22), (24) с теми же самыми θ и ω. Действительно,

$$F(t,y,u,\beta(x-y)) - F(t,x,u,\beta(x-y)) \leqslant K_{lip}|u|\beta^s|x-y|^s|x-y| \leqslant K_{lip}M\left(\beta|x-y|^{\frac{s+1}{s}}\right)^s,$$

где $\max|u| \leqslant M$, в предположении существования ограниченного решения. Положим $\theta = 1 + \frac{1}{s}$. Легко заметить, что при $s > \max_{c\in[-l,l]}p(c) - 1$ имеем, что θ удовлетворяет (20). Более того, так как $s > \max_{c\in[-l,l]}p(c) - 1 > \min_{c\in[-l,l]}p(c) - 1$, то

$$\begin{gathered} F(t,y,r,\beta(x-y)) - F(t,x,r,\beta(x-y)) \leqslant K_{lip}M\left(\beta|x-y|^{\frac{s+1}{s}}\right)^s \leqslant \\ K_{lip}M\left(\beta|x-y|^\theta\right)^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-2\mu_1}. \end{gathered}$$

Таким образом, мы показали, что построенная нами Φ удовлетворяет условию (13) с $\theta = 1 + 1/s$ и $\omega(z) = \hat C z^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-2\mu_1}$, $\hat C = \max\{C^*, C_*, K_{lip}M\}$.

2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

В этом параграфе мы получим априорные оценки классического решения регуляризованной задачи. Рассмотрим следующую регуляризацию исходного уравнения в области Ω_T:

$$u_t - \left((u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u_x\right)_x = f(t,x,u,u_x) - u, \tag{25}$$

где α — постоянная, $\alpha = r/m$ с положительными целыми r и m, $r < m$ и r — чётное число. Для такого α имеем $(z^\alpha)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} = |z|^{p(x)-2}$ Перепишем (25) в недивергентном виде

$$u_t - a_\varepsilon(x,u_x)u_{xx} = b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x) - u, \tag{26}$$

где

$$a_\varepsilon(x,z) = (z^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}-1}((p(x)-1)\,z^\alpha + \varepsilon),$$
$$b_\varepsilon(x,z) = \frac{1}{\alpha}p'(x)z(z^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(z^\alpha+\varepsilon).$$

Легко показать, что функция $a_\varepsilon(x,z)$ возрастает по ε. Также можно отметить, что из определения $a_\varepsilon(x,z)$ следует, что $a_\varepsilon(x,z) = a_\varepsilon(x,-z)$.

Наша цель — получить равномерные по ε априорные оценки классических решений регуляризованной задачи. Это даст возможность предельным переходом получить вязкое решение, гладкость которого указана в теоремах 1, 2.

Следующая лемма является простым следствием принципа максимума, применённого к задаче (26), (2), (3).

Лемма 2. *Для любого классического решения задачи* (26), (2), (3) *верна следующая оценка:*

$$M_1 \leqslant u(t,x) \leqslant M_2.$$

Перейдём к получению априорных оценок производной классического решения регуляризованной задачи.

Введём неубывающую, неотрицательную функцию $\psi(\rho) \in \mathbb{C}^1(0,+\infty)$ такую, что существуют постоянные q_0, q_1, которые удовлетворяют $\max\{1,K\} \leqslant q_0 < q_1 < +\infty$, и выполнено

$$\int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)} = M = \max\{M_2, M_2 - M_1, -M_1\}. \tag{27}$$

Положим

$$\tau(\kappa) = \int\limits_{\kappa}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)},$$

где параметр κ меняется в пределах $[q_0, q_1]$, а функция ψ определена в (27). Пусть

$$\tau_0 \equiv \tau(q_0) = \int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)}. \tag{28}$$

Введём функцию $\mathrm{h}(\tau)$ как решение следующей задачи:

$$\mathrm{h}'' + \psi(|\mathrm{h}'|) = 0, \quad \mathrm{h}(0) = 0, \quad \mathrm{h}(\tau_0) = M.$$

Легко видеть, что

$$\mathrm{h}(\tau(\kappa)) = \int\limits_{\kappa}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}.$$

Более того, $\mathrm{h}(\tau(q_0)) = M$ (в силу (27)). Заметим, что $\mathrm{h}'(\tau) \geqslant K$ для $\tau \in [0, \tau_0]$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (4), (7), (27). *Тогда для любого классического решения задачи* (26), (2), (3) *справедливы следующие оценки:*

$$|u(t,x)| \leqslant h(l-x) \quad \textit{в} \quad [0,T] \times \{[l-\tau_0, l] \cap [-l,l]\},$$

$$|u(t,x)| \leqslant h(x+l) \quad \textit{в} \quad [0,T] \times \{[-l,-l+\tau_0] \cap [-l,l]\}.$$

Доказательство. Начнём с первого неравенства. Введём следующий линейный оператор

$$\mathrm{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a_\varepsilon(x,u_x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1.$$

Тогда

$$\mathrm{L}u \equiv u_t - a_\varepsilon(x,u_x)u_{xx} + u = b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x)$$

и для $\zeta = l - x$

$$\mathrm{Lh}(\zeta) = -a_\varepsilon(x,u_x)\mathrm{h}_{xx}(\zeta) + \mathrm{h}(\zeta) = -a_\varepsilon(x,u_x)\mathrm{h}''(\zeta) + \mathrm{h}(\zeta).$$

Принимая во внимание, что $\mathrm{h}(\zeta) \geqslant 0$, получаем

$$\mathrm{Lh}(\zeta) \geqslant a_\varepsilon(x,u_x)\psi(\mathrm{h}'(\zeta)). \tag{29}$$

Таким образом, для функции

$$v(t,x) \equiv u(t,x) - \mathrm{h}(\zeta)$$

получаем

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u - \mathrm{Lh} \leqslant b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x) - a_\varepsilon(x,u_x)\psi(\mathrm{h}'(\zeta)). \tag{30}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u - \mathrm{Lh} = v_t - a_\varepsilon(x,u_x)v_{xx} + v. \tag{31}$$

Следовательно, из (30), (31) мы получаем

$$v_t - a_\varepsilon(x,u_x)v_{xx} + v \leqslant b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x) - a_\varepsilon(x,u_x)\psi(\mathrm{h}'(\zeta)). \tag{32}$$

Обозначим через

$$\Omega_T^{\tau_0} = \{t \in (0,T), x \in (l-\tau_0, l) \cap (-l,l)\}, \quad \Gamma_T^{\tau_0} = \partial\Omega_T^{\tau_0} \setminus \{t = T, x \in (l-\tau_0,l) \cap (-l,l)\},$$

где $\Gamma_T^{\tau_0}$ — параболическая граница области $\Omega_T^{\tau_0}$. Предположим, что в некоторой точке $N \in \overline{\Omega_T^{\tau_0}} \setminus \Gamma_T^{\tau_0}$, функция $v(t,x)$ достигает положительного максимума. В этой точке имеем $u > 0$, $v_t \geqslant 0$, $v_x = 0$, откуда следует $u_x = -\mathrm{h}'$ и $\mathrm{L}v\Big|_N > 0$. В то же время, в точке N мы имеем

$$v_t - a_\varepsilon(x,u_x)v_{xx} + v\Big|_N \leqslant b_\varepsilon(x,-\mathrm{h}') + f(t,x,u,-\mathrm{h}') - a_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\psi(\mathrm{h}'(\zeta))\Big|_N. \tag{33}$$

Так как $p(x) \in \mathbb{C}^1([-l,l])$ и $\mathrm{h}' \geqslant 1$, то

$$\begin{gathered}\Big|b_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\Big|\Big|_N = \\ \frac{1}{\alpha}|p'(x)|\,\mathrm{h}'((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)\Big|_N \leqslant \frac{1}{\alpha}|p'(x)|\,\mathrm{h}'((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}+1}\Big|_N.\end{gathered} \tag{34}$$

Можно заметить, что для любого $\mu > 0$ функция $\psi(\mathrm{h}'(\zeta)) = \mu\mathrm{h}'^2(\zeta)$ удовлетворяет (27) с определёнными q_0, q_1. Из представления функции $a_\varepsilon(x,z)$, взяв указанное ψ, легко получить, что для выполнения неравенства

$$\Big|b_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\Big|\Big|_N \leqslant a_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\psi(\mathrm{h}'(\zeta))\Big|_N \tag{35}$$

достаточно чтобы имело место неравенство (напомним, что $(-\mathrm{h}')^\alpha = (\mathrm{h}')^\alpha$)

$$\frac{1}{\alpha}|p'(x)|((\mathrm{h}')^\alpha+\varepsilon)\Big|_N \leqslant \mu \mathrm{h}'\Big|_N.$$

Что очевидно имеет место при $\frac{1}{\alpha}\max_{|x|\leqslant l}|p'(x)| < \mu$ и достаточно малых ε. Таким образом, из (7), (34) и (35) вытекает

$$v_t - a_\varepsilon(x,u_x)v_{xx} + v\Big|_N \leqslant b_\varepsilon(x,-\mathrm{h}') + f(t,x,u,-\mathrm{h}') - a_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\psi(\mathrm{h}'(\zeta))\Big|_N \leqslant 0, \qquad (36)$$

что противоречит тому, что v достигает положительного максимума внутри области.

Рассмотрим v на параболической границе $\Gamma_T^{\tau_0}$. Если $\tau_0 \geqslant 2l$, тогда $\Gamma_T^{\tau_0} = \Gamma_T$ — параболическая граница области $(0,T)\times(-l,l)$, и получаем

1. при $x = l$, $t\in[0,T]$: $v = 0$;
2. при $x = -l$, $t\in[0,T]$: $v = -\mathrm{h}(2l)\leqslant 0$;
3. при $t = 0$, $x\in[-l,l]$:

$$v = u_0(x) - \mathrm{h}(l-x) = u_0(x) - u_0(l) - (\mathrm{h}(l-x) - \mathrm{h}(0)) \leqslant (K - \mathrm{h}'(\xi))(l-x)\leqslant 0.$$

Если же $\tau_0 < 2l$, тогда $\Gamma_T^{\tau_0}$ состоит из двух частей: $\Gamma_{1T}^{\tau_0}$ и $\Gamma_{2T}^{\tau_0}$, где $\Gamma_{1T}^{\tau_0}\subset\Gamma_T$ и $\Gamma_{2T}^{\tau_0} = [0,T]\times\{x = l-\tau_0\}\in\Omega_T$. Учитывая, что $\mathrm{h}(\tau_0) = M$, получаем на новой части границы

4. $x = l-\tau_0$, $t\in[0,T]$: $v = u(t,x) - \mathrm{h}(\tau_0) = u(t,x) - M\leqslant 0$.

В итоге,

$$v(t,x)\leqslant 0 \quad \text{или} \quad u(t,x)\leqslant \mathrm{h}(l-x) \quad \text{в} \quad [0,T]\times[l-\tau_0,l]\cap[-l,l].$$

Перейдём к получению оценки снизу. Введём функцию $w(t,x)\equiv u(t,x)+\mathrm{h}(\zeta)$. Подобно (29)–(36) можно получить

$$w_t - a_\varepsilon(x,u_x)w_{xx} + w \geqslant b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x) + a_\varepsilon(x,u_x)\psi(\mathrm{h}'(\zeta)). \qquad (37)$$

Предположим, что в некоторой точке $N_1\in\overline{\Omega_T^{\tau_0}}\setminus\Gamma_T^{\tau_0}$ функция w достигает отрицательного минимума. Тогда в N_1 имеем $u<0$, $w_t\leqslant 0$, $w_x = 0$, откуда следует $u_x = \mathrm{h}'$ и $\mathrm{L}w\Big|_{N_1} < 0$. С другой стороны, используя (7), (34), (35), которые также имеют место при замене $-\mathrm{h}'$ на h', из (37) получаем

$$w_t - a_\varepsilon(x,u_x)w_{xx} + w\Big|_{N_1}\geqslant 0.$$

Это противоречит предположению о том, что $w(t,x)$ достигает отрицательного минимума в точке N_1. Как и при получении оценки сверху, если $\tau_0\geqslant 2l$, мы получаем

5. при $x = l$, $t\in[0,T]$: $w = 0$;
6. при $x = -l$, $t\in[0,T]$: $w = \mathrm{h}(2l)\geqslant 0$;
7. при $t = 0$, $x\in[-l,l]$:

$$w = u_0(x) + \mathrm{h}(l-x) = u_0(x) - u_0(l) + (\mathrm{h}(l-x) - \mathrm{h}(0)) \geqslant (-K + \mathrm{h}'(\xi))(l-x)\geqslant 0.$$

Если же $\tau_0 < 2l$, то на новой части границы

8. $x = l-\tau_0$, $t\in[0,T]$: $w = u(t,x) + \mathrm{h}(\tau_0) = u(t,x) + M\geqslant 0$.

Значит

$$w(t,x)\geqslant 0 \quad \text{или} \quad u(t,x)\geqslant -\mathrm{h}(l-x) \quad \text{в} \quad [0,T]\times[l-\tau_0,l]\cap[-l,l].$$

Отсюда мы заключаем, что

$$|u(t,x)| \leqslant \mathrm{h}(l-x) \quad \text{в} \quad [0,T]\times[l-\tau_0,l]\cap[-l,l].$$

Введём теперь функции $v_1(t,x)=u(t,x)-\mathrm{h}(\eta)$, $w_1(t,x)=u(t,x)+\mathrm{h}(\eta)$, где $\eta=l+x$. Действуя аналогично, получаем

$$|u(t,x)| \leqslant \mathrm{h}(l+x) \quad \text{в} \quad [0,T]\times[-l,-l+\tau_0]\cap[-l,l].$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Предположим, что все условия леммы* 3 *выполнены. Потребуем дополнительно выполнение* (8)–(10). *Тогда для любого классического решения задачи* (26), (2), (3) *имеет место следующая оценка:*

$$|u_x(t,x)| \leqslant h'(0)=q_1.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$u_t(t,x)-a_\varepsilon(x,u_x(t,x))u_{xx}(t,x)=b_\varepsilon(x,u_x(t,x))+f(t,x,u(t,x),u_x(t,x))-u(t,x), \tag{38}$$

$$u_t(t,y)-a_\varepsilon(y,u_y(t,y))u_{yy}(t,y)=b_\varepsilon(y,u_y(t,y))+f(t,y,u(t,y),u_y(t,y))-u(t,y), \tag{39}$$

где $x,y\in(-l,l)$. Вычитая уравнение (39) из (38), для

$$\mathrm{v}(t,x,y)\equiv u(t,x)-u(t,y)$$

получаем следующее соотношение:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}\mathrm{v}\equiv \mathrm{v}_t-a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{v}_{xx}-a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{v}_{yy}+\mathrm{v}=\\ b_\varepsilon(x,u_x(t,x))-b_\varepsilon(y,u_y(t,y))+f(t,x,u(t,x),u_x(t,x))-f(t,y,u(t,y),u_y(t,y)).\end{gathered} \tag{40}$$

Рассмотрим (40) в области

$$P_T(\tau_0)=\{(t,x,y): t\in(0,T);\, x,y\in(-l,l), 0<x-y<\tau_0\}.$$

Обозначим через $\Gamma_T(\tau_0)$ параболическую границу области $P_T(\tau_0)$:

$$\Gamma_T(\tau_0)=\partial P_T(\tau_0)\setminus\{(T,x,y): x,y\in(-l,l), 0<x-y<\tau_0\}.$$

Пусть $\tau_0<2l$. Положим

$$\mathrm{w}(t,x,y)=\mathrm{v}(t,x,y)-\mathrm{h}(x-y).$$

Для w из равенства (40) мы получаем следующее уравнение

$$\begin{gathered}\mathrm{w}_t-a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{xx}-a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{w}_{yy}+\mathrm{w}=\\ b_\varepsilon(x,u_x(t,x))-b_\varepsilon(y,u_y(t,y))+f(t,x,u(t,x),u_x(t,x))-f(t,y,u(t,y),u_y(t,y))+\\ (a_\varepsilon(x,u_x(t,x))+a_\varepsilon(y,u_y(t,y)))\mathrm{h}''-\mathrm{h},\end{gathered} \tag{41}$$

так как

$$\mathcal{L}\mathrm{h}=-(a_\varepsilon(x,u_x(t,x))+a_\varepsilon(y,u_y(t,y)))\mathrm{h}''+\mathrm{h}.$$

Предположим, что в некоторой точке $S\in\overline{P}_T(\tau_0)\backslash\Gamma_T(\tau_0)$ функция w достигает положительного максимума. С одной стороны, мы имеем

$$\mathrm{w}_t-a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{xx}-a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{w}_{yy}+\mathrm{w}\Big|_S>0, \tag{42}$$

с другой же стороны в этой точке имеют место следующие соотношения:

$$u_x(t,x)=u_y(t,y)=\mathrm{h}',\quad u(t,x)-u(t,y)\geqslant \mathrm{h}(x-y).$$

Из (41), используя (34), (35), равенство $\mathrm{h}''+\psi(|\mathrm{h}'|)=0$ и выбор функции ψ, мы получаем

$$\begin{gathered}\mathrm{w}_t-a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{xx}-a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{w}_{yy}+\mathrm{w}\Big|_S\leqslant\\ f(t,x,u(t,x),\mathrm{h}')-f(t,y,u(t,y),\mathrm{h}')\Big|_S.\end{gathered}\tag{43}$$

Чтобы получить противоречие с неравенством (42), необходимо показать, что

$$f(t,x,u(t,x),\mathrm{h}')-f(t,y,u(t,y),\mathrm{h}')\Big|_S\leqslant 0.\tag{44}$$

Положим $S=(t_0,x_0,y_0)$. Представим (44) в следующем виде:

$$\begin{gathered}f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))-f(t_0,y_0,u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))=\\ \left[f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))-f(t_0,y_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))\right]+\\ \left[f(t_0,y_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))-f(t_0,y_0,u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))\right].\end{gathered}\tag{45}$$

Используя (8), (9), из (45) получим

$$\begin{gathered}f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))-f(t_0,y_0,u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))\leqslant\\ \Big[K_1\big(t_0,x_0,y_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)\big)(x_0-y_0)-\\ \gamma\big(t_0,x_0,u(t_0,x_0),u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)\big)(u(x_0)-u(y_0))\Big].\end{gathered}\tag{46}$$

В точке максимума

$$u(t_0,x_0)-u(t_0,y_0)>\mathrm{h}(x_0-y_0)=\mathrm{h}(x_0-y_0)-\mathrm{h}(0)=\mathrm{h}'(\xi)(x_0-y_0),\tag{47}$$

где $\xi\in(0,x_0-y_0)$. Функция h' удовлетворяет неравенству $q_0\leqslant\mathrm{h}'\leqslant q_1$. Используя (9), (10), (47), неравенство (46) можно переписать в виде (ниже, для удобства, мы опустим аргументы у K_1 и γ)

$$\begin{gathered}f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))-f(t_0,y_0,u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))\leqslant\left[K_1-\gamma\mathrm{h}'(\xi)\right](x_0-y_0)\leqslant\\ \left[\gamma C\mathrm{h}'^{\nu}(x_0-y_0)-\gamma\mathrm{h}'(\xi)\right](x_0-y_0)\leqslant\gamma\left[C\,q_1^{\nu}-q_0\right](x_0-y_0)\leqslant 0\end{gathered}\tag{48}$$

при условии, что

$$C\,q_1^{\nu}-q_0\leqslant 0.\tag{49}$$

Заметим, что из (27) и выбора функции ψ вытекает, что при $\nu<1$ и любом C можно подобрать достаточно большое q_0 так, чтобы (49) имело место. Действительно, из (27) вытекает $q_1=e^{\mu M}q_0$. Откуда получаем, что (49) имеет место при $q_0\geqslant\left(Ce^{\mu M\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}$. Таким образом, $\tilde{L}W\Big|_{Q_0}<0$, что противоречит (42). Следовательно, w не может достигать положительного максимума внутри $P_T(\tau_0)$.

Рассмотрим $\Gamma_T(\tau_0)$. Из леммы 3 следует, что

1. при $y=-l$, $x\in[-l,-l+\tau_0]$, $t\in[0,T]$

$$\mathrm{w}=u(t,x)-\mathrm{h}(x+l)\leqslant 0;$$

2. при $x = l$, $y \in [l - \tau_0, l]$, $t \in [0, T]$

$$\mathrm{w} = -u(t, y) - \mathrm{h}(l - y) \leqslant 0;$$

3. при $x = y \in [-l, l]$, $t \in [0, T]$ имеем $\mathrm{w} = 0$, и при $x - y = \tau_0$ таких, что x, $y \in [-l, l]$

$$\mathrm{w} = u(t, x) - u(t, y) - \mathrm{h}(\tau_0) \leqslant 0,$$

используя (27) и параметрическое представление функции h;

4. при $t = 0$, x, $y \in [-l, l]$, получаем

$$\mathrm{w} = u_0(x) - u_0(y) - \mathrm{h}(x - y) \leqslant 0,$$

где последнее неравенство является следствием (4) и того, что $\mathrm{h}' \geqslant q_0 \geqslant K$.

Таким образом, мы заключаем, что $\mathrm{w} \leqslant 0$ в $\overline{P}_T(\tau_0)$ и, как следствие,

$$u(t, x) - u(t, y) \leqslant \mathrm{h}(x - y) \quad \text{в} \quad \overline{P}_T(\tau_0).$$

Аналогичный результат легко получить подобным же образом и в случае $\tau_0 \geqslant 2l$. В этом случае $\overline{P}_T(\tau_0)$ и $\Gamma_T(\tau_0)$ примут вид

$$P_T(\tau_0) = \{(t, x, y) : t \in (0, T);\ x, y \in (-l, l), 0 < x - y\},$$

$$\Gamma_T(\tau_0) = \partial P_T(\tau_0) \setminus \{(T, x, y) : x, y \in (-l, l), 0 < x - y\}.$$

Определим теперь функцию

$$\mathrm{v}_1 = u(t, y) - u(t, x).$$

Вычитая теперь (38) из (39), аналогично (40), получаем

$$\begin{gathered}\mathrm{v}_{1t} - a_\varepsilon(x, u_x(t, x))\mathrm{v}_{1xx} - a_\varepsilon(y, u_y(t, y))\mathrm{v}_{1yy} + \mathrm{v}_1 = \\ b_\varepsilon(y, u_y(t, y)) - b_\varepsilon(x, u_x(t, x)) + f(t, y, u(t, y), u_y(t, y)) - f(t, x, u(t, x), u_x(t, x)).\end{gathered} \tag{50}$$

Пусть $\tau_0 < 2l$. Рассмотрим (50) в области $P_T(\tau_0)$ и введём функцию

$$\mathrm{w}_1 = u(t, y) - u(t, x) - \mathrm{h}(x - y).$$

Подобно (41), используя неотрицательность функции h, получим

$$\mathrm{w}_{1t} - a_\varepsilon(x, u_x(t, x))\mathrm{w}_{1xx} - a_\varepsilon(y, u_y t, y))\mathrm{w}_{1yy} + \mathrm{w}_1 \leqslant$$

$$b_\varepsilon(y, u_y(t, y)) - b_\varepsilon(x, u_x(t, x)) + f(t, y, u(t, y), u_y(t, y)) - f(t, x, u(t, x), u_x(t, x)) +$$

$$(a_\varepsilon(x, u_x(t, x)) + a_\varepsilon(y, u_y(t, y))\mathrm{h}''.$$

Предположим, что в некоторой точке $S_1 \in \overline{P}_T(\tau_0) \setminus \Gamma_T(\tau_0)$ функция w_1 достигает положительного максимума. В этой точке $\mathrm{w}_{1y} = \mathrm{w}_{1x} = 0$ или

$$\begin{gathered}u_x(t, x) = u_y(t, y) = -\mathrm{h}', \quad u(t, y) - u(t, x) \geqslant \mathrm{h}(x - y), \\ \mathrm{w}_{1t} - a_\varepsilon(x, u_x(t, x))\mathrm{w}_{1xx} - a_\varepsilon(y, u_y(t, y))\mathrm{w}_{1yy} + \mathrm{w}_1 > 0.\end{gathered} \tag{51}$$

Используя (34), (35), равенство $\mathrm{h}'' + \psi(|\mathrm{h}'|) = 0$ и выбор функции ψ, аналогично (43), получаем

$$\mathrm{w}_{1t} - a_\varepsilon(x, u_x(t, x))\mathrm{w}_{1xx} - a_\varepsilon(y, u_y(t, y))\mathrm{w}_{1yy} + \mathrm{w}_1\Big|_{S_1} \leqslant$$

$$-f(t,x,u(t,x),\mathrm{h}') + f(t,y,u(t,y),\mathrm{h}')\Big|_S.$$

Действуя так же, как в (44)–(49), получаем, что

$$\mathrm{w}_{1t} - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{1xx} - a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{w}_{1yy} + \mathrm{w}_1\Big|_{S_1} \leqslant 0,$$

что противоречит (51). Следовательно, w_1 не может достигать положительного максимума внутри $P_T(\tau_0)$. Подобно предыдущим рассмотрениям можно показать, что $\mathrm{w}_1(t,x,y) \leqslant 0$ на $\Gamma_T(\tau_0)$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что $\mathrm{w}_1 \leqslant 0$ в $\overline{P}_T(\tau_0)$ и, следовательно,

$$|u(t,x) - u(t,y)| \leqslant \mathrm{h}(x-y) \quad \text{в} \quad \overline{P}_T(\tau_0).$$

Аналогично рассматривается случай $\tau_0 \geqslant 2l$.

Для случая $x < y$, в силу симметрии переменных x и y, можно в точности применить все предыдущие рассуждения. В итоге получаем, что при

$$x,y \in [-l,l], \quad |x-y| \leqslant \tau_0, \quad t \in [0,T]$$

имеет место неравенство

$$|u(t,x) - u(t,y)| \leqslant \mathrm{h}(|x-y|),$$

из которого вытекает требуемая оценка. Лемма доказана. □

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Существование глобального классического решения задачи (26), (2), (3) вытекает из полученных в предыдущем параграфе априорных оценок [39]. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ монотонная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю при $k \to \infty$. Получим вязкое решение задачи (1)–(3) как предел классических решений u_{ε_k} задачи (26), (2), (3) при $k \to \infty$. Но прежде сформулируем лемму, которая является классическим результатом теории параболических уравнений [40] (см. также [41]).

Лемма 5. *Для любого классического решения задачи* (26), (2), (3) *выполняется следующее неравенство:*

$$|u_{\varepsilon_k}(t+h,x) - u_{\varepsilon_k}(t,x)| \leqslant Ch^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < h < 1, \quad t,\, t+h \in [0,T],$$

где постоянная C зависит от M_1, M_2, K, K_1, γ, $\max|b_\varepsilon(x,u_x)+f(t,x,u,u_x)-u|$, где максимум берётся по множеству $\bar\Omega_T \times [M_1,M_2] \times q$, где $q_0 \leqslant |q| \leqslant q_1$.

Заметим, что равномерная непрерывность по Гёльдеру классических решений задачи (26), (2), (3) нам необходима для доказательства их равномерной сходимости при доказательстве существования вязкого решения исходной задачи.

Доказательство теоремы 1. Для упрощения обозначений мы опустим индекс k и будем писать ε и $\varepsilon \to 0$. Как известно [18], гладкая функция является вязким решением уравнения тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ему в классическом смысле. Таким образом, классическое решение u_ε регуляризованной задачи (26), (2), (3) является также и вязким решением той же самой задачи. Напомним, что функция Φ определена в (6):

$$\Phi(t,x,u,q,X) = (p(x)-1)|q|^{p(x)-2}X + p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| + f(t,x,u,q) - u.$$

Обозначим через

$$\Phi_\varepsilon(t,x,u,q,X) = (|q|^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}-1}((p(x)-1)q^\alpha+\varepsilon)X+$$

$$\frac{1}{\alpha}p'(x)q(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon)+f(t,x,u,q)-u,$$

где $(q,X)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Одним из стандартных свойств вязких решений является следующее утверждение [18] (в нашем случае $n=1$).

Лемма 6 (Свойство устойчивости). *Пусть*

$$\Phi_\varepsilon(t,x,u,p,X):\mathcal{G}=\Omega_T\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n\mapsto\mathbb{R}$$

непрерывна на $\mathcal{G}$, где $\mathbb{S}^n$ — пространство симметричных $n\times n$ матриц, и u_ε непрерывна на $\overline{\Omega}_T$. Пусть u_ε — вязкое решение уравнения

$$u_t-\Phi_\varepsilon(t,x,u,\nabla u,\nabla^2u)=0 \quad \text{в} \quad \Omega_T \quad \text{при} \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,$$

$\Phi_\varepsilon(t,x,r,p,X)\to\Phi(t,x,r,p,X)$ равномерно на компактных подмножествах $\mathcal{G}$, а $u_\varepsilon\to u$ равномерно на компактных подмножествах Ω_T при $\varepsilon\to0$. Тогда u является вязким решением уравнения

$$u_t-\Phi(t,x,u,\nabla u,\nabla^2u)=0 \quad \text{в} \quad \Omega_T.$$

Из лемм 3, 5 мы получаем существование непрерывной функции $u(t,x)$ такой, что $u_\varepsilon\to u$ равномерно на компактных подмножествах Ω_T. Покажем, что на каждом компактном подмножестве $\mathcal{G}$ функция Φ_ε сходится равномерно к Φ. Действительно, положим

$$\Phi_{1\varepsilon}(t,x,r,q,X)=(|q|^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}-1}((p(x)-1)q^\alpha+\varepsilon)X+\frac{1}{\alpha}p'(x)q(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon),$$

$$\Phi_1(t,x,r,q,X)=(p(x)-1)|q|^{p(x)-2}X+p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q|.$$

Сходимость $\Phi_\varepsilon\to\Phi$ очевидно эквивалентна сходимости $\Phi_{1\varepsilon}\to\Phi_1$. Легко видеть, что $\Phi_{1\varepsilon}\to\Phi_1$ на каждом компактном подмножестве $\mathcal{G}$ при $\varepsilon\to0$. Для того, чтобы доказать равномерную сходимость $\Phi_{1\varepsilon}\to\Phi_1$, покажем, что имеют место следующие равномерные сходимости:

$$(|q|^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}-1}((p(x)-1)q^\alpha+\varepsilon)X\rightrightarrows(p(x)-1)|q|^{p(x)-2}X, \tag{52}$$

$$(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\rightrightarrows|q|^{p(x)-2}\ln|q| \tag{53}$$

на произвольных компактах по переменным (x,q,X).

Заметим, что $\Phi_{1\varepsilon}$ и Φ_1 — непрерывные функции. Равномерная сходимость в (52) вытекает из того, что $a_\varepsilon(x,q)$ является монотонной по ε. Для того, чтобы показать (53), рассмотрим разность

$$(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-|q|^{p(x)-2}\ln|q|$$

и покажем, что она равномерно стремится к нулю. Для этого запишем её в виде

$$(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-|q|^{p(x)-2}\ln|q|=$$

$$(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\left[\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-\ln|q|\right]+\left[(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}-|q|^{p(x)-2}\right]\ln|q|.$$

Положим для удобства

$$A_\varepsilon=(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\left[\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-\ln|q|\right],\quad B_\varepsilon=\left[(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}-|q|^{p(x)-2}\right]\ln|q|.$$

Легко заметить, что функция A_ε является монотонной функцией по ε при любых фиксированных (x,q), следовательно, $A_\varepsilon \rightrightarrows 0$. Что касается B_ε, то она является монотонной при любых фиксированных (x,q), $|q|<1$ и (x,q), $|q|\geqslant 1$. Следовательно, и $B_\varepsilon \rightrightarrows 0$.

Принимая во внимание свойство устойчивости вязких решений, начально-краевые условия (2), (3), заключаем, что $u=\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ является вязким решением задачи (1)–(3). Из равномерных по ε оценок, полученных в леммах 3 и 5, вытекает, что построенное решение является непрерывным по Гёльдеру по времени с показателем $\frac{1}{2}$ и непрерывным по Липшицу по пространственной переменной в Ω_T. Теорема 1 доказана. $\square$

Условия (12)–(14) гарантируют выполнение теоремы сравнения для вязких суб- и суперрешений задачи (1)–(3), указанной в теореме 2 гладкости (см. [18], гл.8, теорема 8.2). Следовательно, при выполнении указанных условий полученное решение является единственным. Теорема 2 доказана.

Замечание (о полной липшицевости вязких решений). Рассмотрим уравнение (1) в случае, когда f не зависит от t:

$$u_t-(|u_x|^{p(x)-2}u_x)_x=f(x,u,u_x)-u \quad \text{в} \quad \Omega_T=(0,T)\times(-l,l). \tag{54}$$

Для того, чтобы доказать липшицевость по переменной t необходимо доказать соответствующие априорные оценки классического решения регуляризованной задачи [36]. Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось

$$\max_{|x|<l}\left(|u_{0x}|^{p(x)-2}u_{0x})_x\right|<\infty, \tag{55}$$

а также условие

$$f(x,u_2,q)-f(x,u_1,q)-u_2+u_1\leqslant 0, \quad u_2>u_1,$$

которое в нашем случае имеет место при выполнении (9). Следующие теоремы является прямым следствием результата статьи [36].

Теорема 3. *Пусть в дополнении к условиям теоремы 1 выполнено условие* (55). *Тогда для произвольного* $T>0$, *существует вязкое непрерывное по Липшицу решение* $u(t,x)$ *задачи* (54), (2), (3) *и*

$$M_1\leqslant u\leqslant M_2, \quad ||u_x||_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_T)}\leqslant q_1.$$

Теорема 4. *Пусть в дополнении к условиям теоремы 2 выполнено условие* (55). *Тогда для произвольного* $T>0$, *существует единственное вязкое непрерывное по Липшицу решение* $u(t,x)$ *задачи* (54), (2), (3) *и*

$$M_1\leqslant u\leqslant M_2, \quad ||u_x||_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_T)}\leqslant q_1.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0008). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Acerbi E., Mingione G.* Regularity results for stationary electro-rheological fluids // Arch. Ration. Mech. Anal. 2002. V. 164. P. 213–259.
2. *Antontsev S. N., Rodrigues J. F.* On stationary thermo-rheological viscous flows // Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII Sci. Mat. 2006. V. 52, N 1. P. 19–36.
3. *Rajagopal K., Ružička M.* Mathematical modelling of electro-rheological fluids // Contin. Mech. Thermodyn. 2001. V. 13. P. 59–78.
4. *Ružička M.* Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Berlin: Springer, 2000.
5. *Aboulaicha R., Meskinea D., Souissia A.* Regularity results for stationary electro-rheological fluids // Arch. Ration. Mech. Anal. 2002. V. 164. P. 213–259.
6. *Chen Y., Levine S., Rao M.* Variable exponent, linear growth functionals in image restoration // SIAM J. Appl. Math. 2006. V. 66, N 4. P. 1383–1406.
7. *Antontsev S., Shmarev S.* Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up. Paris: Atlantis Press. 2015.
8. *Arora R., Shmarev S.* Strong solutions of evolution equations with $p(x,t)$-Laplacian: Existence, global higher integrability of the gradients and second-order regularity // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 493, N 1. P. 1–31.
9. *Arora R., Shmarev S.* Existence and regularity results for a class of parabolic problems with double phase flux of variable growth // Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. AMat. 2023. V. 117, N 34. P. 1–48.
10. *Belloni M., Kawohl B.* The pseudo-p-Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as $p \to \infty$ // ESAIM: Control Optim. Calc. Variations. 2004. V. 10, N 1. P. 28–52.
11. *Birindelli I., Demengel F.* Existence and regularity results for fully nonlinear operators on the model of the pseudo Pucci's operators // J. Elliptic Parabol. Equ. 2016. V. 2. P. 171–187.
12. *Demengel F.* Lipschitz interior regularity for the viscosity and weak solutions of the pseudo p-Laplacian equation // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 21, N 3. P 373–400.
13. *Juutinen P.* On the definition of viscosity solutions for parabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129, N 10. P. 2907-–2911.
14. *Tersenov Ar. S.* Viscosity subsolutions and supersolutions for non-uniformly and degenerate elliptic equations // Arch. Math. 2009. V. 45, N 1. P. 19-–35.
15. *Juutinen P., Lindqvist P., Manfredi J. J.* On the equivalence of the viscosity solutions and weak solutions for a quasilinear equation // SIAM J. Math. Anal. 2001. V. 33, N 3. P. 699–717.
16. *Medina M., Ochoa P.* On viscosity and weak solutions for non-homogeneous p-Laplace equations // Adv. Nonlinear Anal. 2019. V. 8, N 1. P. 468–481.
17. *Siltakoski J.* Equivalence of viscosity and weak solutions for a p-parabolic equation // J. Evol. Equ. 2021. V. 21, N 4. P. 2047–2080.
18. *Dall'Aglio A., Giachetti D., Segura de Leon S.* Global existence for parabolic problems involving the p-Laplacian and a critical gradient term // Indiana Univ. Math. J. 2009, V. 58, N 1. P. 1–48.
19. *Dall'Aglio A., De Cicco V., Giachetti D., Puel J.-P.* Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains // NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2004. V. 11, N 4. P. 431–450.
20. *Nakao M., Chen C.* Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m-Laplacian type with a nonlinear convection term // J. Differ. Equ. 2000. V. 162, N 1. P. 224–250.
21. *Figueiredo D. G., Sanchez J., Ubilla P.* Quasilinear equations with dependence on the gradient // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. 2009. V. 71, N 10. P. 4862–4868.
22. *Iturriaga L., Lorca S., Sanchez J.* Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a p-gradient term // NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2008. V. 15, N 6. P. 729–743.
23. *Li J., Yin J, Ke Y.* Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 383, N 1. P. 147–158.
24. *Ruiz D.* A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems // J. Differ. Equ. 2004. V. 199, N 1. P. 96–114.

25. *Zou H. H.* A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2008. V. 33, N 4. P. 417–437.
26. *Dwivedi G., Gupta S.* An existence result for p-Laplace equation with gradient nonlinearity in $\mathbb{R}^N$ // Commun. Math. 2022. V. 30, N 1. P. 149–159.
27. *Leonori T., Porretta A., Riey G.* Comparison principles for p-Laplace equations with lower order terms // Ann. di Mat. Pura ed Appl. V. 196, N 3. P. 877–903.
28. *Bendahmane M., Karlsen K. H.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data // Potential Anal. 2005. V. 22, N 3. P. 207–227.
29. *Fu Y., Pan N.* Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 362, N 2. P. 313–326.
30. *Zhan H.* On anisotropic parabolic equations with a nonlinear convection term depending on the spatial variable // Adv. Differ. Equ. 2019. V. 2019, N 27. P. 1–26.
31. *Zhao J.* Existence and nonexistence of solutions for $u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$ // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 172, N 1. P. 130–146.
32. *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* Existence results for anisotropic quasilinear parabolic equations with time-dependent exponents and gradient term // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 480, N 1. P. 1–18.
33. *Терсенов Ар. С.* Разрешимость задачи Дирихле для анизотропных параболических уравнений в невыпуклых областях // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 1. С. 131–146.
34. *Терсенов Ар. С.* О существовании вязких решений анизотропных параболических уравнений с переменным показателем анизотропности // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 4. С. 206–220.
35. *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* The problem of Dirichlet for evolution one-dimensional p-Laplacian with nonlinear source // J. Math. An. Appl. 2008. V. 340, N 2. P. 1109–1119.
36. *Tersenov Al. S.* The one-dimensional parabolic $p(x)$-Laplace equation // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2016. V. 23, N 27. P. 1–11.
37. *Wang L.* On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equation I // Comm. Pure. Appl. Math. 1992. V. 45. P. 27–76.
38. *Crandall M., Ishii H., Lions P.-L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 27, N 1. P. 1–67.
39. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
40. *Gilding B. H.* Hølder continuity of solutions of parabolic equations // J. London Math. Soc. 1976. V. 13, N 1. P. 103–106.
41. *Kruzhkov S. N.* Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables // Trudy Sem. Petrovsk. 1979. V. 5. P. 217–272.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

ON EXISTENCE OF VISCOSITY SOLUTIONS FOR EVOLUTION $p(x)$-LAPLACE EQUATION WITH ONE SPATIAL VARIABLE

© 2024 Ar. S. Tersenov

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

Received 06.11.2023, revised 17.09.2024, accepted 06.11.2024

Abstract. In this paper, we study the first boundary value problem for $p(x)$-Laplacian with one spatial variable in the presence of gradient terms that do not satisfy the Bernstein—Nagumo condition. A class of gradient nonlinearities is defined, for which the existence of a viscosity solution that is Lipschitz continuous in x and Hölder continuous in t is proven.

Keywords: $p(x)$-Laplace equation, Bernstein—Nagumo type condition, viscosity solutions, a priori estimates.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.409

REFERENCES

1. E. Acerbi and G. Mingione, "Regularity results for stationary electro-rheological fluids," Arch. Ration. Mech. Anal. **164**, 213–259 (2002).
2. S. N. Antontsev and J. F. Rodrigues, "On stationary thermo-rheological viscous flows," Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII Sci. Mat. **52** (1), 19–36 (2006).
3. K. Rajagopal and M. Ružička, "Mathematical modelling of electro-rheological fluids," Contin. Mech. Thermodyn. **13**, 59–78 (2001).
4. M. Ružička, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory* (Springer, Berlin, 2000).
5. R. Aboulaicha, D. Meskinea, and A. Souissia, "Regularity results for stationary electro-rheological fluids," Arch. Ration. Mech. Anal. **164**, 213–259 (2002).
6. Y. Chen, S. Levine, and M. Rao, "Variable exponent, linear growth functionals in image restoration," SIAM J. Appl. Math. **66** (4), 1383–1406 (2006).
7. S. Antontsev and S. Shmarev, *Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up* (Atlantis Press, Paris, 2015).
8. R. Arora and S. Shmarev, "Strong solutions of evolution equations with $p(x,t)$-Laplacian: Existence, global higher integrability of the gradients and second-order regularity," J. Math. Anal. Appl. **493** (1), 1–31 (2020).
9. R. Arora and S. Shmarev, "Existence and regularity results for a class of parabolic problems with double phase flux of variable growth," Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. AMat. **117** (34), 1–48 (2023).
10. M. Belloni and B. Kawohl, "The pseudo-p-Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as $p \to \infty$," ESAIM: Control Optim. Calc. Var. **10** (1), 28–52 (2004).
11. I. Birindelli and F. Demengel, "Existence and regularity results for fully nonlinear operators on the model of the pseudo Pucci's operators," J. Elliptic Parabol. Equat. **2**, 171–187 (2016).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 887–905.

12. F. Demengel, “Lipschitz interior regularity for the viscosity and weak solutions of the pseudo p-Laplacian equation,” Adv. Differ. Equat. **21** (3), 373–400 (2016).
13. P. Juutinen, “On the definition of viscosity solutions for parabolic equations,” Proc. Am. Math. Soc. **129** (10), 2907–2911 (2001).
14. Ar. S. Tersenov, “Viscosity subsolutions and supersolutions for non-uniformly and degenerate elliptic equations,” Arch. Math. **45** (1), 19–35 (2009).
15. P. Juutinen, P. Lindqvist, and J. J. Manfredi, “On the equivalence of the viscosity solutions and weak solutions for a quasilinear equation,” SIAM J. Math. Anal. **33** (3), 699–717 (2001).
16. M. Medina and P. Ochoa, “On viscosity and weak solutions for non-homogeneous p-Laplace equations,” Adv. Nonlinear Anal. **8** (1), 468–481 (2019).
17. J. Siltakoski, “Equivalence of viscosity and weak solutions for a p-parabolic equation,” J. Evol. Equat. **21** (4), 2047–2080 (2021).
18. A. Dall’Aglio, D. Giachetti, and S. Segura de Leon, “Global existence for parabolic problems involving the p-Laplacian and a critical gradient term,” Indiana Univ. Math. J. **58** (1), 1–48 (2009).
19. A. Dall’Aglio, V. De Cicco, D. Giachetti, and J.-P. Puel, “Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains,” NoDEA Nonlinear Differ. Equat. Appl. **11** (4), 431–450 (2004).
20. M. Nakao and C. Chen, “Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m-Laplacian type with a nonlinear convection term,” J. Differ. Equat. **162** (1), 224–250 (2000).
21. D. G. Figueiredo, J. Sanchez, and P. Ubilla, “Quasilinear equations with dependence on the gradient,” Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. **71** (10), 4862–4868 (2009).
22. L. Iturriaga, S. Lorca, and J. Sanchez, “Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a pgradient term,” NoDEA Nonlinear Differ. Equat. Appl. **15** (6), 729–743 (2008).
23. J. Li, J. Yin, and Y. Ke, “Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term,” J. Math. Anal. Appl. **383** (1), 147–158 (2011).
24. D. Ruiz, “A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems,” J. Differ. Equat. **199** (1), 96–114 (2004).
25. H. H. Zou, “A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations,” Calc. Var. Partial Differ. Equat. **33** (4), 417–437 (2008).
26. G. Dwivedi and S. Gupta, “An existence result for p-Laplace equation with gradient nonlinearity in $\mathbb{R}^N$,” Commun. Math. **30** (1), 149–159 (2022).
27. T. Leonori, A. Porretta, and G. Riey, “Comparison principles for p-Laplace equations with lower order terms,” Ann. Mat. Pura Appl. **196** (3), 877–903 (2017).
28. M. Bendahmane and K. H. Karlsen, “Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data,” Potential Anal. **22** (3), 207–227 (2005).
29. Y. Fu and N. Pan, “Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth,” J. Math. Anal. Appl. **362** (2), 313–326 (2010).
30. H. Zhan, “On anisotropic parabolic equations with a nonlinear convection term depending on the spatial variable,” Adv. Differ. Equat. **2019** (27), 1–26 (2019).
31. J. Zhao, “Existence and nonexistence of solutions for $u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$,” J. Math. Anal. Appl. **172** (1), 130–146 (1993).
32. Al. S. Tersenov and Ar. S. Tersenov, “Existence results for anisotropic quasilinear parabolic equations with time-dependent exponents and gradient term,” J. Math. Anal. Appl. **480** (1), 1–18 (2019).
33. Ar. S. Tersenov, “Solvability of the Dirichlet problem for anisotropic parabolic equations in non-convex domains,” Sib. Zh. Ind. Mat. **25** (1), 131–146 (2022) [in Russian].
34. Ar. S. Tersenov, “On the existence of viscous solutions of anisotropic parabolic equations with a variable anisotropy exponent,” Sib. Zh. Ind. Mat. **25** (4), 206–220 (2022) [in Russian].
35. Al. S. Tersenov and Ar. S. Tersenov, “The problem of Dirichlet for evolution one-dimensional p-Laplacian with nonlinear source,” J. Math. An. Appl. **340** (2), 1109–1119 (2008).
36. Al. S. Tersenov, “The one-dimensional parabolic $p(x)$-Laplace equation,” Nonlinear Differ. Equat. Appl. **23** (27), 1–11 (2016).

37. L. Wang, "On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equation I," Commun. Pure. Appl. Math. **45**, 27–76 (1992).

38. M. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, "User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations," Bull. Am. Math. Soc. **27** (1), 1–67 (1992).

39. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].

40. B. H. Gilding, "Hölder continuity of solutions of parabolic equations," J. London Math. Soc. **13** (1), 103–106 (1976).

41. S. N. Kruzhkov, "Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables," Tr. Semin. Petrovskogo **5**, 217–272 (1979) [in Russian].