

УДК 517.958

РАВНОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА—ФОЙГТА С УЧЁТОМ ПАМЯТИ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

© 2024 М. В. Турбин^а, А. С. Устюжанинова^б*Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, г. Воронеж 394018, Россия*E-mails: ^аmrmike@mail.ru, ^бnastyzhka@gmail.comПоступила в редакцию 30.01.2024 г.; после доработки 20.11.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

Работа посвящена исследованию качественного поведения решений модели Кельвина—Фойгта с учётом памяти вдоль траекторий движения жидкости. А именно, для рассматриваемой модели в неавтономном случае на основе теории аттракторов неинвариантных пространств траекторий доказывается существование равномерного траекторного и равномерного глобального аттракторов при выполнении некоторых условий на коэффициенты.

Ключевые слова: равномерный аттрактор, пространство траекторий, модель Кельвина—Фойгта, память вдоль траекторий движения жидкости, экспоненциальная оценка.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.410

Известно, что основные свойства динамики системы содержатся в её аттракторе — множестве в фазовом пространстве системы в определённом смысле притягивающем её траектории. Зачастую аттракторы исследуются для автономных систем уравнений, описывающих процессы, закон эволюции которых не меняется со временем. При этом в приложениях встречаются ситуации, когда закон эволюции меняется. Соответствующие математические модели включают коэффициенты или операторы, зависящие от времени, т. е. эволюция описывается неавтономными уравнениями. В неавтономном случае рассматривают так называемые равномерные аттракторы системы траекторных пространств.

В данной работе на основе теории аттракторов неинвариантных пространств траекторий [1–4] исследуются вопросы существования равномерных аттракторов для модели Кельвина—Фойгта с учётом памяти вдоль траекторий движения жидкости при выполнении некоторых условий на коэффициенты задачи. О других подходах к теории равномерных аттракторов см. обзорную статью [5].

Разрешимость начально-краевой задачи на конечном отрезке для рассматриваемой модели установлена в [6]. Существование траекторных и глобальных аттракторов для автономного случая рассматриваемой модели (правая часть не зависит от времени) доказано в работе [7]. В данной же работе мы рассматриваем неавтономный случай, то есть правая часть рассматриваемой задачи зависит от времени. Это меняет тип рассматриваемых аттракторов, поэтому результаты работ [6, 7] напрямую не могут быть перенесены на рассматриваемый случай. Основным результатом работы являются теорема существования минимального равномерного траекторного аттрактора и теорема существования равномерного глобального аттрактора.

Система уравнений, соответствующая рассматриваемой модели в выпуклой области Ω с

гладкой границей на промежутке времени $[0, T]$, имеет вид (см. [6])

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \operatorname{Div} \left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k} \right) - \\ - 2 \operatorname{Div} \int_0^t \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \mathcal{E}(v)(s, z(s, t, x)) ds + \nabla p = f; \\ \operatorname{div} v = 0, \quad (t, x) \in Q_T = [0, T] \times \Omega; \end{aligned} \quad (1)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad 0 \leq t, \tau \leq T, \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Здесь v — вектор скорости жидкости, p — давление, f — вектор плотности внешних сил, $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформаций:

$$\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Константы $\nu > 0, \varkappa > 0$ — вязкость и время ретардации, соответственно, $\beta_i, \alpha_i, i = \overline{1, L}$ — некоторые константы. Исходя из физического смысла предполагается, что $\alpha_i > 0, i = \overline{1, L}$. Функция $z(\tau; t, x)$ — траектория движения жидкости, соответствующая полю скоростей v .

Система (1)–(2) дополняется начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0} = a(x), \quad x \in \Omega, \quad v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = 0. \quad (3)$$

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Приведём необходимые сведения из теории аттракторов [2–4]. Пусть E, E_0 — банаховы пространства, E рефлексивно и вложение $E \subset E_0$ непрерывно. Пусть $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ функций со значениями в E_0 .

Лемма 1. Последовательность $\{u_m\} \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ сходится к $u \in C(\mathbb{R}_+; E_0)$ тогда и только тогда, когда $\{u_m\}$ сходится к u равномерно на любом отрезке $[0, T], [0, T] \subset \mathbb{R}_+$.

Пусть $\Pi_M, M \geq 0$ — оператор сужения функций, заданных на $\mathbb{R}_+$, на отрезок $[0, M]$. В силу леммы 1 оператор $\Pi_M : C(\mathbb{R}_+; E_0) \rightarrow C([0, M], E_0)$ непрерывен.

Лемма 2. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ тогда и только тогда, когда для любого $M > 0$ множество $\Pi_M P$ относительно компактно в $C([0, M], E_0)$.

Через $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ обозначим пространство существенно ограниченных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в E .

Определение 1. Пусть $J \subset \mathbb{R}$ — конечный или бесконечный интервал и $\bar{J}$ — его замыкание. Пусть Y — банахово пространство. Функция $u : \bar{J} \rightarrow Y$ называется слабо непрерывной если из $t_n \rightarrow t, t_n \in \bar{J}$ следует, что $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ слабо в Y . Множество слабо непрерывных функций $u : \bar{J} \rightarrow Y$ будем обозначать $C_w(\bar{J}, Y)$.

Теорема 1. Пусть E и E_0 — банаховы пространства, такие что $E \subset E_0$, причём вложение непрерывно. Если функция v принадлежит $L_\infty(0, T; E)$ и непрерывна как функция со значениями в E_0 , то $v \in C_w([0, T], E)$.

Следовательно, функция $v \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ принадлежит $C(\mathbb{R}_+; E)$ и поэтому $v(t) \in E$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Через $T(h)$, $h \geq 0$, обозначим оператор сдвига.

Рассмотрим абстрактное неавтономное эволюционное дифференциальное уравнение

$$u'(t) = A_{\psi(t)}(u(t)), \quad u(t) \in E, \quad (4)$$

где ψ — некоторый функциональный параметр, который назовём символом уравнения (4). Будем предполагать, что ψ принадлежит некоторому множеству Σ , которое назовём пространством символов. Обычно ψ состоит из всех зависящих от времени коэффициентов и правых частей рассматриваемого уравнения. Предположим, что для каждого $\psi \in \Sigma$ определено непустое множество $\mathcal{H}_{\psi}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}_+; E)$ решений уравнения (4), определённых на $\mathbb{R}_+$. Множества $\mathcal{H}_{\psi}^+$ называются пространствами траекторий, а их элементы траекториями. Решения уравнения (4) могут пониматься в различном смысле. Поэтому, различным решениям соответствуют различные $\mathcal{H}_{\psi}^+$. Естественным требованием на $\mathcal{H}_{\psi}^+$ является его непустота. Также рассмотрим объединённое траекторное пространство $\mathcal{H}_{\Sigma}^+ = \bigcup_{\psi \in \Sigma} \mathcal{H}_{\psi}^+$.

Определение 2. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерно (относительно $\psi \in \Sigma$) притягивающим (для уравнения (4)), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}_{\Sigma}^+$, ограниченного в $L_{\infty}(\mathbb{R}_+; E)$, при $h \rightarrow \infty$ выполняется $\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \rightarrow 0$.

Определение 3. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерно поглощающим (для уравнения (4)), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}_{\Sigma}^+$, ограниченного в $L_{\infty}(\mathbb{R}_+; E)$, существует $h \geq 0$, такое что при всех $t \geq h$ имеет место включение $T(t)B \subset P$.

Любое равномерно поглощающее множество является равномерно притягивающим.

Определение 4. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерным траекторным полуаттрактором (для (4)), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_{\infty}(\mathbb{R}_+; E)$;
- (ii) имеет место включение $T(t)P \subset P$ для всех $t \geq 0$;
- (iii) множество P является равномерно притягивающим.

Определение 5. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерным (относительно $\psi \in \Sigma$) траекторным аттрактором (для уравнения (4)), если оно удовлетворяет условиям (i) и (iii) определения 4, а также условию

- (ii') имеет место равенство $T(t)P = P$ для всех $t \geq 0$.

Определение 6. Минимальным равномерным траекторным аттрактором пространства траекторий $\mathcal{H}_{\Sigma}^+$ называется наименьший по включению равномерный траекторный аттрактор.

Определение 7. Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется равномерным (относительно $\psi \in \Sigma$) глобальным аттрактором (в E_0) для уравнения (4), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) множество $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E ;
- (ii) для всякого ограниченного в $L_{\infty}(\mathbb{R}_+; E)$ множества $B \subset \mathcal{H}_{\Sigma}^+$ выполняется условие притягивания $\sup_{u \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|u(t) - y\|_{E_0} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;
- (iii) множество $\mathcal{A}$ является наименьшим по включению множеством, удовлетворяющим условиям (i) и (ii).

Отметим, что минимальный равномерный траекторный аттрактор и равномерный глобальный аттрактор единственны.

Замечание 1. Минимальный равномерный траекторный аттрактор и равномерный глобальный аттрактор зависят от выбора Σ . Для двух пространств символов $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ имеем соответствующие минимальные равномерные траекторные аттракторы $\mathcal{U}_{\Sigma_1} \subset \mathcal{U}_{\Sigma_2}$ и равномерные глобальные аттракторы $\mathcal{A}_{\Sigma_1} \subset \mathcal{A}_{\Sigma_2}$. Отметим, что при расширении пространства символов известны случаи, когда равномерных аттракторов не существует (см. [2], замечание 4.3.3).

Приведём теорему существования минимального равномерного траекторного аттрактора (см. [4], теорема 2.1).

Теорема 2. Если существует равномерный траекторный полуаттрактор P для уравнения (4), то существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ для (4).

Имеет место следующая теорема существования равномерного глобального аттрактора (см. [4], теорема 2.2).

Теорема 3. Если существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ для уравнения (4), то существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ для (4).

Приведём ещё одно необходимое утверждение (см. [2], лемма 4.3.1).

Лемма 3. Пусть P — относительно компактное в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ равномерно поглощающее множество для уравнения (4). Тогда его замыкание $\bar{P}$ в пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ является компактным в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограниченным в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ равномерно поглощающим множеством для (4). Если при этом $T(t)P \subset P$ при всех $t \geq 0$, то P — равномерный полуаттрактор для уравнения (4).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathcal{V}$ — пространство бесконечно дифференцируемых соленоидальных финитных функций. Определим V^0 и V^1 как пополнение $\mathcal{V}$ по нормам $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно. Пусть $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

Рассмотрим в $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$, где $\pi : L_2(\Omega)^n \rightarrow V^0$ — проектор Лере. Обозначим через E_∞ множество конечных линейных комбинаций, составленных из собственных функций оператора A , и определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\alpha} = (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2)^{1/2}$, где $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ — собственные значения оператора A . В [8] показано, что эта норма в пространствах $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ эквивалентна норме $\|v\|_{V^\alpha} = \|A^{\alpha/2}v\|_{V^0}$.

Для определения слабого решения на конечном отрезке введём пространства

$$\begin{aligned} W_1[0, T] &= \{v : v \in L_\infty(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}, \\ W_2[0, T] &= \{v : v \in C([0, T], V^5), v' \in L_\infty(0, T; V^5)\} \end{aligned}$$

с нормами $\|v\|_{W_1[0, T]} = \|v\|_{L_\infty(0, T; V^1)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^{-1})}$, $\|v\|_{W_2[0, T]} = \|v\|_{C([0, T], V^5)} + \|v'\|_{L_\infty(0, T; V^5)}$.

Для определения слабого решения на полуоси $\mathbb{R}_+$ определим пространство $W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v , определённых п.в. на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в V^1 , таких что ограничение v на любой отрезок $[0, T]$ принадлежит $W_1[0, T]$. Также введём пространство $W_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v класса $C(\mathbb{R}_+, V^5)$, таких что ограничение v на любой отрезок $[0, T]$ принадлежит $W_2[0, T]$.

Определим пространство $\mathcal{X}$, которое состоит из всех элементов $L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$, для которых конечна норма $\|\varphi\|_{\mathcal{X}} = \sup_{t \geq 0} \|\varphi\|_{L_2(t, t+1; V^{-1})}$.

3. СЛАБАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АППРОКСИМАЦИЯ

Пусть $a \in V^1, f \in \mathcal{X}$.

Определение 8. Слабым решением задачи (1)–(3) на отрезке $[0, T]$ будем называть функцию $v \in W_1[0, T]$, удовлетворяющую при п. в. $t \in (0, T)$ и для любого $\varphi \in V^3$ тождеству

$$\begin{aligned} & \langle (J + \kappa A)v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \\ & - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v)(s, z(s, t, x)) : \mathcal{E}(\varphi) dx ds = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

и начальному условию

$$v(0) = a. \quad (5)$$

Здесь z — это решение задачи (2), которое существует в силу [9]. Символ «:» обозначает покомпонентное произведение матриц.

Определение 9. Слабым решением задачи (1)–(3) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$, такую что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0, T]$ является слабым решением задачи (1)–(3) на отрезке $[0, T]$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим аппроксимационную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \varepsilon e^{-\gamma t} \frac{\partial \Delta^4 v}{\partial t} - 2\varkappa \operatorname{Div} \left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k} \right) - \\ - 2\operatorname{Div} \int_0^t \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \mathcal{E}(v)(s, z(s, t, x)) ds + \nabla p = f; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t, x) \in Q_T = [0, T] \times \Omega;$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s, t, x)) ds, \quad 0 \leq t, \tau \leq T, \quad x \in \Omega; \quad (7)$$

$$v|_{t=0} = b(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = \Delta v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = \Delta^2 v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = \Delta^3 v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = 0. \quad (8)$$

Здесь γ — константа, удовлетворяющая неравенству

$$0 < \gamma \leq \min \left(\frac{\nu}{K_0 + \varkappa}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L \right), \quad (9)$$

где K_0 — константа из неравенства Пуанкаре: $\|u\|_{V^0}^2 \leq K_0 \|u\|_{V^1}^2$. Точный выбор γ описан в доказательстве теоремы 4.

Пусть $b \in V^5, f \in \mathcal{X}$.

Определение 10. Функция $v \in W_2[0, T]$ называется решением аппроксимационной задачи (6)–(8) если она удовлетворяет для любой функции $\varphi \in V^3$ при п. в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v' \varphi dx + \varkappa \int_{\Omega} \nabla(v') : \nabla \varphi dx - \varepsilon e^{-\gamma t} \int_{\Omega} \nabla(\Delta^2 v') : \nabla(\Delta \varphi) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \\ + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx - \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \\ + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v)(s, z(s, t, x)) : \mathcal{E}(\varphi) dx ds = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

и начальному условию

$$v(0) = b. \quad (10)$$

Здесь z — решение задачи (7), которое существует в классическом смысле, поскольку $W_2[0, T] \subset C([0, T], C^3(\Omega)^n)$.

Определение 11. Решением аппроксимационной задачи (6)–(8) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$, такую что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0, T]$ является решением аппроксимационной задачи (6)–(8) на этом отрезке.

Введём необходимые нам операторы и приведём их свойства (подробнее см. [6]).

Лемма 4. *Имеют место следующие свойства:*

1. Оператор $J : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$, действующий по правилу

$$\langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен.

2. Оператор $A : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$, действующий по правилу

$$\langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и на любом $[t; t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|Av\|_{L_2(t, t+1; V^{-1})} \leq \|v\|_{L_2(t, t+1; V^1)}. \quad (11)$$

3. Оператор $A^4 : L_2(0, T; V^5) \rightarrow L_2(0, T; V^{-3})$, действующий по правилу

$$\langle A^4 v, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta^2 v) : \nabla(\Delta \varphi) dx, \forall \varphi \in V^3,$$

непрерывен, и на любом $[t; t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|A^4 v\|_{L_2(t, t+1; V^{-3})} \leq \|v\|_{L_2(t, t+1; V^5)}. \quad (12)$$

4. Оператор $B_1(v) : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-3})$, действующий по правилу

$$\langle B_1(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и на любом $[t; t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|B_1(v)\|_{L_2(t, t+1; V^{-3})} \leq C_1 \|v\|_{L_2(t, t+1; V^1)}. \quad (13)$$

5. Оператор $B_2(v) : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-3})$, действующий по правилу

$$\langle B_2(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и на любом $[t; t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|B_2(v)\|_{L_2(t, t+1; V^{-3})} \leq C_2 \|v\|_{L_2(t, t+1; V^1)}. \quad (14)$$

6. Оператор $B_3(v) : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-3})$, действующий по правилу

$$\langle B_3(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и на любом отрезке $[t; t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|B_3(v)\|_{L_2(t, t+1; V^{-3})} \leq C_2 \|v\|_{L_2(t, t+1; V^1)}. \quad (15)$$

7. Оператор $N : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$, действующий по правилу

$$\langle N(v)(t), \varphi \rangle = 2 \int_0^t \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v)(s, z(s, t, x)) : \mathcal{E}(\varphi) dx ds, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место оценка

$$\|N(v)(\tau)\|_{V^{-3}} \leq C_3 \left(\int_0^{\tau} e^{-\gamma(\tau-t)} \|v(t)\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (16)$$

8. Оператор $(J + \kappa A) : L_2(0, T; V^{-1}) \rightarrow L_2(0, T; V^{-3})$ непрерывен, и на любом $[t; t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$C_4 \|v\|_{L_2(t, t+1; V^{-1})} \leq \|(J + \kappa A)v\|_{L_2(t, t+1; V^{-3})}. \quad (17)$$

9. Оператор $(J + \varepsilon e^{-\gamma t} A^4 + \kappa A) : L_2(0, T; V^5) \rightarrow L_2(0, T; V^{-3})$ непрерывен, и на любом $[t; t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\varepsilon e^{-\gamma t} \|v\|_{L_2(t, t+1; V^5)} \leq \|(J + \varepsilon e^{-\gamma t} A^4 + \kappa A)v\|_{L_2(t, t+1; V^{-3})}. \quad (18)$$

Тогда разрешимость задачи (1)–(3) на $[0, T]$ эквивалентна существованию решения $v \in W_1[0, T]$ операторного уравнения

$$(J + \kappa A)v' + \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) + N(v) = f, \quad (19)$$

удовлетворяющего начальному условию (5).

Аналогично задача о разрешимости (6)–(8) эквивалентна задаче о поиске решений $v \in W_2[0, T]$ операторного уравнения

$$(J + \varepsilon e^{-\gamma t} A^4 + \kappa A)v' + \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) + N(v) = f. \quad (20)$$

4. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ

Установим условия на коэффициенты задачи, при которых имеют место необходимые экспоненциальные оценки.

Теорема 4. Пусть коэффициенты $\nu, \alpha_i, \beta_i, i = \overline{1, L}$ удовлетворяют условиям

$$\nu \alpha_i > 4L|\beta_i|, \quad i = \overline{1, L}. \quad (21)$$

Тогда на любом $[\tau, \tau+1] \subset [0, T]$ решение v уравнения (20) удовлетворяет оценке

$$\|v\|_{L_{\infty}(\tau, \tau+1; V^1)} \leq C_5 + e^{-\gamma \tau} (C_6 \|v(0)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^4}^2). \quad (22)$$

Доказательство. Пусть v — решение уравнения (20). Применяя (20) к v и преобразуя слагаемые в полученном тождестве при помощи формулы Грина, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^0}^2 + \frac{\varepsilon e^{-\gamma t}}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^4}^2 + \frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^1}^2 + \nu \|v\|_{V^1}^2 - \\ & - \langle B_1(v), v \rangle - \kappa \langle B_2(v) + B_3(v), v \rangle + \langle N(v), v \rangle = \langle f, v \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим (см., например, [6]), что $\langle B_1(v), v \rangle = 0$ и $\langle B_2(v) + B_3(v), v \rangle = 0$.

Для последнего слагаемого в левой части (23) имеет место оценка (см., например, [6])

$$|\langle Nv, v \rangle| \leq 2 \sum_{i=1}^L |\beta_i| \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \|v(s)\|_{V^1} ds \|v(t)\|_{V^1}.$$

Пусть λ_1, λ_2 такие числа, что $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, 0 < \lambda_1 + \lambda_2 < 1$, точное значение λ_1 и λ_2 будет указано ниже. В силу элементарного неравенства $ab \leq \frac{\delta a^2}{2} + \frac{b^2}{2\delta}$, которое имеет место для любых неотрицательных a, b и положительного δ , оценим правую часть (23), положив $\delta = \nu(1 - \lambda_1 - \lambda_2)$:

$$\langle f, v \rangle \leq \|f(t)\|_{V^{-1}} \|v(t)\|_{V^1} \leq \frac{\nu(1 - \lambda_1 - \lambda_2) \|v(t)\|_{V^1}^2}{2} + \frac{\|f(t)\|_{V^{-1}}^2}{2\nu(1 - \lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Тогда из (23) получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^0}^2 + \nu \|v(t)\|_{V^1}^2 + \varkappa \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^2}^2 + \varepsilon e^{-\gamma t} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^4}^2 + \lambda_1 \nu \|v(t)\|_{V^1}^2 + \\ & + \lambda_2 \nu \|v(t)\|_{V^1}^2 - 4 \sum_{i=1}^L |\beta_i| \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \|v(s)\|_{V^1} ds \|v(t)\|_{V^1} \leq \frac{\|f(t)\|_{V^{-1}}^2}{\nu(1 - \lambda_1 - \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Для краткости обозначим

$$F(t) = \frac{\|f(t)\|_{V^{-1}}^2}{\nu(1 - \lambda_1 - \lambda_2)}; \quad G(t) = \lambda_2 \nu \|v(t)\|_{V^1}^2 - 4 \sum_{i=1}^L |\beta_i| \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \|v(s)\|_{V^1} ds \|v(t)\|_{V^1}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^0}^2 + \nu \|v(t)\|_{V^1}^2 + \varkappa \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^2}^2 + \varepsilon e^{-\gamma t} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^4}^2 + \lambda_1 \nu \|v(t)\|_{V^1}^2 + G(t) \leq F(t). \quad (24)$$

Введём на V^1 вспомогательную норму $\|u\|^2 = \|u\|_{V^0}^2 + \varkappa \|u\|_{V^1}^2$. Её эквивалентность норме V^1 следует из неравенства Пуанкаре, поскольку $\varkappa \|u\|_{V^1}^2 \leq \|u\|^2 \leq (K_0 + \varkappa) \|u\|_{V^1}^2$. Тогда в силу условия (9) на γ получаем

$$\nu \|u\|_{V^1}^2 \geq \frac{\nu}{(K_0 + \varkappa)} \|u\|^2 \geq \gamma \|u\|^2. \quad (25)$$

Из (24) при помощи (25) получим

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \gamma \|v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\gamma t} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^4}^2 + \lambda_1 \nu \|v(t)\|_{V^1}^2 + G(t) \leq F(t).$$

В первых двух слагаемых левой части сделаем замену $v(t) = e^{-\gamma t/2} \bar{v}(t)$ и умножим обе части неравенства на $e^{\gamma t}$:

$$\frac{d}{dt} \|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^4}^2 + \lambda_1 \nu e^{\gamma t} \|v(t)\|_{V^1}^2 + e^{\gamma t} G(t) \leq e^{\gamma t} F(t).$$

Проинтегрируем полученное неравенство по t от 0 до $\tau \in [0, T]$ и умножим на $e^{-\gamma \tau}$:

$$\begin{aligned} & e^{-\gamma \tau} \|\bar{v}(\tau)\|^2 + \varepsilon e^{-\gamma \tau} \|v(\tau)\|_{V^4}^2 + \lambda_1 \nu \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} \|v(t)\|_{V^1}^2 dt + \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} G(t) dt \leq \\ & \leq \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} F(t) dt + e^{-\gamma \tau} (\|\bar{v}(0)\|^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^4}^2). \end{aligned} \quad (26)$$

В силу неравенства

$$\int_0^t a^s \phi(s) ds \leq \frac{a^{t+2}}{a-1} \sup_{s \in [0, t-1]} \int_s^{s+1} |\phi(\xi)| d\xi,$$

где $a > 1$ и ϕ — скалярная функция (см. [2]), для правой части (26) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} F(t) dt + e^{-\gamma\tau} (\|\bar{v}(0)\|^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V_4}^2) &\leq e^{-\gamma\tau} \frac{e^{\gamma(\tau+2)}}{e^\gamma - 1} \sup_{s \in [0, \tau-1]} \int_s^{s+1} F(s) ds + \\ &+ e^{-\gamma\tau} (\|\bar{v}(0)\|^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V_4}^2) \leq C_7 \|f\|_{\mathcal{X}} + e^{-\gamma\tau} (\|\bar{v}(0)\|^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V_4}^2). \end{aligned}$$

Делая обратную замену $\bar{v}(t) = e^{\gamma t/2} v(t)$, из (26) получаем

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_{V_0}^2 + \varkappa \|v(\tau)\|_{V_1}^2 + \varepsilon e^{-\gamma\tau} \|v(\tau)\|_{V_4}^2 + \lambda_1 \nu \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} \|v(t)\|_{V_1}^2 dt + \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} G(t) dt \\ \leq C_7 \|f\|_{\mathcal{X}} + e^{-\gamma\tau} ((K_0 + \varkappa) \|v(0)\|_{V_1}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V_4}^2). \end{aligned} \quad (27)$$

Установим неотрицательность последнего слагаемого в левой части (27). Вспоминая введённые ранее обозначения, имеем

$$\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} G(t) dt = \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} \left(\lambda_2 \nu \|v(t)\|_{V_1}^2 - 4 \sum_{i=1}^L |\beta_i| \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \|v(s)\|_{V_1} ds \|v(t)\|_{V_1} \right) dt.$$

Введём вспомогательные функции

$$h(t) = \|v(t)\|_{V_1}; \quad g_i(t) = \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \|v(s)\|_{V_1} ds = \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} h(s) ds, \quad i = \overline{1, L}.$$

Функция h непрерывна на отрезке $[0, T]$, а функции $g_i, i = \overline{1, L}$, непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$. Заметим, что $g'_i(t) = h(t) - \alpha_i \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} h(s) ds = h(t) - \alpha_i g_i(t)$, $i = \overline{1, L}$. Следовательно, для любого $i = \overline{1, L}$ имеем $g'_i(t) + \alpha_i g_i(t) = h(t)$, $g_i(0) = 0$.

Поскольку для любого $i = \overline{1, L}$ в силу формулы интегрирования по частям

$$2 \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} g'_i(t) g_i(t) dt = g_i^2(\tau) - \gamma \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} g_i^2(t) dt,$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} G(t) dt &= \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} \sum_{i=1}^L \left(\frac{\lambda_2 \nu}{L} (g'_i(t) + \alpha_i g_i(t))^2 - 4 |\beta_i| g_i(t) (g'_i(t) + \alpha_i g_i(t)) \right) dt = \\ &= \sum_{i=1}^L \left(\frac{\lambda_2 \nu}{L} \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} (g'_i(t))^2 dt + \left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 2 |\beta_i| \right) g_i^2(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\alpha_i \left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 4 |\beta_i| \right) - \gamma \left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 2 |\beta_i| \right) \right) \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} g_i^2(t) dt \right). \end{aligned}$$

Покажем, что при каждом $i = \overline{1, L}$ при выполнении условий (21) и подходящем выборе положительного числа μ_i выражение

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\lambda_2 \nu}{L} \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} (g'_i(t))^2 dt + \left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 2 |\beta_i| \right) g_i^2(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i^2}{L} - 4 |\beta_i| \alpha_i \right) - \mu_i \left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 2 |\beta_i| \right) \right) \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} (g_i(t))^2 dt \right) \end{aligned} \quad (28)$$

неотрицательно.

Так как $\lambda_2 > 0, \nu > 0$, а $L \geq 1$, то $\frac{\lambda_2 \nu}{L} \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} (g'_i(t))^2 dt \geq 0$ при каждом $i = \overline{1, L}$.

Далее, в силу (21) имеем, что $\frac{\nu \alpha_i}{L} > 4|\beta_i|$, $i = \overline{1, L}$. Поэтому можно выбрать λ_2 , возможно достаточно близкое к 1, что

$$\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 4|\beta_i| > 0 \quad \text{при всех } i = \overline{1, L}. \quad (29)$$

Следовательно, второе слагаемое в (28) неотрицательно.

Далее, в силу (29) имеем $\left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 4|\beta_i|\right) > 0$ и $\left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 2|\beta_i|\right) > 0$. Поэтому всегда можно выбрать μ_i такое что $0 < \mu_i \leq \gamma$, что $\alpha_i \left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 4|\beta_i|\right) - \mu_i \left(\frac{\lambda_2 \nu \alpha_i}{L} - 2|\beta_i|\right) > 0$. Тогда, полагая $\gamma = \min_{i=\overline{1, L}} \mu_i$, получаем $\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} G(t) dt \geq 0$.

Так как каждое слагаемое в левой части (27) неотрицательно, получаем

$$\kappa \|v(\tau)\|_{V^1}^2 + \lambda_1 \nu \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} \|v(t)\|_{V^1}^2 dt \leq C_7 \|f\|_{\mathcal{X}}^2 + e^{-\gamma\tau} (C_6 \|v(0)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^4}^2). \quad (30)$$

Отсюда, используя неравенство $b \leq 1 + b^2$ для всех $b \in \mathbb{R}$, получим требуемую оценку (22). $\square$

Теорема 5. Пусть v — решение (20) на отрезке $[0, T]$ и коэффициенты $\nu, \alpha_i, \beta_i, i = \overline{1, L}$ удовлетворяют условиям (21). Тогда для любого $[\tau, \tau + 1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-1})} \leq C_8 (1 + e^{-\gamma\tau} (C_6 \|v(0)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^4}^2)). \quad (31)$$

Доказательство. В силу (16) и (30) имеем

$$\begin{aligned} \|N(v)\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-3})} &\leq 1 + \|N(v)\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-3})}^2 \leq 1 + C_3^2 \int_\tau^{\tau+1} \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|v(s)\|_{V^1}^2 ds dt \leq \\ &\leq C_9 (1 + e^{-\gamma\tau} (C_6 \|v(0)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^4}^2)). \end{aligned} \quad (32)$$

Так как v — решение (20), то для любого $[\tau, \tau + 1] \subset [0, T]$ в силу (11), (13), (14), (15) и (32) получим

$$\begin{aligned} &\|(J + \varepsilon e^{-\gamma t} A^4 + \kappa A)v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-3})} = \\ &= \|-\nu Av + B_1(v) + \kappa B_2(v) + \kappa B_3(v) + N(v) + f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-3})} \leq \\ &\leq \nu C_{10} \|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} + C_1 \|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)}^2 + 2\kappa C_2 \|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)}^2 + \\ &+ C_9 (1 + e^{-\gamma\tau} (C_6 \|v(0)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^4}^2)) + C_{10} \|f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-1})}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (18), (22) и неравенства $\|u\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} \leq \|u\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^1)}$ получаем, что

$$\varepsilon e^{-\gamma t} \|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^5)} \leq C_{11} (1 + e^{-\gamma\tau} (C_6 \|v(0)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^4}^2)). \quad (33)$$

Далее, если v — решение (20), то в силу (12) и (33) получаем

$$\begin{aligned} &\|(J + \kappa A)v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-3})} = \\ &= \|-\varepsilon e^{-\gamma t} A^4 v' - \nu Av + B_1(v) + \kappa B_2(v) + \kappa B_3(v) + N(v) + f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-3})} \leq \\ &\leq \varepsilon e^{-\gamma t} \|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^5)} + \|-\nu Av + B_1(v) + \kappa B_2(v) + \kappa B_3(v) + N(v) + f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-3})} \leq \\ &\leq 2C_{11} (1 + e^{-\gamma\tau} (C_6 \|v(0)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^4}^2)). \end{aligned}$$

Откуда в силу (17) получаем требуемое неравенство (31). $\square$

Замечание 2. Всюду в дальнейшем до конца статьи будем предполагать, что коэффициенты ν , α_i , β_i , $i = \overline{1, L}$ удовлетворяют условиям (21).

5. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

Имеют место следующие теоремы существования решений на конечном отрезке и полуоси.

Теорема 6. Пусть $f \in \mathcal{X}$, $b \in V^5$. Тогда на любом отрезке $[0, T]$ существует решение уравнения (20), удовлетворяющее начальному условию (10), и для любого отрезка $[\tau, \tau + 1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1, V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1, V^{-1})} \leq C_{12} (1 + e^{-\gamma\tau} (C_6 \|v(0)\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{V^4}^2)). \quad (34)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6 в [6]. Наличие ограничений на коэффициенты аппроксимационной задачи не оказывает никакого влияния на ход доказательства. Оценка (34) непосредственно следует из оценок (22) и (31).

Теорема 7. При любых $f \in \mathcal{X}$, $b \in V^5$ задача (20), (10) имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Теорема 8. При любых $f \in \mathcal{X}$, $a \in V^1$ задача (19), (5) имеет слабое решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее при всех $\tau \geq 0$ неравенству

$$\|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1, V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1, V^{-1})} \leq C_{13} (1 + e^{-\gamma\tau} C_6 \|v(0)\|_{V^1}^2). \quad (35)$$

Здесь C_{13} — постоянная, зависящая от ν , $\mathcal{X}$, f и не зависящая от v и ε .

Доказательство разрешимости задач (20), (10) и (19), (5) на полуоси $\mathbb{R}_+$ может быть найдено в работе [7]. Оценка (35) получается из неравенства (34) при предельном переходе при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу полунепрерывности снизу нормы относительно слабой и *-слабой топологии.

6. РАВНОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ

Положим $E_0 = V^\xi$, $0 < \xi < 1$, $E = V^1$. В качестве Σ системы (1)–(2) для фиксированного $f \in \mathcal{X}$ выберем произвольное множество Σ , содержащее функцию f , для которого выполнено $\|\psi\|_{\mathcal{X}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}}$, ($\psi \in \Sigma$). Определим семейство траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$.

Определение 12. Пространство траекторий $\mathcal{H}_\psi^+$ системы (1)–(2), соответствующее символу $\psi \in \Sigma$, — это множество функций $v \in L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, $v' \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$ таких, что ограничение v на любой отрезок $[0, T]$ является слабым решением задачи (1)–(2) на этом отрезке, причём при всех $\tau \geq 0$ функция v удовлетворяет неравенству

$$\|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1, V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1, V^{-1})} \leq C_{13} (1 + e^{-\gamma\tau} C_6 \|v(0)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)}^2). \quad (36)$$

Покажем, что $\mathcal{H}_\psi^+ \subset C(\mathbb{R}_+; V^\xi) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$. По определению $\mathcal{H}_\psi^+$ каждая функция $v \in \mathcal{H}_\psi^+$ принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$. В силу (36), если v — траектория, тогда для любого отрезка $[0, T]$ имеем $\Pi_T v \in L_\infty(0, T; V^1)$, $\Pi_T v' \in L_2(0, T; V^{-1})$. Тогда по теореме Обена–Дубинского–Симона [10] для тройки пространств $V^1 \subset V^\xi \subset V^{-1}$ получаем, что $\Pi_T v \in C([0, T], V^\xi)$. Так как это имеет место для любого $T \geq 0$, то $v \in C(\mathbb{R}_+, V^\xi)$.

Покажем, что $\mathcal{H}_\psi^+$ непусто. Имеет место теорема.

Теорема 9. Пусть $\psi \in \Sigma$ — некоторый символ. Тогда для любого $a \in V^1$ существует траектория $v \in \mathcal{H}_\psi^+$, для которой $v(0) = a$.

Доказательство. По теореме 8 для любых $a \in V^1, f \in \mathcal{X}$ существует слабое решение $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ задачи (1)–(2) на $\mathbb{R}_+$. Покажем, что v удовлетворяет (36), то есть является траекторией. Так как v удовлетворяет (35), то достаточно установить неравенство

$$\|v(0)\|_{V^1} \leq \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)}. \quad (37)$$

Из (35) следует, что $v \in L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)$, а $v' \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+, V^{-1})$. Повторяя рассуждения, используемые выше, получаем, что $v \in C(\mathbb{R}_+, V^\xi)$. Таким образом, $v \in C(\mathbb{R}_+, V^\xi) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)$, и, используя теорему 1, получаем, что $v \in C_w(\mathbb{R}_+, V^1)$. Откуда, для любого $t \in \mathbb{R}_+$ определено значение $v(t) \in V^1$. Отсюда в силу определения нормы в $L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)$ получаем (37). $\square$

Из теоремы 9 следует, что пространство $\mathcal{H}_\psi^+$ содержит «достаточно» большое число траекторий. А именно, для любого $a \in V^1$ существует выходящая из него траектория $v \in \mathcal{H}_\psi^+$.

Основным результатом работы являются нижеследующие теоремы.

Теорема 10. *Существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2).*

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно построить равномерный траекторный полуаттрактор семейства $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$. Из свойства (iii) определения 12 следует, что каждая траектория v каждого из пространств $\mathcal{H}_\psi^+$ удовлетворяет при любом $\tau \geq 0$ неравенству

$$\|v\|_{L_\infty(\tau; \tau+1, V^1)} + \|v'\|_{L_\infty(\tau; \tau+1, V^{-1})} \leq C_{13} \left(1 + e^{-\gamma\tau} C_6 \|v(0)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)}^2\right). \quad (38)$$

Рассмотрим множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; V^\xi) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, состоящее из функций, удовлетворяющих при всех $\tau \geq 0$ неравенству

$$\|v\|_{L_\infty(\tau; \tau+1, V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau; \tau+1, V^{-1})} \leq C_{14} = C_{13}(1 + C_6). \quad (39)$$

Так как при каждом $h \geq 0$ оператор $T(h) : C(\mathbb{R}_+; V^\xi) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V^\xi)$ непрерывен, то $T(t)P \subset P$ при $t \geq 0$. Следовательно, P трансляционно инвариантно.

Покажем, что P относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^\xi)$. Из (39) следует, что множество $\Pi_T P$ ограничено в $L_\infty(0, T; V^1)$ при любом $T > 0$, а множество $\{v' : v \in \Pi_T P\}$ ограничено в $L_\infty(0, T; V^{-1})$. По теореме Обена—Дубинского—Симона [10] множество $\Pi_T P$ относительно компактно в $C([0, T], V^\xi)$. В силу произвольности T по лемме 2 получаем относительную компактность P в $C(\mathbb{R}_+; V^\xi)$.

Покажем, что P является равномерно поглощающим множеством. Пусть множество $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, то есть $\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)} \leq R$ для $v \in B$.

Пусть число $t_B \geq 0$ такое, что $R^2 e^{-\gamma t_B} \leq 1$. В силу (38) для $h \geq t_B$ и $\tau \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|T(h)v\|_{L_\infty(\tau; \tau+1, V^1)} + \|T(h)v'\|_{L_2(\tau; \tau+1, V^{-1})} &= \|v\|_{L_\infty(\tau+h; \tau+1+h, V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau+h; \tau+1+h, V^{-1})} \leq \\ &\leq C_{13} \left(1 + e^{-\gamma(\tau+h)} C_6 \|v(0)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)}^2\right) \leq C_{13} \left(1 + R^2 e^{-\gamma\tau} e^{-\gamma h} C_6\right) \leq C_{14}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (39) выполняется для функции $T(h)$ при всех $\tau \geq 0$. Следовательно, $T(h)B \subset P$ при $h \geq t_B$, и P — поглощающее множество.

По лемме 3 замыкание $\bar{P}$ множества P в пространстве $C(\mathbb{R}_+; V^\xi)$ является траекторным полуаттрактором семейства пространств траекторий $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$. По теореме 2 отсюда следует существование минимального равномерного траекторного аттрактора $\mathcal{U}$. $\square$

Теорема 11. *Существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2).*

Доказательство. По теореме 10 существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2). Тогда по теореме 3 существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2). $\square$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00091). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Устюжанинова А. С., Турбин М. В. Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина—Фойгта // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 1. С. 126–137; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.110
2. Zvyagin V., Vorotnikov D. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.
3. Звягин В. Г., Кондратьев С. К. Аттракторы уравнений не-newтоновской гидродинамики // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 5. С. 81–156; DOI: 10.4213/rm9615
4. Vorotnikov D. A., Zvyagin V. G. Uniform attractors for non-autonomous motion equations of viscoelastic medium // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 325, N 1. P. 438–458; DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.01.078
5. Чепыжов В. В. О равномерных аттракторах динамических процессов и неавтономных уравнений математической физики // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, № 2. С. 159–196.
6. Turbin M., Ustiuzhaninova A. Existence of weak solution to initial-boundary value problem for finite order Kelvin—Voigt fluid motion model // Bol. Soc. Mat. Mex. 2023. V. 29, N 2. Article 54; DOI: 10.1007/s40590-023-00526-y
7. Turbin M., Ustiuzhaninova A. Trajectory and global attractors for the Kelvin—Voigt model taking into account memory along fluid trajectories // Mathematics. 2024. V. 12, N 2. Article 266; DOI: 10.3390/math12020266
8. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
9. DiPerna R. J., Lions P.-L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. V. 98. P. 511–547.
10. Simon J. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ // Ann. di Mat. Pura ed Appl. 1986. V. 146, N 1. P. 65–96; DOI: 10.1007/BF01762360

UDC 517.958

UNIFORM ATTRACTORS FOR THE KELVIN—VOIGT MODEL TAKING INTO ACCOUNT MEMORY ALONG FLUID MOTION TRAJECTORIES

© 2024 M. V. Turbin^a, A. S. Ustiuzhaninova^b

Voronezh State University, Voronezh, 394018 Russia

E-mails: ^amrsmike@mail.ru, ^bnastyzhka@gmail.com

Received 30.01.2024, revised 20.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. The paper is devoted to the study of the qualitative behavior of solutions for the Kelvin—Voigt model taking into account memory along fluid motion trajectories. Namely, based on the theory of attractors of noninvariant trajectory spaces, for the model under consideration in the nonautonomous case the existence of a uniform trajectory and a uniform global attractor is proved under certain conditions on the coefficients.

Keywords: uniform attractor, trajectory space, Kelvin—Voigt model, memory along fluid trajectories, exponential estimate.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.410

REFERENCES

1. A. S. Ustiuzhaninova and M. V. Turbin, “Trajectory and global attractors for a modified Kelvin—Voigt model,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **24** (1), 126–137 (2021) [*J. Appl. Ind. Math.* **15** (1), 158–168 (2021)]. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.110>
2. V. Zvyagin and D. Vorotnikov, *Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics* (Walter de Gruyter, Berlin, 2008). <https://doi.org/10.1515/9783110208283>
3. V. G. Zvyagin and S. K. Kondrat’ev, “Attractors of equations of non-Newtonian fluid dynamics,” *Usp. Mat. Nauk* **69** (5), 81–156 (2014) [*Russ. Math. Surv.* **69** (5), 845–913 (2014)]. <https://doi.org/10.4213/rm9615>
4. D. A. Vorotnikov and V. G. Zvyagin, “Uniform attractors for non-autonomous motion equations of viscoelastic medium,” *J. Math. Anal. Appl.* **325** (1), 438–458 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.01.078>
5. V. V. Chepyzhov, “Uniform attractors of dynamical processes and non-autonomous equations of mathematical physics,” *Usp. Mat. Nauk* **68** (2), 159–196 (2013) [*Russ. Mathe. Surv.* **68** (2), 349–382 (2013)].
6. M. Turbin and A. Ustiuzhaninova, “Existence of weak solution to initial-boundary value problem for finite order Kelvin—Voigt fluid motion model,” *Bol. Soc. Mat. Mex.* **29** (2), 54 (2023). <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00526-y>
7. M. Turbin and A. Ustiuzhaninova, “Trajectory and global attractors for the Kelvin—Voigt model taking into account memory along fluid trajectories,” *Mathematics* **12** (2), 266 (2024). <https://doi.org/10.3390/math12020266>
8. A. V. Fursikov, *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications, translation of vol. 187 of Mathematical Monographs* (Am. Math. Soc., Providence, RI, 2000).
9. R. J. DiPerna and P.-L. Lions, “Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces,” *Invent. Math.* **98**, 511–547 (1989).
10. J. Simon, “Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$,” *Ann. Mat. Pura Appl.* **146** (1), 65–96 (1986). <https://doi.org/10.1007/BF01762360>