

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В БЛОЧНОЙ СРЕДЕ С ТОНКИМИ ВЯЗКОУПРУГИМИ ПРОСЛОЙКАМИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

© 2024 Е. А. Ефимов

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия*

E-mail: efimov@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 13.05.2024 г.; после доработки 21.11.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

Рассматривается трёхмерная модель блочной среды с упругими блоками и тонкими упругими и вязкоупругими прослойками. Прослойки описываются упрощёнными дифференциально-разностными соотношениями. Описывается численный алгоритм решения динамических задач, основанный на методе расщепления. Приводятся результаты моделирования распространения волн в блочном полупространстве. Сопоставляется поведение поверхностных волн в блочно-слоистой среде и в дискретно-периодической среде, состоящей из жёстких масс с упругими связями. Результаты расчётов показывают хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Ключевые слова: блочно-слоистая среда, упругие блоки, тонкие прослойки.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.402

ВВЕДЕНИЕ

Особенности распространения сейсмических волн указывают на необходимость учёта блочной структуры пород. Концепция о блочном иерархическом строении горных пород с вложенными друг в друга блоками была разработана М. А. Садовским [1]. В блочных средах наблюдаются эффекты, нехарактерные для однородных сред, например, волны маятникового типа, возникающие за счёт деформации прослоек между блоками [2]. Когда прослойки намного податливее блоков, применяются математические модели, в которых деформациями блоков можно пренебречь. Таким образом, блочная среда может быть представлена в виде дискретно-периодической решётки жёстких масс, связанных между собой упругими элементами. Данная модель хорошо исследована численно и аналитически в одномерном, двумерном и трёхмерном случаях [3–6]. Когда связи между блоками обладают достаточной жёсткостью, возникает необходимость учёта упругого деформирования блоков. В работе [7] предложена модель, учитывающая упругие свойства блоков, описывающая распространение низкочастотных волн. Уравнения модели записываются относительно перемещений центров блоков, что позволяет рассматривать блочную среду как дискретно-периодическую.

В данной работе рассматривается среда из блоков в форме параллелепипедов одинаковых размеров. Блоки описываются уравнениями теории упругости, а прослойки упрощёнными дифференциально-разностными соотношениями в виде граничных условий между соседними блоками. Предполагается, что толщина прослойки много меньше размеров блока, поэтому учитываются только напряжения на площадках, отделяющих блоки от прослоек. Получаемая при этом математическая модель сохраняет свойство термодинамической согласованности, удовлетворяя интегральному закону сохранения энергии. Отдельный интерес представляет анализ

волновых полей в средах с блоками и прослойками, имеющими различные реологические свойства. Задачи в двумерной постановке для блочных сред с упругими блоками и с вязкоупругими, пористыми и пористыми влагонасыщенными прослойками были исследованы в работах [8–10].

Более последовательным следовало бы считать подход, в котором и блоки, и прослойки моделируются уравнениями динамической теории упругости. Численная реализация такой модели содержит ряд трудностей, связанных, в частности, с согласованием шагов по времени. Когда материалы прослоек обладают сложными реологическими свойствами такими, как сыпучесть, разномодульность, упругопластичность, представление прослойки в качестве трёхмерного объекта, а не одномерного, усложняет задачу построения процедур корректировки решения [11, 12], и вместо одномерных множеств допустимых напряжений приходится рассматривать трёхмерные выпуклые множества.

В данной статье представлена трёхмерная модель блочной среды с упругими блоками и тонкими вязкоупругими прослойками. Приведены результаты численного моделирования распространения волн в блочном полупространстве. Проведены расчёты, воспроизводящие эксперимент, опубликованный в работе [7].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Изображённая на рис. 1 блочно-слоистая среда представляет собой периодическую структуру, состоящую из блоков в виде параллелепипедов одинаковых размеров. Блоки разделяются прослойками, толщина которых в каждом из направлений может задаваться отдельно.

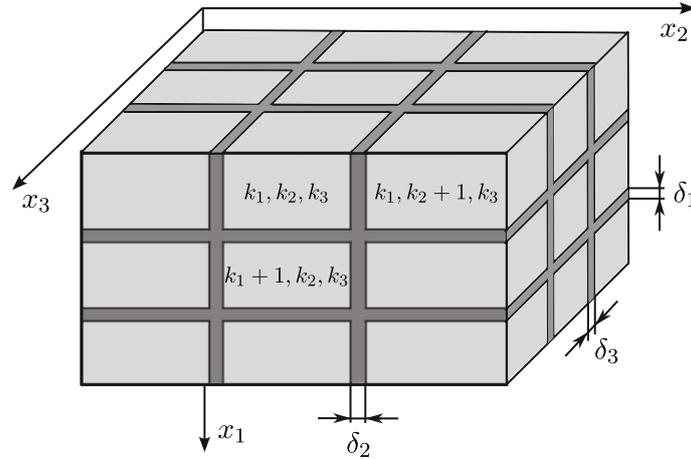


Рис. 1. Блочно-слоистая структура

Уравнения движения и определяющие уравнения для однородных изотропных упругих блоков с учётом малой деформации записываются в виде

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}, & \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}, \\
 \rho \frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}, \\
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right), & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), & \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), & \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность материала блоков, λ и μ — параметры Ламе.

Вязкоупругие прослойки описываются моделью Пойнтинга—Томсона, известной также как модель стандартного линейного тела. Реологическая схема модели (рис. 2) состоит из упругого элемента b_0 , который соединён последовательно с параллельно стоящими упругим b и вязким η элементами.

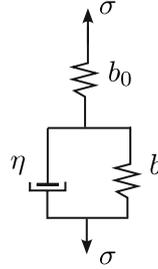


Рис. 2. Реологическая схема Пойнтинга—Томсона

Данная модель лишена недостатков, присущих более простым моделям вязкоупругого тела. Так, модель Максвелла, представляющая собой последовательное соединение упругого и вязкого элементов, при приложении постоянной нагрузки бесконечно деформируется. Модель Кельвина—Фойгта, в которой вязкий и упругий элементы соединены параллельно, при высокочастотных нагрузках ведёт себя как абсолютно твёрдое тело. Тело, описываемое моделью Пойнтинга—Томсона, при низкочастотных нагрузках становится податливым, так как работают оба упругих элемента b и b_0 , при высокочастотных нагрузках становится более жёстким с модулем b_0 .

Упрощённая модель деформирования прослоек представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Производные по пространству заменяются разностными соотношениями, при этом в прослойке учитываются только касательные напряжения и напряжение, нормальное к поверхностям соседних блоков. Введём тензор условных напряжений s_{ij} , соответствующий упругому элементу b реологической схемы (рис. 2). Система уравнений для прослоек в направлении оси x_1 между блоками (k_1, k_2, k_3) и $(k_1 + 1, k_2, k_3)$ запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} &= \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta_1}, \\
 \frac{1}{\lambda'_0 + 2\mu'_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} &= \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1} - \frac{1}{\eta_p} \left(\frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} - \frac{s_{11}^+ + s_{11}^-}{2} \right), \\
 \frac{1}{\mu'_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1} - \frac{1}{\eta_s} \left(\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} - \frac{s_{12}^+ + s_{12}^-}{2} \right), \\
 \frac{1}{\mu'_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} &= \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta_1} - \frac{1}{\eta_s} \left(\frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} - \frac{s_{13}^+ + s_{13}^-}{2} \right), \\
 \frac{1}{\lambda' + 2\mu'} \frac{d}{dt} \frac{s_{11}^+ + s_{11}^-}{2} &= \frac{1}{\eta_p} \left(\frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} - \frac{s_{11}^+ + s_{11}^-}{2} \right), \\
 \frac{1}{\mu'} \frac{d}{dt} \frac{s_{12}^+ + s_{12}^-}{2} &= \frac{1}{\eta_s} \left(\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} - \frac{s_{12}^+ + s_{12}^-}{2} \right), \\
 \frac{1}{\mu'} \frac{d}{dt} \frac{s_{13}^+ + s_{13}^-}{2} &= \frac{1}{\eta_s} \left(\frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} - \frac{s_{13}^+ + s_{13}^-}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Верхними индексами «+» и «-» обозначены скорости и напряжения на границах взаимодействующих блоков, δ_1 — толщина прослоек между блоками в направлении x_1 . Штрихами

обозначены упругие параметры материала прослоек. Модули с нулевыми индексами λ'_0 и μ'_0 относятся к «верхнему» упругому элементу b_0 , λ' и μ' — модули для «нижнего» элемента b , η_s и η_p — коэффициенты вязкости для продольных и поперечных волн. Совершенно аналогично записываются уравнения вдоль направлений оси x_2 и x_3 с толщиной прослоек δ_2 и δ_3 .

Итоговая система уравнений содержит (1) и три системы вида (2), записанные для всех направлений x_1 , x_2 и x_3 . Можно показать, что для ограниченной области блочного пространства Ω , полученная система является термодинамически согласованной. В случае упругих прослоек закон сохранения представляется как сумма кинетических и потенциальных энергий всех блоков и прослоек, равная потоку вектора Умова—Пойнтинга на поверхности области Ω блочного пространства. Закон сохранения для уравнений динамики блочной среды с упругими прослойками в трёхмерной постановке выписывается аналогичным образом, что и для уравнений в двумерной постановке [13]. В закон сохранения для среды с вязкоупругими прослойками добавятся члены, выражающие диссипацию механической энергии в прослойках.

Термодинамическая согласованность модели гарантирует корректность постановки начально-краевых задач с диссипативными граничными условиями. Для симметрической t -гиперболической системы, записанной в матричной форме

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (3)$$

диссипативные граничные условия будут иметь вид

$$U \sum_{i=1}^3 n_i B_i U \leq 0,$$

где n — вектор внешней нормали к области Ω . Можно показать, что обычные для теории упругости граничные условия в скоростях и напряжениях относятся к диссипативным [14].

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Система уравнений в блоках (1) записывается в матричной форме (3) с вектором неизвестных $U = (v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13})$. Алгоритм решения основан на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным [15]. Данный метод имеет второй порядок сходимости по времени и пространству, если схемы для решения одномерных расщеплённых задач имеют порядок не ниже второго. После процедуры расщепления для блоков получаются одномерные системы вида

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = B_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

каждая из которых состоит из независимых подсистем плоских продольных и поперечных волн. Для решения одномерных задач применяется схема «предиктор-корректор», основанная на методе распада разрыва Годунова [16]. Рассмотрим систему плоских волн

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x}.$$

На шаге предиктор схемы через скорости и напряжения с нижнего слоя по времени вычисляются инварианты Римана на границах ячеек сетки $I_j^\pm = \rho c v_{j\pm 1/2} \pm \sigma_{j\pm 1/2}$. На данном этапе применяется предельная реконструкция инвариантов, позволяющая достичь второго порядка аппроксимации на монотонных участках решения [17]. Далее вычисляются значения скоростей и напряжений на границах ячеек v_j , σ_j :

$$v_j = \frac{I_j^+ + I_j^-}{2\rho c}, \quad \sigma_j = \frac{I_j^+ - I_j^-}{2},$$

затем на шаге «корректор» вычисляются скорости и напряжения с текущего временного слоя

$$v^{j+1/2} = v_{j+1/2} + \frac{\tau}{\rho h}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \quad \sigma^{j+1/2} = \sigma_{j+1/2} + \frac{\rho c^2 \tau}{h}(v_{j+1} - v_j),$$

где шаг по времени τ удовлетворяет условию Куранта.

Уравнения (2) описывают распространение возмущений в прослойках между блоками вдоль оси x_1 , аналогичный вид имеют уравнения вдоль x_2 и x_3 . Система (2) состоит из трёх независимых подсистем. Рассмотрим, например, подсистему плоских продольных волн, связывающую v_1 , σ_{11} и s_{11} . Для краткости записи обозначим $v = v_1$, $\sigma = \sigma_{11}$, $s = s_{11}$, $b_0 = \lambda'_0 + 2\mu'_0$, $b = \lambda' + 2\mu'$, $\eta_p = \eta$. Для решения используется бездиссипативный вариант схемы Г. В. Иванова [18]. Для каждой прослойки по толщине отводится одна ячейка разностной сетки. Схема строится следующим образом. Система уравнений для плоских волн, проходящих через прослойку, записывается в виде

$$\begin{aligned} \rho' \frac{d}{dt} \frac{v^+ + v^-}{2} &= \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, & \frac{1}{b_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} &= \frac{v^+ - v^-}{\delta} - \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right), \\ \frac{1}{b} \frac{d}{dt} \frac{s^+ + s^-}{2} &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right). \end{aligned}$$

На шаге «корректор» разностной схемы уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho' \frac{\hat{v} - v}{\tau} &= \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, & \frac{1}{b_0} \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau} &= \frac{v^+ - v^-}{\delta} - \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right), \\ \frac{1}{b} \frac{\hat{s} - s}{\tau} &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь \hat{v} , $\hat{\sigma}$ относятся к верхнему временному слою, а v , σ — к нижнему, а знаками «+», «-» отмечены значения на границах соседних блоков (см рис. 3).

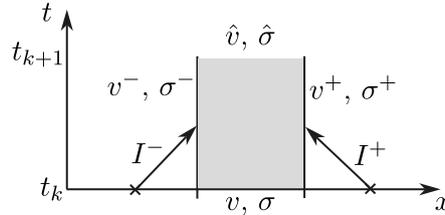


Рис. 3. Обозначения в разностной схеме для прослойки

После умножения соответствующих уравнений на $(\hat{v} + v)/2$, $(\hat{\sigma} + \sigma)/2$ и $(\hat{s} + s)/2$ и их последующего суммирования получим дискретный аналог закона сохранения

$$\rho' \frac{\hat{v}^2 - v^2}{2\tau} + \frac{1}{b_0} \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{2\tau} + \frac{1}{b} \frac{\hat{s}^2 - s^2}{2\tau} + = \frac{\sigma^+ v^+ - \sigma^- v^-}{\delta} + D + D^h,$$

где диссипация механической энергии $D = -(\sigma^+ + \sigma^- - s^+ - s^-)^2 / (4\eta)$, а мощность схемной диссипации имеет вид

$$\begin{aligned} D^h &= \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta} \left(\frac{\hat{v} + v}{2} - \frac{v^+ + v^-}{2} \right) + \frac{v^+ - v^-}{\delta} \left(\frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} - \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right) \left(\frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} - \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{\hat{s} + s}{2} + \frac{s^+ + s^-}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсутствие схемной диссипации имеет место при условии $\hat{\sigma} + \sigma = \sigma^+ + \sigma^-$, $\hat{v} + v = v^+ - v^-$ и $\hat{s} + s = s^+ - s^-$. Используя эти соотношения, перепишем уравнения (4):

$$\begin{aligned} v^+ + v^- &= 2v + \frac{\tau}{\rho'\delta}(\sigma^+ - \sigma^-), \quad \sigma^+ + \sigma^- = 2\sigma + \frac{b_0\tau}{\delta}(v^+ - v^-) - \frac{b_0\tau}{\eta} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right), \\ s^+ + s^- &= 2s + \frac{b\tau}{\eta} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения значений на границах блоков и прослойки v^\pm , σ^\pm воспользуемся соотношениями на характеристиках

$$I^+ = \rho c v^+ + \sigma^+, \quad I^- = \rho c v^- - \sigma^-,$$

из которых получаются выражения для $v^+ + v^-$ и $\sigma^+ + \sigma^-$:

$$v^+ + v^- = \frac{I^+ + I^- - (\sigma^+ - \sigma^-)}{\rho c}, \quad \sigma^+ + \sigma^- = I^+ - I^- - \rho c(v^+ - v^-).$$

Подстановка этих выражений в (5) даст

$$\begin{aligned} v^+ - v^- &= \frac{1}{\alpha} \left(\beta(I^+ - I^-) - 2\sigma - \frac{2b_0\tau}{2\eta + b\tau} s \right), \quad \sigma^+ - \sigma^- = \frac{\rho'\delta}{\rho'\delta + \rho c\tau} (I^+ + I^- - 2\rho c v), \\ s^+ + s^- &= \frac{b\tau}{2\eta + b\tau} (I^+ - I^- - \rho c(v^+ - v^-)) + \frac{4\eta}{2\eta + b\tau} s. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь коэффициенты α и β выражаются формулами

$$\alpha = \rho c + \frac{b_0\tau}{\delta} + \frac{b_0\tau\rho c}{2\eta} \left(1 - \frac{b\tau}{2\eta + b\tau} \right), \quad \beta = 1 + \frac{b_0\tau}{2\eta} \left(1 - \frac{b\tau}{2\eta + b\tau} \right).$$

Выражения для скоростей и напряжений на текущем временном слое внутри прослойки \hat{v} , $\hat{\sigma}$ определяются из уравнений шага «корректор» (4). При вычислении значений в приграничных узлах блоков участвуют выражения v^\pm , σ^\pm , которые получаются путём сложения и вычитания уравнений (5) и (6).

Одно из преимуществ данной схемы состоит в абсолютной устойчивости. Это позволяет обойти проблему согласования шагов по времени при вычислениях в блоках и прослойках. Можно также применить данную схему для решения уравнений в блоках. При этом на шаге «предиктор» схемы получится система линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей [18]. При отсутствии схемной диссипации данная схема имеет второй порядок сходимости, но является немоноотонной. Введение искусственной схемной диссипации позволяет сглаживать осцилляции.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Расчёты проводились на многопроцессорной компьютерной системе кластерной архитектуры серии МВС Института вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск). Авторский программный комплекс написан на языке Fortran с использованием библиотеки MPI (Message Passing Interface). Вычислительная область разбивается на большие блоки, представляющие собой параллелепипеды одинаковых размеров, каждый из которых обрабатывается одним MPI-процессом, на данном этапе задаётся толщина прослоек первого уровня δ'_j , $j = 1, 2, 3$. Обмен данными между процессами происходит на шаге «предиктор» разностной

схемы. Каждый большой блок в свою очередь разбивается на малые блоки одинаковых размеров с толщиной прослоек второго уровня δ_j'' , $j = 1, 2, 3$. Таким образом, реализуется двухуровневая блочная иерархическая среда. Можно реализовать большее количество иерархических уровней, разбивая малые блоки на более мелкие.

Рассмотрим задачу Лэмба в блочном полупространстве в трёхмерной постановке. Решение вычисляется в $\Omega = [0; L_1] \times [0; L_2] \times [0; L_3]$. Будем считать, что прослойки во всех направлениях имеют одинаковую толщину $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3$. На свободной поверхности полупространства $x_1 = 0$ задаются условия $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$, а на верхней грани блока $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ в точке $x_2 = x_3 = 0$ задаётся источник $\sigma_{11}(t) = p_0 \delta(t)$, $\delta(t)$ — дельта-функция. В расчётах задавалось импульсное воздействие постоянной амплитуды p_0 длительностью один шаг по времени τ . На границах $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ задаются условия симметрии

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = v_2 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{13} = \sigma_{32} = v_3 = 0.$$

На остальных границах ($x_1 = L_1$, $x_2 = L_2$ и $x_3 = L_3$) вычислительной области используется упрощённый вариант слабоотражающих граничных условий, состоящий в приравнивании нулю инвариантов Римана, переносящих возмущения в направлении противоположном распространению волны [19, 20]. Можно также ввести вдоль границ идеально согласованный слой (Perfectly Matched Layer) [21], проходя через который волны стремительно затухают без отражений от границ. На самом деле оба подхода имитируют прохождение волн вглубь *однородной* среды без отражений, то есть блочное строение среды за границами вычислительной области не учитывается.

Рассмотрим блочную среду из $45 \times 45 \times 45$ кубических блоков со стороной $H = 160$ мм, на каждый блок приходится 16^3 узлов равномерной разностной сетки. Плотность, скорости распространения продольных и поперечных волн в блоках соответственно равны $\rho = 2400$ кг/м³, $c_p = 4500$ м/с, $c_s = 2700$ м/с, а в прослойках $\rho' = 1200$ кг/м³, $c_p' = 1000$ м/с, $c_s' = 700$ м/с. На рис. 4 представлены линии уровня скорости v_1 в один и тот же момент времени ($t = 1.6$ мс) после приложения нагрузки в однородной упругой среде (а) и блочных средах с толщиной прослоек $\delta = 1.5$ мм и $\delta = 8$ мм (б), (с), а также в иерархической блочной среде, крупные блоки которой состоят из $9 \times 9 \times 9$ малых блоков со стороной 160 мм, толщина прослоек между крупными блоками $\delta' = 8$ мм, между малыми блоками $\delta'' = 1.5$ мм (д).

В среде с тонкими прослойками $\delta = 1.5$ мм за фронтами волн возникают осцилляции, с увеличением толщины прослоек их частота уменьшается, скорость распространения волн в среде также снижается. В иерархической среде сильнее заметно частичное отражение волн от прослоек, разделяющих крупные блоки.

Скорости распространения низкочастотных волн блочной среде можно определить по формулам [7]

$$\tilde{c}_p = \sqrt{\frac{\rho' c_p'^2}{\rho \Delta_p}}, \quad \tilde{c}_s = \sqrt{\frac{\rho' c_s'^2}{\rho \Delta_s}},$$

где

$$\Delta_p = \frac{\rho' c_p'^2}{\rho c_p^2} + \frac{\delta}{H}, \quad \Delta_s = \left(2 - \frac{\rho' c_s'^2}{\rho c_s^2}\right) \frac{\delta}{H} + \frac{\rho' c_s'^2}{\rho c_s^2},$$

H — размер блока, δ — толщина прослойки. Данные скорости используются для вычисления времени прибытия продольной волны t_P , поперечной t_S и волны Рэлея t_R в точку, удалённую от источника на расстояние r :

$$t_P = r/\tilde{c}_p, \quad t_S = r/\tilde{c}_s, \quad t_R = r/\tilde{c}_R.$$

Скорость рэлеевской волны определяется по формуле

$$\tilde{c}_R = \xi \tilde{c}_s,$$

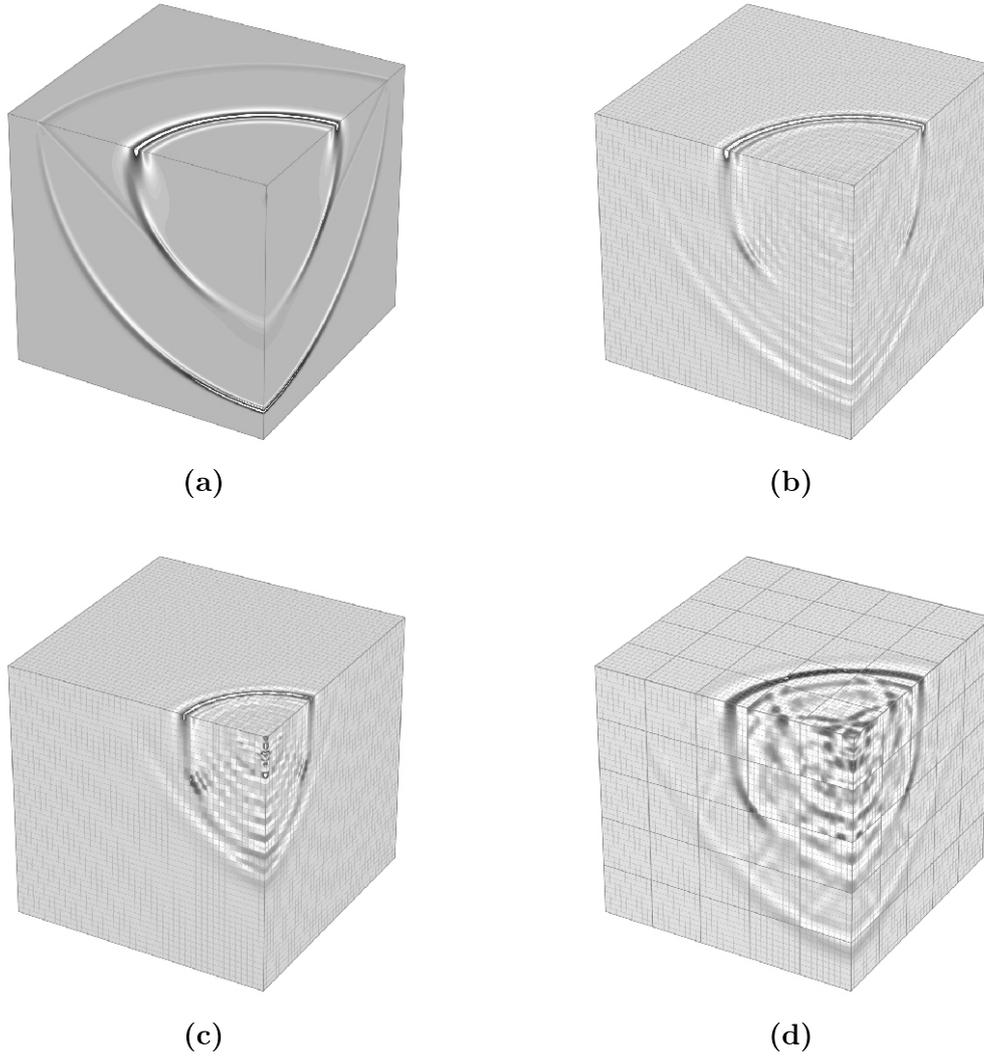


Рис. 4. Линии уровня v_1 в однородной упругой среде с параметрами ρ , c_p , c_s (а), в блочных средах с толщиной прослоек $\delta = 1.5$ мм (b) и $\delta = 8$ мм (с), в иерархической среде $\delta' = 8$ мм, $\delta'' = 1,5$ мм (d)

где ξ — положительный вещественный корень уравнения $\xi^6 - 8\xi^4 + 8(3 - 2\frac{\tilde{c}_s^2}{\tilde{c}_p^2})\xi^2 - 16(1 - \frac{\tilde{c}_s^2}{\tilde{c}_p^2}) = 0$, удовлетворяющий требованию $\tilde{c}_s^2/\tilde{c}_p^2 < 1$ [22].

Когда прослойки намного податливее блоков, можно воспользоваться моделью дискретно-периодической решётки, в узлах которой находятся жёсткие блоки в виде точечных масс [6]. Дискретно-периодическая модель среды представляет собой массив жёстких блоков массой M , связанных пружинами длиной l жёсткостью K_1 в направлениях осей x_1 , x_2 , x_3 . Уравнения движения дискретно-периодической системы записываются в перемещениях, упругие связи между блоками записываются в виде разностных соотношений [6]. Жёсткость у пружин в «диагональных» направлениях принимается $K_2 = K_1$, в такой решётке волны во всех направлениях распространяются с одинаковой скоростью. Численный алгоритм строится относительно просто, поскольку связи между блоками в модели представлены в разностном виде, а вторая производная по времени от перемещений аппроксимируется стандартным конечно-разностным способом [6]. Задача Лэмба для дискретно-периодической среды в двумерной постановке была решена аналитически [5]. Аналитическое решение задачи в трёхмерной постановке пока не

найдено.

Пусть материал блоков описывается параметрами $\rho = 6250$ кг/м³, $c_p = 6000$ м/с, $c_s = 3464$ м/с. Рассмотрим три блочные среды, в которых плотности прослоек равны $\rho' = 1800, 1200$ и 400 кг/м³, а соотношение импедансов блоков и прослоек $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 11.57, 80$ и 625 . Для всех материалов коэффициент Пуассона $\nu = \nu' = 0.25$. Блочная среда состоит из $45 \times 45 \times 45$ блоков со сторонами $H = 160$ мм, связанными прослойками толщиной $\delta = 10$ мм.

Сравним поведение волн на поверхности блочного полупространства для двух различных моделей блочной среды, когда на блок с координатами $k_1 = 1, k_1 = 1, k_3 = 1$ действует источник $v_1(t) = v_0 \delta(t)$. На рис. 5 представлены зависимости вертикальной компоненты скорости $v_1(t)$ в блоке с координатами $k_1 = 1, k_2 = 5, k_3 = 23$. Для модели с упругими блоками синим цветом показана зависимость $v_1(t)$ в центральной точке верхней грани блока. Красная линия соответствует решению для дискретно-периодической модели с массой блоков $M = \rho H^3$, длиной пружин $l = H + \delta$ и коэффициентами жёсткости пружин $K_1 = K_2 = \tilde{c}_p^2 M / (3l^2)$. Тонкой чёрной линией показано численное решение, полученное для однородной среды со средней плотностью $\tilde{\rho}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$ и скоростями распространения продольных и поперечных волн \tilde{c}_p, \tilde{c}_s .

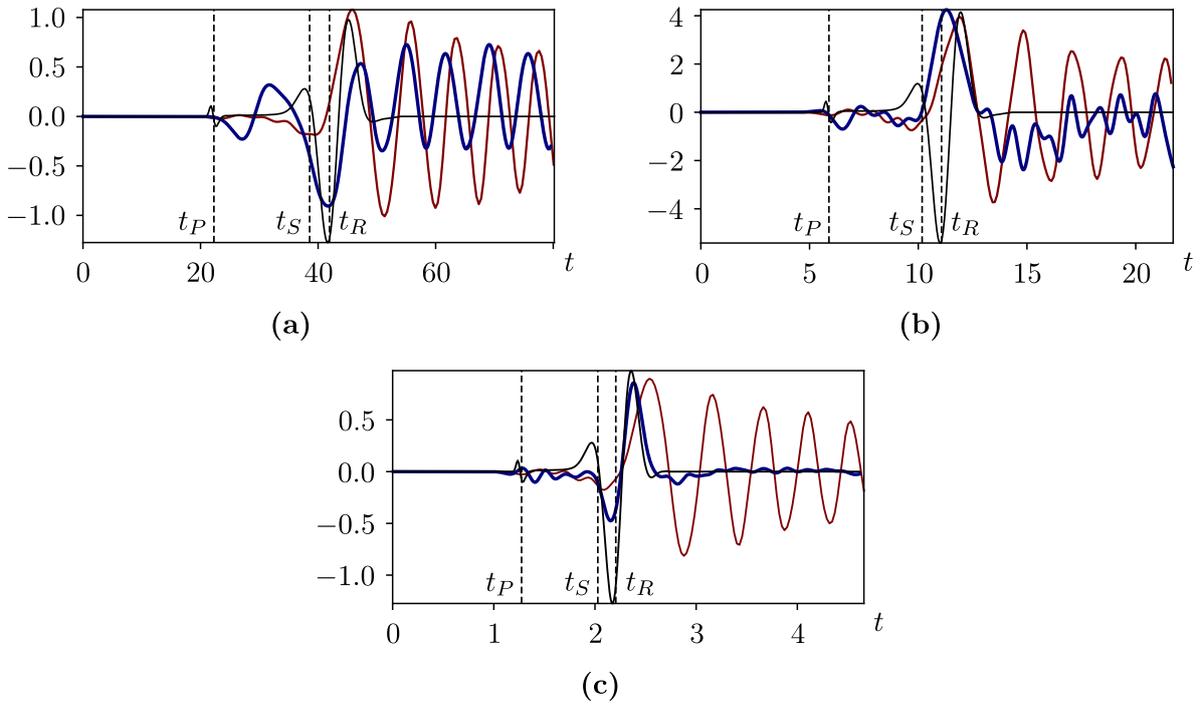


Рис. 5. Осциллограммы вертикальной компоненты скорости поверхностных волн $v_1(t)$ (t [мс]) блока $k_1 = 1, k_2 = 5, k_3 = 23$ для среды с $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 625$ (а), $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 80$ (б), $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 11.57$ (с). Красные линии показывают решение в дискретно-периодической решётке, синие — в блочной среде с упругими блоками и прослойками, чёрные — в однородной упругой среде

Во всех случаях наблюдаются колебания относительно решения, полученного для однородной среды. Характер поверхностных волн в блочной среде с достаточно податливыми прослойками качественно воспроизводится дискретно-периодической моделью. С вычислительной точки зрения выгоднее использовать дискретные модели для описания сред, в которых прослойки намного податливее блоков. В среде с более жёсткими прослойками, осцилляции относительно решения в однородной среде проявляются в меньшей степени. Представление блоков в виде жёстких масс не вполне адекватно для сред с достаточно жёсткими прослой-

ками, поскольку не учитывается распространение волн внутри блока. Более сложная модель, учитывающая упругие свойства блоков, записываемая относительно перемещений центральных точек блоков, была получена для решения задач в двумерной постановке в работе [7].

Верификация математической модели проведена на экспериментальных данных, опубликованных в статье [7]. В эксперименте на дуосном стенде сборка из $6 \times 6 \times 1$ блоков одинаковых размеров $89 \times 125 \times 250$ мм закреплена по контуру. Все блоки выполнены из оргстекла ($\rho = 2040$ кг/м³, $c_p = 2670$ м/с), прослойки толщиной 5 мм сделаны из резины с модулями сдвига $10^7/1.3$ Па и $1.35 \cdot 10^7/1.3$ Па в направлениях x_1 и x_2 , соответственно. В расчётах предполагается, что модули сдвига прослоек соответствуют состоянию, когда деформируются оба упругих элемента реологической схемы (рис. 2). Коэффициент Пуассона принимается равным 0.3 для блоков и для прослоек. Ударное воздействие в центральной точке верхней грани блока с координатами $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ длительностью $T_{imp} = 0.2$ мс задавалось по формуле

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \sin(\pi t/T_{imp}), & 0 < t \leq T_{imp}, \\ 0, & t > T_{imp}. \end{cases}$$

Акселерометр устанавливался в центральной точке боковой грани блока $k_1 = k_2 = 2$. На рис. 6 представлены графики ускорений из работы [7] и графики, полученные в результате численного моделирования. Зависимости ускорения от времени, измеренные в ходе эксперимента, обозначены синей пунктирной линией, красные сплошные показывают ускорения, рассчитанные по модели динамического взаимодействия блоков из той же статьи [7]. Кривые фиолетового цвета соответствуют вычислениям, выполненным для модели среды с упругими блоками и вязкоупругими прослойками, описываемых уравнениями (2). Недостаток данных о материале прослоек оставляет некоторый произвол в выборе параметров вязкоупругой среды (рис. 2). Параметры реологической схемы определяются при помощи τ -метода, предложенного в [23]. Данный метод используется для вычисления оптимальных параметров SLS модели вязкоупругого тела, при которых добротность будет приблизительно постоянна в определённом частотном диапазоне. В методе используются дополнительные предположения, связанные с малостью времён релаксаций, через которые вычисляются параметры среды. В расчётах предполагалось, что добротности для продольных и поперечных волн вязкоупругой среды приблизительно постоянны в частотном диапазоне от 10 до 5000 Гц и равны $Q_p = 20$ и $Q_s = 10$, соответственно. Данной ситуации соответствуют параметры среды: $\eta_p = 15 \cdot 10^3$ Па·с, $\eta_s = 2.6 \cdot 10^3$ Па·с, $\lambda_0 = 1 \cdot 10^7$ Па, $\mu_0 = 0.9 \cdot 10^7$ Па, $\lambda = 1.9 \cdot 10^8$ Па, $\mu = 4.1 \cdot 10^7$ Па.

Полученные в результате расчётов зависимости ускорений $w_i(t) = \partial v_i(t)/\partial t$, $i = 1, 2$ хорошо согласуются с данными эксперимента. Ускорения вычислялись как конечная разность $w(t) = (v(t + \tau) - v(t))/\tau$. Воспроизводится качественная картина поведения волн, несмотря на расхождения по фазе. Ускорение $w_1(t)$ практически повторяет экспериментальные данные. На графиках с ускорением $w_2(t)$ на начальном этапе измерений преобладают высокочастотные составляющие, они не предусматриваются в расчётной модели, предложенной в [7]. Также стоит отметить, что при расчёте задачи в двумерной постановке высокочастотная составляющая также подавляется. По-видимому, это связано с тем, что в эксперименте акселерометр располагается на боковой грани блока, что не может быть учтено в двумерной постановке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена трёхмерная модель динамики блочной среды с тонкими прослойками. Для описания прослоек применяются упрощённые уравнения, которые обеспечивают термодинамическую согласованность модели. Реализован программный комплекс для многопроцессорных систем кластерной архитектуры, позволяющий моделировать двухуровневые иерархические блочные среды. Поверхностные волны, распространяющиеся в блочной среде с достаточно податливыми прослойками, качественно схожи с поверхностными волнами в

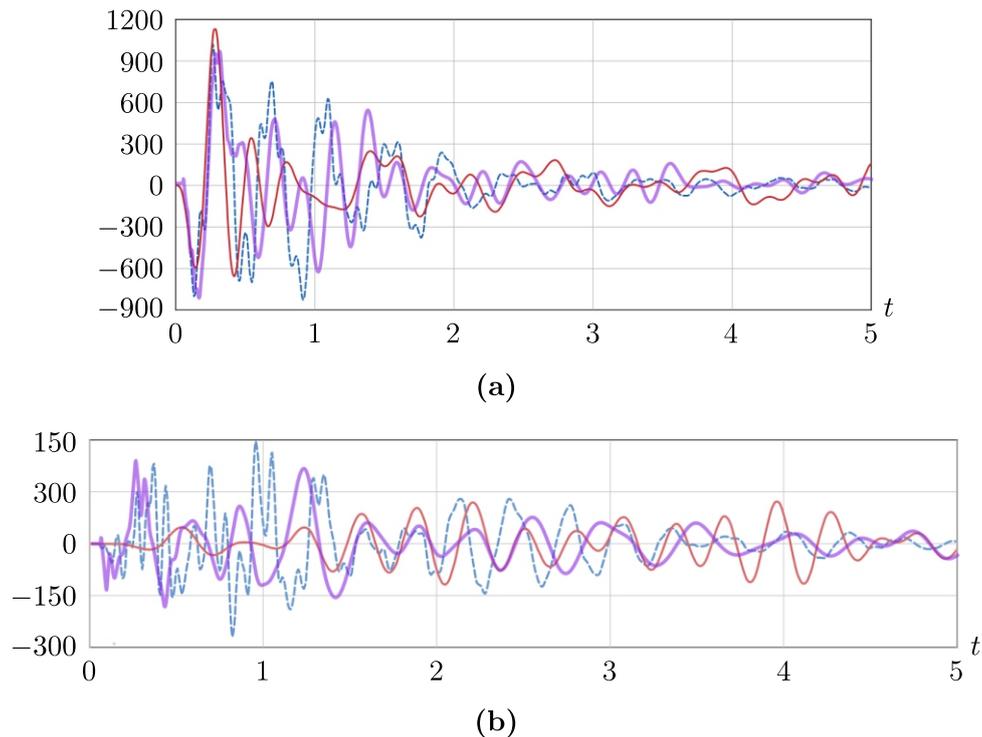


Рис. 6. Графики вертикальной составляющей ускорения $w_1(t)$ (а) и горизонтальной $w_2(t)$ (б) в центральной точке боковой поверхности блока $k_1 = k_2 = 2$ (t[мс])

дискретно-периодической решётке жёстких масс, соединённых пружинками. Предложенная модель блочно-слоистой среды с тонкими вязкоупругими прослойками хорошо воспроизводит экспериментальные измерения из работы [7].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2024-1378). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. С. 829–832.
2. Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И. Волны маятникового типа. 2. Методика экспериментов и основные результаты физического моделирования // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1996. № 4. С. 3–39.
3. Александрова Н. И., Черников А. Г., Шер Е. Н. Экспериментальная проверка одномерной расчётной модели распространения волн в блочной среде // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2005. № 3. С. 46–55.
4. Александрова Н. И., Шер Е. Н. Распространение волн в двумерной периодической модели блочной среды. Ч.1: Особенности волнового поля при действии импульсного источника // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2010. № 6. С. 57–68.

5. Alexandrova N. I. The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium // *Wave Motion*. 2014. V. 51, N 5. P. 818–832; DOI: 10.1016/j.wavemoti.2014.02.002
6. Alexandrova N. I. Seismic waves in a three-dimensional block medium // *Proc. R. Soc. A*. 2016. V. 472, N 2192. Article 20160111; DOI: 10.1098/rspa.2016.0111
7. Сарайкин В. А., Черников А. Г., Шер Е. Н. Распространение волн в двумерной блочной среде с вязкоупругими прослойками (теория и эксперимент) // *Прикл. мех. техн. физ.* 2015. Т. 56, № 4. С. 688–697; DOI: 10.15372/PMTF20150416
8. Садовский В. М., Садовская О. В., Похабова М. А. Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера // *Вычисл. мех. сплошн. сред.* 2014. Т. 7, № 1. С. 52–60; DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.1.6.
9. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Lukyanov A. A. Modeling of wave processes in blocky media with porous and fluid-saturated interlayers // *J. Comput. Phys.* 2017. V. 345. P. 834–855; DOI: 10.1016/j.jcp.2017.06.001.
10. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2018. V. 33, N 2. P. 111–121; DOI: 10.1515/rnam-2018-0010.
11. Садовская О. В., Садовский В. М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
12. Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997.
13. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum // *Wave Motion*. 2015. V. 52. P. 138–150; DOI: 10.1016/j.wavemoti.2014.09.008.
14. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
15. Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
16. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
17. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
18. Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твёрдых тел. Новосибирск: Сиб. унив. Изд-во, 2002.
19. Ильгамов М. А., Гильманов А. И. Неотражающие условия на границах расчётной области. М.: Физматлит, 2003.
20. Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Моделирование неотражающих условий при численном решении задач теории упругости // *Вычисл. технол.* 1999. Т. 4, № 1. С. 3–13.
21. Appelo D., Hagstrom G. Kreiss Perfectly matched layers for hyperbolic systems: General formulation, well-posedness and stability // *SIAM J. Appl. Math.* 2006. V. 67. P. 1–23; DOI: 10.1137/050639107
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10-ти томах Т. VII. Теория упругости. М.: Физматлит, 1985.
23. Blanch J. O., Robertsson J. O., Symes W. W. Modeling of a constant Q; methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique // *Geophysics*. 1995. V. 60. P. 176–184; DOI: 10.1190/1.1443744

UDC 539.3

**MODELING OF WAVE PROPAGATION IN A BLOCKY MEDIUM WITH
THIN VISCOELASTIC INTERLAYERS IN A SPATIAL SETTING**

© 2024 E. A. Efimov

*Institute of Computational Modeling of the Siberian Branch of the Russian Academy
of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia*

E-mail: efimov@icm.krasn.ru

Received 13.05.2024, revised 21.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. A three-dimensional model of a blocky medium with elastic blocks and thin elastic and viscoelastic interlayers is considered. The interlayers are described by simplified differential-difference relations. A numerical algorithm for solving dynamical problems based on splitting method is presented. The results of simulation of wave propagation in blocky half-space are presented. We compare the behaviour of surface waves arising in a blocky layered medium and in a discrete periodic medium consisting of rigid masses connected to each other by elastic springs. Results of computations using the proposed model are in good agreement with the experimental data.

Keywords: blocky-layered medium, elastic block, thin interlayer.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.402

REFERENCES

1. M. A. Sadovskii, “Natural lumpiness of rock,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **247**, 829–832 (1979) [in Russian].
2. M. V. Kurlenya, V. N. Oparin, and V. I. Vostrikov, “Pendulum-type waves. 2. Experimental methods and main results of physical modeling,” *Fiz.-Tekh. Probl. Razrab. Polezn. Iskopaemykh* (4), 3–39 (1996) [in Russian].
3. N. I. Aleksandrova, A. G. Chernikov, and E. N. Sher, “Experimental verification of a one-dimensional calculation model of wave propagation in a blocky medium,” *Fiz.-Tekh. Probl. Razrab. Polezn. Iskopaemykh* (3), 46–55 (2005) [in Russian].
4. N. I. Aleksandrova and E. N. Sher, “Propagation of waves in a two-dimensional periodic model of a blocky medium. Part 1: Features of the wave field under the action of a pulsed source,” *Fiz.-Tekh. Probl. Razrab. Polezn. Iskopaemykh* (6), 57–68 (2010) [in Russian].
5. N. I. Alexandrova, “The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium,” *Wave Motion* **51** (5), 818–832 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.02.002>
6. N. I. Alexandrova, “Seismic waves in a three-dimensional block medium,” *Proc. R. Soc. A* **472** (2192), 20160111 (2016). <https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0111>
7. V. A. Saraikin, A. G. Chernikov, and E. N. Sher, “Propagation of waves in a two-dimensional blocky medium with viscoelastic layers (theory and experiment),” *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **56** (4), 688–697 (2015) [in Russian]. <https://doi.org/10.15372/PMTF20150416>
8. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and M. A. Pokhabova, “Modeling of elastic waves in a blocky medium based on the Cosserat continuum equations,” *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred* **7** (1), 52–60 (2014) [in Russian]. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.1.6>
9. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and A. A. Lukyanov, “Modeling of wave processes in blocky media with porous and fluid-saturated interlayers,” *J. Comput. Phys.* **345**, 834–855 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.06.001>

10. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **33** (2), 111–121 (2018). <https://doi.org/10.1515/rnam-2018-0010>
11. O. V. Sadovskaya and V. M. Sadovskii, *Mathematical Modeling in Problems of Granular Media Mechanics* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
12. V. M. Sadovskii, *Discontinuous Solutions in Problems of Dynamics of Elastic-Plastic Media* (Nauka, Moscow, 1997) [in Russian].
13. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum,” *Wave Motion* **52**, 138–150 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.09.008>
14. S. K. Godunov, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
15. G. I. Marchuk, *Splitting Methods* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
16. S. K. Godunov, A. V. Zbrodin, M. Ya. Ivanov, and G. P. Kraiko, *Numerical Solution of Multidimensional Problems of Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
17. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Issues of Numerical Solution of Hyperbolic Systems of Equations* (Fizmatlit, Moscow, 2001) [in Russian].
18. G. V. Ivanov, Yu. M. Volchkov, I. O. Bogulskii, S. A. Anisimov, and V. D. Kurguzov, *Numerical Solution of Dynamic Problems of Elastic-Plastic Deformation of Solids* (Sib. Univ. Izd., Novosibirsk, 2002) [in Russian].
19. M. A. Il’gamov and A. I. Gil’manov, *Nonreflecting Conditions at the Boundaries of the Computational Domain* (Fizmatlit, Moscow, 2003) [in Russian].
20. S. A. Anisimov and V. D. Kurguzov, “Modeling of nonreflecting conditions in numerical solution of elasticity theory problems,” *Vychisl. Tekhnol.* **4** (1), 3–13 (1999) [in Russian].
21. D. Appelo, T. Hagstrom, and G. Kreiss, “Perfectly matched layers for hyperbolic systems: General formulation, well-posedness and stability,” *SIAM J. Appl. Math.* **67**, 1–23 (2006). <https://doi.org/10.1137/050639107>
22. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Fizmatlit, Moscow, 1985) [in Russian].
23. J. O. Blanch, J. O. Robertsson, and W. W. Symes, “Modeling of a constant Q; methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique,” *Geophysics* **60**, 176–184 (1995). <https://doi.org/10.1190/1.1443744>