

УДК 517.91

**МОДЕЛЬ ГИБРИДНОЙ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С РЕЖИМОМ
УБЕЖИЩА: РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА**© 2024 А. Н. Кириллов^а, А. М. Сазонов^б*Институт прикладных математических исследований,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН»,
ул. Пушкинская, 11, г. Петрозаводск 185910, Россия*E-mails: ^аkrllv1812@yandex.ru, ^бsazon-tb@mail.ruПоступила в редакцию 09.10.2023 г.; после доработки 02.12.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

Статья посвящена регуляризации математической модели динамики популяций хищника и жертвы с внутривидовой конкуренцией в виде гибридной динамической системы, состоящей из двух двумерных систем, переключающихся между собой. Переключения систем позволяют моделировать особый режим убежища (Refuge), при котором число жертв слишком мало, и хищникам трудно их обнаружить. Проведена регуляризация представленной модели посредством использования двух линий переключения с целью избежать учащающихся переключений (chattering) между системами. Для регуляризованной модели найдены предельные множества. Проводится исследование чувствительности модели по отношению к введению переключений. Найдено условие, при котором гибридизация качественно не меняет глобальную устойчивость равновесия. В ином случае предельными множествами являются циклы.

Ключевые слова: гибридные системы, динамика популяций, регуляризация, предельные множества.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.403

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию регуляризации и чувствительности гибридной системы с переключениями, моделирующей динамику популяций хищника и жертвы с учётом внутривидовой конкуренции жертв. Переключения позволяют моделировать режим убежища, при котором число доступных жертв слишком мало, и хищники практически не могут их обнаружить. Подробное описание режима убежища представлено в [1, 2]. Введение внутривидовой конкуренции в модель «хищник—жертва» позволяет стабилизировать систему, получив затухающие колебания численности популяций [3], что невозможно при использовании модели Лотки—Вольтерры [2]. Недостатком вольтерровской модели также является чувствительность к введению переключений, в то время как модель с внутривидовой конкуренцией более груба по отношению к переключениям [4].

Гибридные системы с переключениями, исследуемые методом определения движения на кривой S , разработанным А. Ф. Филипповым [5], активно используются для моделирования различных экологических процессов. Например, в работе [6] представлена модель динамики популяций сельскохозяйственных вредителей и подселяемых к ним естественных хищников-врагов, где внешнее воздействие на популяции моделируется посредством переключений. Статья [7] посвящена моделированию влияния неполной вакцинации на распространение инфекции с использованием системы с переключениями. Особый интерес в данном анализе представляют скользящие режимы. В работах [1, 4] представлены двумерные гибридные системы

с режимом «убежища». Для конкретных векторных полей построен режим скольжения на прямой $x = \lambda y$, исследована соответствующая динамика с переключениями.

Однако режим скольжения описывает идеальную динамику, тем более не реализующуюся в экологических системах, для которых не характерны быстрые переключения. Для преодоления этого недостатка в настоящей работе предлагается метод регуляризации гибридной системы, позволяющий снизить число переключений между подсистемами, и, тем самым, избежать учащающихся переключений (chattering) [8, 9]. Под регуляризацией гибридной системы с переключениями понимается сведение задачи со скользящим режимом к форме, для которой применимы классические методы исследования, тем самым избегая скольжения [8]. В [8] предложены некоторые конкретные методы регуляризации, такие как, например, введение запаздывания при переключениях или метод пограничного слоя. Метод, используемый в настоящей работе в некотором смысле аналогичен методу пограничному слоя.

Далее рассмотрим подробнее гибридную модель динамики популяций типа «хищник—жертва» с внутривидовой конкуренцией жертв, представленную в [4]. В качестве фазового пространства системы естественно рассматривать множество $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Линией переключения в данной модели является луч $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda y\}$, где x, y — количественные характеристики популяций жертв и хищников, соответственно, $\lambda > 0$ — заданная пороговая постоянная, характеризующая минимальное количество жертв, необходимое хищнику в единицу времени для поддержания всех жизненных функций, $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Смысл такой линии переключения состоит в следующем. Если количество жертв, приходящихся на одного хищника, достаточно велико, имеется взаимодействие популяций типа «хищник—жертва». В противном случае, при $\frac{x}{y} < \lambda$, система переходит в так называемый режим «убежища» (Refuge-regime), при котором взаимодействие популяций хищника и жертвы отсутствует.

Для описания динамики популяций в режиме взаимодействия при условии, что количество жертв, приходящихся на одного хищника, достаточно велико, то есть $\frac{x}{y} > \lambda$, рассмотрим модель, представленную в [3]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - by - cx) = f_1(x, y), \\ \dot{y} &= y(kbx - m) = f_2(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

где $x(t), y(t)$ — численности популяций жертв и хищников, соответственно, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ — коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников, $b > 0$ — коэффициент интенсивности потребления хищником жертв, $m > 0$ — коэффициент естественной смертности хищников, $0 < k < 1$ — доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство, $c > 0$ описывает внутривидовую конкуренцию. Таким образом, система (1) действует в множестве $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > \lambda y\} \subset \mathbb{R}_+^2$. В [3] показано, что система (1) имеет единственное асимптотически устойчивое равновесие $P = (x^*, y^*)$, где $x^* = \frac{m}{kb}$, $y^* = \frac{akb - cm}{kb^2}$ при условии

$$\frac{m}{kb} < \frac{a}{c}.$$

При этом, если $cm(c + 4kb) < 4a(kb)^2$, то $P = (x^*, y^*)$ — фокус, а $cm(c + 4kb) > 4a(kb)^2$, то $P = (x^*, y^*)$ — узел.

Однако, когда число жертв становится достаточно малым, то есть $\frac{x}{y} < \lambda$, хищникам сложно их найти, и система переключается в так называемый режим убежища (Refuge-regime) (см. [1, 4]), который в данном исследовании задаётся системой вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - cx) = g_1(x, y), \\ \dot{y} &= -my = g_2(x, y).\end{aligned}\tag{2}$$

Таким образом, система (2) действует в множестве $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x < \lambda y\} \subset \mathbb{R}_+^2$. Отметим, что в системе (2) отсутствует взаимодействие между хищниками и жертвами. Линеаризуя систему (2), нетрудно установить, что она имеет единственное асимптотически устойчивое равновесие $(\frac{a}{c}, 0)$.

Пусть, $\lambda \neq \lambda^*$, где $\lambda^* = \frac{mb}{akb - cm}$, то есть, положение равновесия системы (1) не лежит на луче l .

Замечание 1. Равенство $\lambda = \lambda^*$ задаёт поверхность коразмерности 1 в 6-мерном арифметическом пространстве параметров. Соответствующее множество параметров имеют лебегову меру ноль. В статье же рассматриваются случаи общего положения, что естественно при анализе процессов на основе конкретных математических моделей.

Определение 1. Будем называть псевдоравновесием гибридной системы точку X , лежащую на линии переключения, если векторное поле скольжения в этой точке нулевое, $v(X) = (0, 0)$.

Определение 2. Будем называть равновесие P или псевдоравновесие $\tilde{P}$ системы ОДУ глобально устойчивым, если решение этой системы $r(t, z_0) \rightarrow P(\tilde{P})$ при $t \rightarrow \infty$ для любой начальной точки z_0 .

Теорема 1 [4]. Пусть $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Тогда равновесие $P = (\frac{m}{kb}, \frac{akb - cm}{kb^2})$ глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+^2$ для гибридной системы (1), (2).

Теорема 2 [4]. Пусть $\lambda > \lambda^*$. Тогда у гибридной системы (1), (2) существует глобально устойчивое псевдоравновесие

$$\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{ak\lambda - m}{kc\lambda}, \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2} \right).$$

Проведём регуляризацию представленной модели. Суть данной техники состоит в изменении модели таким образом, чтобы переключения происходили с задержкой. В данной работе регуляризация системы происходит за счёт введения двух линий переключения $l_1 : x = \lambda_1 y$ и $l_2 : x = \lambda_2 y$, $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. При этом, на l_1 переключение происходит только от системы со взаимодействием популяций (1) к режиму убежища (2), а на l_2 наоборот. При использовании регуляризации такого типа возникает проблема исследования чувствительности результата к изменениям параметров, задающих линию переключения. Как будет показано, в предлагаемой модели в случае $\lambda < \lambda^*$ качественное поведение системы сохраняется, а при $\lambda > \lambda^*$ появляются предельные циклы. При этом, если предельный цикл единственный, то он является глобально устойчивым.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

1.1. Обозначения

Пусть $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ — начальная точка. Обозначим, $r(t, z_0)$ — решение системы (1), где $r(0, z_0) = z_0$, $r_R(t, z_0)$ — решение системы (2), где $r_R(0, z_0) = z_0$. Обозначим, $\gamma(z_0)$ — положительную полутраекторию системы (1), которая, как известно [3], является либо закручивающейся спиралью, при $cm(c + 4kb) < 4a(kb)^2$, либо параболой, при $cm(c + 4kb) > 4a(kb)^2$, $\zeta(z_0)$ — положительную полутраекторию системы (2).

Определение 3. Под положительной полутраекторией гибридной системы будем понимать последовательность отрезков положительных полутраекторий систем (1), (2), где конечная точка каждого отрезка является начальной для следующего.

Будем обозначать интервалы лучей $(AB) \subset l = \{(x, y) \in l : y_a < y < y_b\}$, где $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \theta y\}$, $\theta > 0$, $A = (x_a, y_a) \in l$, $B = (x_b, y_b) \in l$. Введём также порядок точек на луче: будем писать $A < B$, где $A = (x_a, y_a) \in l$, $B = (x_b, y_b) \in l$, если $x_a < x_b$.

1.2. Регуляризация модели

Далее работа будет посвящена регуляризации описанной выше модели. Для регуляризации модели введём два луча переключения. Рассмотрим гибридную динамическую систему, в которой системы (1) и (2) последовательно переключаются между собой. Переключение от системы (1) к (2) происходит на луче $l_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda_1 y\}$, обратное переключение происходит на луче $l_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda_2 y\}$, где $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Переключения предполагаются мгновенными и происходят строго по очереди. Тем самым, за счёт введения двух лучей переключения l_1, l_2 , реализуется задержка при переключении и происходит регуляризация гибридной системы, позволяющая избежать учащающегося переключения между системами, которое невозможно на практике для экологических систем.

Пусть, $\lambda_1, \lambda_2 \neq \lambda^*$, то есть, положение равновесия системы (1) не лежит на лучах l_1, l_2 .

Ясно, что если z_0 расположена в области $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x < \lambda_1 y\}$, то движение из неё будет происходить по траектории $\zeta(z_0)$, если z_0 расположена в области $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > \lambda_2 y\}$, то движение из неё будет происходить по траектории $\gamma(z_0)$. Если начальная точка $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$, расположена в области $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \lambda_1 y < x < \lambda_2 y\}$, то через неё проходят две положительные полутраектории систем (1) и (2), соответственно. Таким образом, для определения решения с начальной точкой $z_0 \in E$ требуется дополнительно определить начальный режим — (1) или (2).

2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Существуют единственная положительная полутраектория γ_1^* системы (1) и единственная положительная полутраектория ζ_1^* системы (2), для которых луч l_1 является касательным.*

Нетрудно показать, что точки касания луча l_1 и положительных полутраекторий систем (1), (2) имеют вид

$$Q_1 = (x_{q1}, y_{q1}) = \left(\frac{(a+m)\lambda_1}{c\lambda_1 + b(1+k\lambda_1)}, \frac{a+m}{c\lambda_1 + b(1+k\lambda_1)} \right) = \gamma_1^* \cap l_1,$$

$$\tilde{Q}_1 = (x_{\tilde{q}1}, y_{\tilde{q}1}) = \left(\frac{a+m}{c}, \frac{a+m}{c\lambda_1} \right) = \zeta_1^* \cap l_1.$$

Лемма 2. *Существуют единственная положительная полутраектория γ_2^* системы (1) и единственная положительная полутраектория ζ_2^* системы (2), для которых луч l_2 является касательным.*

Нетрудно показать, что точки касания луча l_2 и положительных полутраекторий систем (1), (2) имеют вид

$$Q_2 = (x_{q2}, y_{q2}) = \left(\frac{(a+m)\lambda_2}{c\lambda_2 + b(1+k\lambda_2)}, \frac{a+m}{c\lambda_2 + b(1+k\lambda_2)} \right) = \gamma_2^* \cap l_2,$$

$$\tilde{Q}_2 = (x_{\tilde{q}2}, y_{\tilde{q}2}) = \left(\frac{a+m}{c}, \frac{a+m}{c\lambda_2} \right) = \zeta_2^* \cap l_2.$$

Как можно видеть, точки касания $Q(\lambda) = \left(\frac{(a+m)\lambda}{c\lambda + b(1+k\lambda)}, \frac{a+m}{c\lambda + b(1+k\lambda)} \right)$ лежат на отрезке прямой $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y = \frac{a+m}{b} - \frac{c+bk}{b}x\}$, концами которого являются Q_1 и Q_2 . Отметим также, что возможен случай, когда $\gamma_1^* = \gamma_2^* = \gamma^*$, однако такая особенность не повлияет на дальнейшие выводы.

2.1. Дiffeоморфизмы, порождённые траекториями систем (1), (2)

Определение 4. Пусть точка $z \in l_2$ такова, что траектория системы (1), проходящая через z , первый раз (в смысле наименьшего временного промежутка) пересекает луч l_1 в некоторой точке $\tilde{z}$. Тогда имеем отображение $F : z \rightarrow \tilde{z} = F(z)$, которое будем называть отображением Пуанкаре луча l_2 в l_1 . Аналогично можно определить отображение Пуанкаре луча l_1 в l_2 вдоль траекторий системы (2).

Лемма 3. Пусть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < \lambda^*$. Тогда определён диффеоморфизм (отображение Пуанкаре) F :

$$F : [A_2\infty) \rightarrow [Q_1\infty),$$

$$F(z) = r(t^1(z), z) \in [Q_1\infty),$$

где $t^1(z)$ — момент времени, такой что $r(t, z) \in E \cup E_2$ для любого $t \in (0, t^1(z))$.

Доказательство. Обозначим, $r^*(t, z_0)$ — решение системы (1), соответствующее положительной полутраектории γ_1^* . Покажем, что при $\lambda < \lambda^*$ существует точка $A_1 = (x_{a1}, y_{a1}) \in l_2$, такая что $r^*(t_1, z_0) = A_1$, $r^*(t_q, z_0) = Q_1$, $r^*(t, z_0) \notin l_i, i = 1, 2$ при $t \in (t_q, t_1)$, $t_q < t_1$, то есть, A_1 — первая точка пересечения γ_1^* и l_2 после касания с l_1 в Q_1 . Поскольку равновесие $P \in E_2$ глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+^2$ для системы (1), то за конечное время положительная полутраектория γ_1^* из точки Q_1 попадает в E_2 , пересекая луч $l_2 \subset \partial E_2$ в некоторой точке A_1 . Покажем, что существует точка $A_2 = (x_{a2}, y_{a2}) \in l_2$, такая что $r^*(t_2, z_0) = A_2$, $r^*(t_q, z_0) = Q_1$, $r^*(t, z_0) \notin l_i, i = 1, 2$ при $t \in (t_2, t_q)$, $t_2 < t_q$ для начальной точки z_0 , то есть, A_2 — последняя точка пересечения γ_1^* и l_2 до касания с l_1 в Q_1 . Пусть, $\tau = (-1, \lambda)$ — нормаль к лучу $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda y\}$, направленная из E в E_1 , где $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Обозначим, $H(y) = f \cdot \tau$ — скалярное произведение векторного поля f на τ . Имеем для $z = (x, y) \in l$

$$H(y) = \lambda y(c\lambda + b(1 + \lambda k)y - (a + m)).$$

Тогда, в $\mathbb{R}_+^2$, $H(y) > 0$ при $y > \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$, где $\frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$ — ордината точки касания Q луча l с положительной полутраекторией системы (1). Таким образом, при обратном ходе времени любой луч l пересекается положительными полутраекториями системы (1) в направлении из E_1 в E , что означает существование точки A_2 . Очевидно, в случае существования нескольких точек пересечения γ_1^* и l_2 из них можно выбрать первую до касания γ_1^* с l_1 и последнюю после касания. Обозначим, $(A_2\tilde{Q}_2) = \{(x, y) \in l_2 : y_{a2} < y < \tilde{y}_{q2}\}$, $F(\tilde{Q}_2) = \gamma(\tilde{Q}_2) \cap l_1$, $(Q_1F(\tilde{Q}_2)) = \{(x, y) \in l_1 : y_{q1} < y < \tilde{y}_{q2}\}$.

Ясно, что для открытого интервала (A_1A_2) не существует образа при отображении F , поскольку для того, чтобы положительной полутраектории $\gamma(z)$ при $z \in (A_1A_2)$ пересечь l_1 , ей необходимо пересечь γ_1^* , что невозможно, и $\gamma(z) \cap l_1 = \emptyset$. Поскольку l_1 касается γ_1^* , и пересечение положительных полутраекторий невозможно, то положительная полутраектория $\gamma(z) \subset E_2$ для любой $z \in (OA_2)$. Отметим также, что на промежутке $(OA_1]$ при переключении от системы (2) к системе (1) происходит прошивание из области E в область E_2 , то есть, векторы скоростей обеих систем (1), (2) на интервале (OA_1) направлены в область E_2 . Поскольку для любой $z \in (OA_1]$ справедливо $\gamma(z) \cap \gamma_1^* = \emptyset$, то для любой $z \in (OA_1]$ имеем, $\gamma(z) \subset E_2$, то есть, $\gamma(z) \cap l_1 = \emptyset$. При этом, $(OA_1]$ либо отображается вдоль траекторий системы (1) в (A_1A_2) , либо $\gamma(z) \cap l_2 = \emptyset$. Положительная полутраектория $\gamma(z)$ при $z \in (A_2\infty)$ имеет хотя бы одну общую точку с l_1 , поскольку в противном случае $\gamma(z)$ пересечёт γ_1^* , что невозможно. Следовательно, для $z \in (A_2\infty)$ существует $t(z) : z \in (A_2\infty), r(t(z), z) \in (Q_1\infty)$. Обозначим $t_m = \min t(z)$, где $r(t(z), z) \in (Q_1\infty)$. Очевидно, для точки A_2 существует единственное t_m , такое что $Q_1 = r(t_m, A_2) \in l_1$. $\square$

Из леммы 3 следует, что $F(z) = r(t_m, z) \in [Q_1\infty)$, где $z \in [A_2\infty)$.

Лемма 4. Пусть $\lambda^* < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Тогда определён диффеоморфизм (отображение Пуанкаре) F :

$$F: (Q_2\infty) \rightarrow (Q_1\infty),$$

$$F(z) = r(t^2(z), z) \in (Q_1\infty),$$

где $t^2(z)$ — момент времени, такой что $r(t, z) \in E \cup E_2$ для любого $t \in (0, t^2(z))$.

Доказательство. Пусть $\tau = (-1, \lambda)$ — нормаль к лучу $l(\lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda y\}$, где $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Тогда скалярное произведение

$$f \cdot \tau = \lambda y(y(c\lambda + b + kb\lambda) - (a + m)).$$

Имеем, $f(z) \cdot \tau(z) > 0$ при $y > \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$, $f(z) \cdot \tau(z) < 0$ при $y < \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$, для $z \in l(\lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda y\}$. Положительная полутраектория $\gamma(z)$ имеет хотя бы одну общую точку с l_1 , поскольку равновесие P глобально устойчиво для системы (1), и $\lambda^* < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Следовательно, существует $t(z) : z \in (Q_2\infty), r(t(z), z) \in (Q_1\infty)$. Обозначим $t_m = \min t(z)$, где $r(t(z), z) \in (Q_1\infty)$. $\square$

Из леммы 4 следует, что $F(z) = r(t_m, z) \in (Q_1\infty)$, где $z \in (Q_2\infty)$.

Замечание 2. В дальнейшем для удобства отождествляем записи $GF(z_0)$ и $G(F(z_0))$.

Найдём области определения и значений диффеоморфизма G , отображения Пуанкаре, порождённого траекториями векторного поля $g = (g_1, g_2)$ системы (2).

Лемма 5. Пусть $x < \frac{a+m}{c}$. Тогда определён диффеоморфизм (отображение Пуанкаре) G :

$$G: l_1 \rightarrow (O\tilde{Q}_2),$$

$$G(z) = r_R(t^3(z), z) \in (O\tilde{Q}_2),$$

где $t^3(z)$ — момент времени, такой что $r_R(t, z) \in E \cup E_1$ для любого $t \in (0, t^3(z))$.

Доказательство. Пусть $\tau = (-1, \lambda)$, где $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Тогда скалярное произведение

$$g \cdot \tau = -\lambda y(a + m - c\lambda y).$$

Имеем, $g(z) \cdot \tau(z) > 0$ при $y > \frac{a+m}{c\lambda}$, $g(z) \cdot \tau(z) < 0$ при $y < \frac{a+m}{c\lambda}$, для $z \in l(\lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda y\}$. Положительная полутраектория $\zeta(z)$ имеет хотя бы одну общую точку с l_2 , поскольку равновесие $(\frac{a}{c}, 0)$ глобально устойчиво для системы (2). Следовательно, существует $t(z) : z \in l_1, r_R(t(z), z) \in (O\tilde{Q}_2)$. Обозначим $t_m = \min t(z)$, где $r_R(t(z), z) \in (O\tilde{Q}_2)$. Ясно, что в силу невозможности пересечения положительных полутраекторий $G(z) < \tilde{Q}_2$ для любого $z \in l_1$, так как $\tilde{Q}_2 = (\frac{a+m}{c}, \frac{a+m}{\lambda c}) = \zeta^* \cap l_2$ — точка касания, а касательная положительная полутраектория $\zeta^* \subset E_2$. $\square$

Из леммы 5 следует, что $G(z) = r_R(t_m, z) \in (O\tilde{Q}_2)$, где $z \in l_1$.

Лемма 6. Множество точек касания лучей $l(\lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda y\}$ и положительных полутраекторий системы (1) имеет вид

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y = \frac{a+m}{b} - \frac{c+bk}{b}x\}.$$

Доказательство. Очевидно. $\square$

Лемма 7. Пусть $\lambda > \lambda^*$, $L = \{z = (x, y) : f(z) = \mu g(z)\}$, где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y = \frac{k}{m}x(a - cx)\}.$$

Доказательство. Пусть $f = \mu g$. Если $M \in L$, то нетрудно показать, что $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y = \frac{k}{m}x(a - cx)\}$.

Псевдоравновесие $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (\frac{ak\lambda - m}{kc\lambda}, \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2})$. Отсюда, $\tilde{x}kc\lambda = \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda}$, следовательно, $\lambda = \frac{m}{k(a - c\tilde{x})}$. Подставив полученное λ в выражение для $\tilde{y}$, получим, $\tilde{y} = \frac{k}{m}x(a - cx)$. $\square$

Следствие 1. Равновесие $P = S \cap L$, псевдоравновесие $\tilde{P}(\lambda) = (\frac{ak\lambda - m}{kc\lambda}, \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2}) \in L$ для любого $\lambda > \lambda^*$.

Лемма 8. Пусть $\lambda > \lambda^*$, $\tau(x) = (y'(x), -1) = (\frac{k}{m}(a - 2cx), -1)$ — нормаль к L в точке $z = (x, \frac{k}{m}x(a - cx))$. Тогда

$$f(z) \cdot \tau(x) = \frac{bk^2}{m^2}x(a - cx)(a + m - 2cx) \left(\frac{m}{bk} - x \right),$$

$$g(z) \cdot \tau(x) = \frac{k}{m}x(a - cx)(a + m - 2cx),$$

где $\tau(x) = (y'(x), -1) = (\frac{k}{m}(a - 2cx), -1)$ — нормаль к L в точке $z = (x, \frac{k}{m}x(a - cx))$.

Доказательство. Найдём скалярные произведения $f(z) \cdot \tau(x)$, $g(z) \cdot \tau(x)$:

$$\begin{aligned} f(z) \cdot \tau(x) &= \frac{k}{m}(a - 2cx)x \left(a - \frac{k}{m}x(a - cx) - cx \right) + \frac{k}{m}x(a - cx)(kbx - m) = \\ &= \frac{bk^2}{m^2}x(a - cx)(a + m - 2cx) \left(\frac{m}{bk} - x \right). \end{aligned}$$

$$g(z) \cdot \tau(x) = \frac{k}{m}(a - 2cx)x(a - cx) + m \frac{k}{m}x(a - cx) = \frac{k}{m}x(a - cx)(a + m - 2cx).$$

$\square$

Следствие 2. Рассмотрим скалярное произведение $f(z) \cdot g(z)$, где $z = (x, y) \in L$ (рис. 1).

Если $m \geq a$, то

$f \cdot g > 0$, $f \cdot \tau > 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x < \frac{m}{bk}$,
 $f \cdot g < 0$, $f \cdot \tau < 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x \in (\frac{m}{bk}, \frac{a}{c})$.

Если $m < a$, $\frac{m}{bk} < \frac{a+m}{2c} < \frac{a}{c}$, то

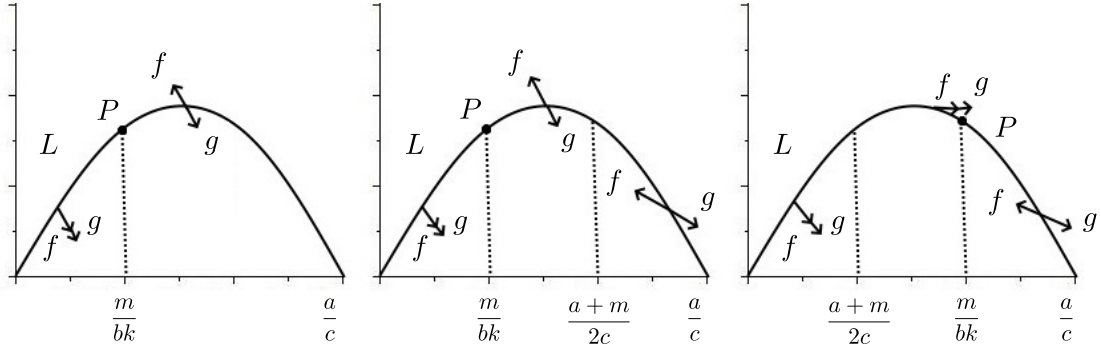
$f \cdot g > 0$, $f \cdot \tau > 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x < \frac{m}{bk}$,
 $f \cdot g < 0$, $f \cdot \tau < 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x \in (\frac{m}{bk}, \frac{a}{c})$,
 $f \cdot g < 0$, $f \cdot \tau < 0$, $g \cdot \tau < 0$ при $x > \frac{a}{c}$.

Если $m < a$, $\frac{m}{bk} > \frac{a+m}{2c}$, то

$f \cdot g > 0$, $f \cdot \tau > 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x < \frac{a+m}{2c}$,
 $f \cdot g > 0$, $f \cdot \tau < 0$, $g \cdot \tau < 0$ при $x \in (\frac{a+m}{2c}, \frac{m}{bk})$,
 $f \cdot g < 0$, $f \cdot \tau > 0$, $g \cdot \tau < 0$ при $x > \frac{m}{bk}$.

Следствие 2 показывает взаимное расположение векторных полей f, g и нормали τ к кривой L , и векторных полей f, g между собой, что даёт геометрическую характеристику поведения траекторий на L .

Обозначим, $D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y > \frac{a+m}{b} - \frac{c+bk}{b}x, \frac{x}{\lambda_2} < y < \frac{x}{\lambda_1}\}$, $L_d = L \cap D$. Представим D_0 в виде объединения $D_0 = D_1 \cup D_2$, где $D_1 \cap D_2 = L_d$, $(Q_1 Q_2) \subset \bar{D}_1$, $L_d \subset \bar{D}_2$. Отметим, что такое разбиение корректно, поскольку $\tilde{x}_1 > x_{q1}$, $\tilde{x}_2 > x_{q2}$.


 Рис. 1. Векторные поля f, g систем (1), (2) на L

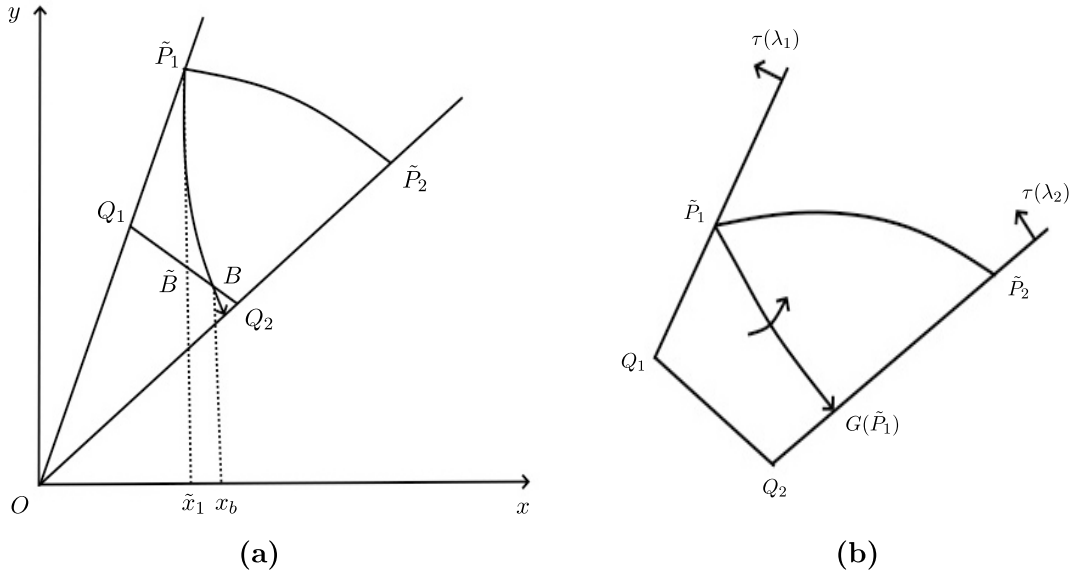
Лемма 9. Пусть $\lambda > \lambda^*$ и существует точка $B = (x_b, y_b) = (Q_1 Q_2) \cap \zeta(\tilde{P}_1)$, где $\tilde{P}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$. Тогда существует $\hat{\lambda} > \lambda_2$ такое, что $\tilde{x}_1 < x_b$ (рис. 2(a)).

Доказательство. Поскольку $\tilde{P}_1 \in L$, то $\tilde{x}_1 < \frac{a}{c}$, и, следовательно, скалярное произведение $g(\tilde{P}_1) \cdot (1, 0) = x(a - cx) > 0$.

Найдём точку $\tilde{B} = (\tilde{x}_b, \tilde{y}_b) = l_2 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \tilde{x}_1\}$. Имеем

$$\tilde{y}_b = \frac{a + m}{b} - \frac{c + bk}{b} \lambda_2 \tilde{y}_b.$$

Отсюда, $\tilde{y}_b = \frac{a+m}{b+(c+bk)\lambda_2}$. Следовательно, $\tilde{y}_b$ убывает при возрастании λ_2 . Пусть $\hat{\lambda}$ такое, что $B = l(\lambda^*) \cap \zeta(\tilde{P}_1)$. Тогда, при $\lambda_2 < \hat{\lambda}$, получим, $\tilde{y}_b > y_b$ и $\tilde{x}_1 < x_b$. $\square$


 Рис. 2. (a) лемма 9: $\tilde{x}_1 < x_b$; (b) D — инвариантное притягивающее множество

Следствие 3. При достаточно малой разности $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$: $G(\tilde{P}_1) > Q_2$.

При достаточно малом $\lambda_2 - \lambda_1$, по Следствию к лемме 9, $G(\tilde{P}_1) \in (Q_2 \infty)$. Обозначим, $D \subset D_0$ — неограниченное множество, имеющее в качестве границ лучи l_1, l_2 и положительную полутраекторию $\zeta(\tilde{P}_1)$ ($\zeta(\tilde{P}_1)$ — связное множество).

Теорема 3. Пусть $\lambda > \lambda^*$ и $\lambda_2 - \lambda_1$ достаточно мало. Тогда для любой начальной точки z_0 положительная полутраектория гибридной системы (1), (2) за конечное время входит в D и остаётся в D , то есть D — инвариантное притягивающее множество (аттрактор) (рис. 2(b)).

Доказательство. Для любого $z \in (\tilde{P}_1 \infty)$ скалярное произведение $g(z) \cdot \tau(\lambda) < 0$ для любого $0 < \lambda \leq \lambda_1$ (см. доказательство леммы 5). Следовательно, $\zeta(z)$ входит в D через $(\tilde{P}_1 \infty)$.

Для любого $z \in (G(\tilde{P}_1) \infty)$ скалярное произведение $f(z) \cdot \tau(\lambda) > 0$ для любого $\lambda \geq \lambda_2$ (см. доказательство леммы 4). Следовательно, $\gamma(z)$ входит в D через $(G(\tilde{P}_1) \infty)$.

Для любого $z \in \zeta(\tilde{P}_1)$ вектор $f(z)$ направлен в D . Следовательно, $\gamma(z)$ входит в D через $\zeta(\tilde{P}_1)$. Очевидно, положительные полутраектории $\zeta(z)$ при $z \in D$ не могут покинуть D через $\zeta(\tilde{P}_1)$, поскольку пересечение траекторий невозможно. $\square$

2.2. Взаимное положение траекторий систем (1), (2)

Лемма 10. Пусть $\lambda < \hat{\lambda}$, $A_2 < \tilde{Q}_2$. Тогда для любого $\lambda_2 \in (\lambda, \hat{\lambda})$ для любых начальных точек $z_0 \in (A_2 \tilde{Q}_2)$ справедливо $GF(z_0) < z_0$.

Доказательство. Обозначим, $W = A_2 Q_1 F(\tilde{Q}_2) \tilde{Q}_2 \subset E$ — множество, ограниченное лучами l_1, l_2 и положительными полутраекториями γ^* и $\gamma(\tilde{Q}_2)$.

Проведём доказательство методом от противного. Предположим, что существует точка $z_0 \in (A_2 \tilde{Q}_2)$, такая что $GF(z_0) \geq z_0$. Тогда существует $z \in W$, такая что $z = \gamma(z_0) \cap \zeta(F(z_0))$. Положительная полутраектория $\gamma(z_0)$ разбивает W на два множества: ограниченное W_1 , W_2 , где $A_2 \in W_1$, $\tilde{Q}_2 \in W_2$. Чтобы $GF(z) \geq z$ необходимо, существование точки $z = \gamma(z_0) \cap \zeta(F(z_0))$. При этом, векторное поле $g(z)$ должно быть направлено в область W_2 . Ясно, что существует $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, такое что $z \in l(\lambda)$. Тогда, если $v(z) = (v_1, v_2) \subset l(\lambda)$ — филипповское векторное поле в точке $z \in l(\lambda)$, то $v_1 > 0$, $v_2 > 0$. Последнее невозможно, так как филипповское векторное поле для любой точки z на луче $l(\lambda)$ имеет вид

$$v(z) = (v_1, v_2) = yS(y)(\lambda i + j), \quad (3)$$

где $S(y) = \frac{(ak\lambda - m - kc\lambda^2 y)}{1 + k\lambda}$, i, j — соответствующие орты. Тогда, если $\lambda < \frac{m}{ak}$, то $S(y) < 0$ для всех $y > 0$, если $\lambda \in (\frac{m}{ak}, \hat{\lambda})$ имеем, $S(y) < 0$ при $y > \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2} = \tilde{y}_2$. Следовательно, $S(y) < 0$ для всех $z \in W$. Итак, для $z = \gamma(z_0) \cap \zeta(F(z_0))$ имеем, $v_1 < 0$, $v_2 < 0$. Получили противоречие, следовательно, $GF(z_0) < z_0$. $\square$

Лемма 11. Пусть $\lambda > \hat{\lambda}$. Тогда для любого $\lambda_1 \in (\hat{\lambda}, \lambda)$ справедливо

$GF(z_0) < z_0$, если $z_0 \in D_2$,

$GF(z_0) > z_0$, если $z_0 \in D_1$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in D_2$. Проведём доказательство методом от противного. Предположим, что существует точка $z \in l_2 \cap D_2$, такая что $GF(z) \geq z$. Ясно, что существует $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, такое что $z \in l(\lambda)$. Положительная полутраектория $\gamma(z)$ разбивает D_2 на два множества: ограниченное W_1 , где $L_d \subset W_1$, и неограниченное W_2 . Чтобы $GF(z) \geq z$ необходимо, чтобы векторное поле $g(z)$ было направлено в область W_2 . Тогда, если $v(z) = (v_1, v_2)$ — филипповское векторное поле в точке $z \in l_2$, то $v_1 > 0$, $v_2 > 0$. Последнее невозможно, так как филипповское векторное поле для любой точки z на луче $l(\lambda)$ имеет вид (3). Следовательно, $v_1 < 0$, $v_2 < 0$ в D_2 . Получили противоречие, следовательно, $GF(z_0) < z_0$.

Аналогичные рассуждения можно провести для $z_0 \in D_1$. $\square$

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

3.1. Случай $\lambda < \lambda^*$

Теорема 4. Пусть $\lambda < \lambda^*$. Тогда существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для любого $\lambda_2 \in (\lambda, \lambda + \delta)$ для любой начальной точки гибридной системы (1), (2) положение равновесия P глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+^2$ (рис. 3).

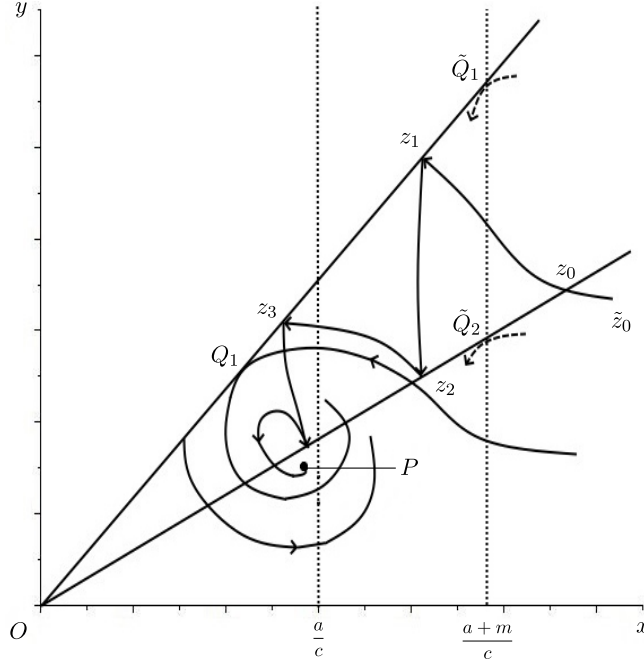


Рис. 3. Глобальная устойчивость P при $\lambda < \lambda^*$

Доказательство. Пусть начальная точка $\tilde{z}_0 \in E_1 \cup E$, причём начальным режимом в E является, является режим убежища, описываемый системой (2). Тогда, согласно вышеизложенному, существует единственная точка $z_0 = \gamma(\tilde{z}_0) \cap l_2$.

Пусть начальная точка $\tilde{z}_0 \in E_2 \cup E$, причём начальным режимом в E является режим взаимодействия, описываемый системой (1). Тогда либо существует $z_0 = (x_0, y_0) = r(t_l, \tilde{z}_0) \in l_2$, такая что $r(t, \tilde{z}_0) \notin l_2$ для всех $t \in [0, t_l)$, либо $\gamma(\tilde{z}_0) \subset E_2$, и, следовательно, $r(t, \tilde{z}_0) \rightarrow P$ при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим случай, когда $\gamma(\tilde{z}_0) \cap l_2 = z_0$. Пусть точка касания $\tilde{Q}_2 > A_2$, где $\tilde{Q}_2 = \gamma_1^* \cap l_2$. Возможны четыре случая, в зависимости расположения точки z_0 .

Случай 1: $z_0 \in (A_1 A_2)$. Поскольку $\gamma_1^* \cap \gamma(z_0) = \emptyset$, то $\gamma(z_0) \cap l_1 = \emptyset$, и переключение к системе (2) не произойдёт. Таким образом, $\gamma(z_0) \subset E_2 \cup E$, и $r(t, \tilde{z}_0) \rightarrow P$ при $t \rightarrow \infty$ [3].

Случай 2: $z_0 \in (OA_1]$. Как было указано ранее, на $(OA_1]$ имеем прошивание из E в E_2 , при этом $\gamma_1^* \cap l_2 = A_1$. Таким образом, как было указано ранее, $(OA_1]$ либо отображается вдоль траекторий системы (1) в $(A_1 A_2)$, либо $\gamma(z_0) \cap l_2 = \emptyset$. Поэтому $F(z_0) = \emptyset$, и $\gamma(z_0) \subset E_2 \cup E$. Следовательно, $r(t, \tilde{z}_0) \rightarrow P$ при $t \rightarrow \infty$.

Случай 3: $z_0 \in (A_2 \tilde{Q}_2)$. В этом случае $\gamma(z_0) \cap l_1 = z_1 = (x_1, y_1)$, и происходит переключение к (2), далее $\zeta(z_0) \cap l_2 = z_2 = (x_2, y_2)$. По лемме 10, $z_2 < z_0$. Повторяя данную процедуру, получаем последовательность точек $z_i, i = 0, 1, \dots$, где $z_{2i+1} \in l_1, z_{2i} \in l_2$. Покажем, что существует $i^* \in \mathbb{N}$, такое что $z_{2i^*} \in (OA_2)$. Предположим обратное, что $z_{2i} \in (A_2 \tilde{Q}_2)$ для всех $i = 0, 1, \dots$. В силу невозможности пересечения положительных полутраекторий и леммы 10, имеем $z_{2i+1} < z_{2i-1}$ для любого i . Таким образом, получаем две убывающие числовые последовательности x_{2i-1}, y_{2i-1} , ограниченные снизу. Следовательно, у каждой из них существует

предел $x_l = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{2i-1}$, $y_l = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{2i-1}$. Обозначим, $z_l = (x_l, y_l)$. Если $x_l > x_{q1}$, то существует $\tilde{z}_l = (\tilde{x}_l, \tilde{y}_l) = FG(z_l)$, и $\tilde{x}_l < x_l$ (лемма 10), что противоречит тому, что $x_{2i-1} \rightarrow x_l$. Следовательно, $z_l = Q_1$. Тогда, в силу непрерывности g_i , $i = 1, 2$, предельной точкой для $z_{2i} \in l_2$ будет $G(Q_1)$. По лемме 10, $G(Q_1) \in (OA_2)$, и в силу непрерывности g_i , $i = 1, 2$, существует i^* , такое что $z_{2i^*} \in (OA_2)$. Таким образом, переходим либо к случаю 1, либо к случаю 2, в каждом из которых $r(t, \tilde{z}_0) \rightarrow P$ при $t \rightarrow \infty$.

Случай 4: $z_0 \in (\tilde{Q}_2\infty)$. В этом случае $\gamma(z_0) \cap l_1 = z_1 = (x_1, y_1)$, и происходит переключение к (2), далее $\zeta(z_0) \cap l_2 = z_2 = (x_2, y_2)$. Как было показано ранее, $z_2 \in (A_2\tilde{Q}_2)$, и далее переходим к случаю 3.

Если $A_2 > \tilde{Q}_2$, то для любого $z_0 \in l_2$ получим либо $z_2 \in (A_1A_2)$, либо $\gamma(z_0) \cap l_1 = \emptyset$, и дальнейшее переключение к системе (2) невозможно. $\square$

3.2. Случай $\lambda > \lambda^*$

Будем понимать под траекторией точки $p \in \mathbb{R}_+^2$ гибридной системы с переключениями, как это общепринято, траекторию, сшитую (в моменты переключений решений) из дуг траекторий систем (1), (2), а именно множество $\eta(p) = \{f(t, p), t \in \mathbb{R}\}$, где $f(t, p)$ — соответствующее этой траектории решение, $f(0, p) = p$, f — непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция, совпадающая с решением системы (1) или (2) на временных промежутках, ограниченных точками переключения. Точнее, пусть $\{\tau_i\}$ — множество моментов времени переключения между (1) и (2), $i \in \mathbb{N}$, $\tau_i < \tau_{i+1}$. Предположим, что при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ динамика задаётся системой (1). Тогда $f(t, p) = r(t - \tau_{i-1}, p)$ при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$. Далее, пусть при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ динамика регулируется системой (2). Тогда $f(t, p) = r_R(t, r(\tau_i - \tau_{i-1}, p))$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, и далее, аналогично, происходит чередование, конечное или бесконечное, в зависимости от точки p , решений систем (1), (2). Тогда на случай гибридной системы переносится классическое нижеследующее определение [17].

Определение 5. Пусть существует последовательность $\{t_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in \mathbb{R}$, $t_{n+1} > t_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n, p) = q.$$

Тогда точка q называется ω -предельной точкой для траектории $\eta(p)$. При этом множество всех ω -предельных точек траектории $\eta(p)$ называется её ω -предельным множеством.

Теорема 5. Пусть $\lambda > \lambda^*$. Тогда существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для любого $\lambda_2 \in (\lambda, \lambda + \delta)$ существует предельный цикл $C \subset D$ гибридной системы (1), (2). При этом, если C единственный, то он глобально устойчив, то есть C является ω -предельным множеством для любой положительной полутраектории гибридной системы (1), (2).

Доказательство. Пусть начальная точка $z_0 \in (\tilde{P}_2\infty)$. Тогда, согласно лемме 11, $GF(z_0) < z_0$.

Рассмотрим последовательности $\{z_{2i+1} \in (Q_1\infty)\}$, $\{z_{2i} \in (Q_2\infty)\}$ (рис. 4(a)), где $z_{2i+1} = F(z_{2i})$, $z_{2i+2} = G(z_{2i+1})$, $i = 0, 1, \dots$. По лемме 11, $z_{2i+1} < z_{2i-1}$, следовательно, $z_{2i+2} < z_{2i}$ для всех $z_{2i+1} > \tilde{P}_1$. Получим убывающую числовую последовательность x_{2i-1} . Поскольку, $x_{2i-1} > \tilde{x}_1$ для любого i , то по лемме 9, данная последовательность ограничена снизу $\tilde{x}_1$. Следовательно, у неё существует предел $x_{odd} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{2i-1}$, $y_{odd} = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{2i-1}$. Обозначим за $z_{odd} = (x_{odd}, y_{odd})$ предельную точку для $\{z_{2i+1}\}$. Тогда точка $z_{even} = (x_{even}, y_{even}) > G(\tilde{P}_1)$ будет предельной для $\{z_{2i}\}$ (рис. 4(b)).

Покажем, что $z_{odd} \neq \tilde{P}_1$. Предположим обратное, $z_{odd} = \tilde{P}_1$. Тогда $z_{even} = G(\tilde{P}_1)$, и получаем цикл $\tilde{P}_1G(\tilde{P}_1)$, так как $FG(\tilde{P}_1) = \tilde{P}_1$. При этом, по Следствию к лемме 8, положительные полутраектории $\gamma(z)$ системы (1) не могут пересечь дугу $\tilde{P}_1G(\tilde{P}_1)$ в направлении отрезка

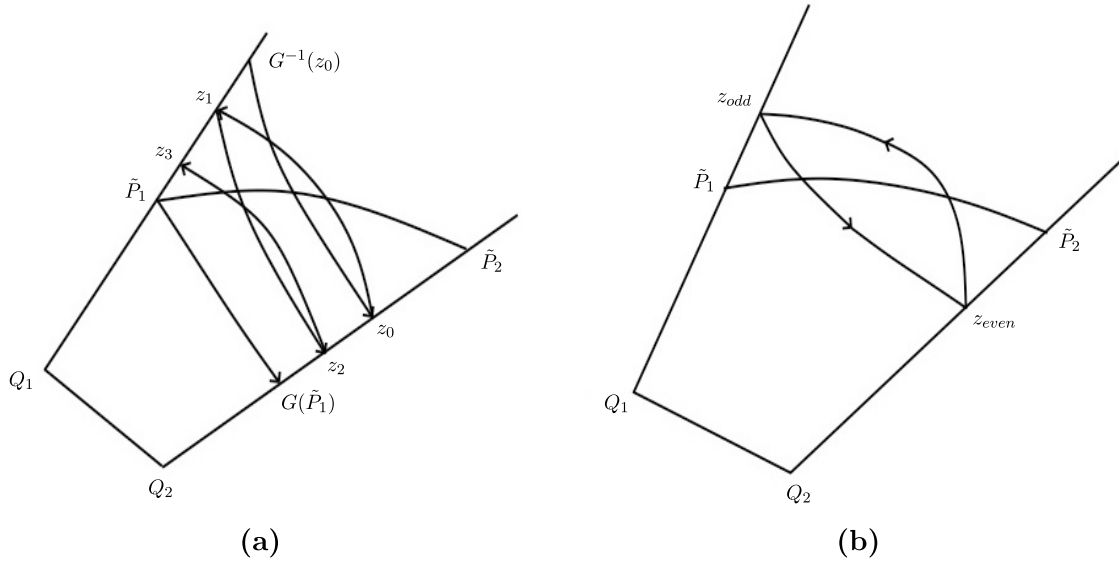


Рис. 4. (a) поведение положительных полутраекторий в D при $\lambda > \lambda^*$; (b) предельный цикл $z_{odd}z_{even}$ при $\lambda > \lambda^*$

(Q_1Q_2) . Следовательно, две различные дуги $F^{-1}(\tilde{P}_1)\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_1G(\tilde{P}_1)$ положительных полутраекторий системы (1) проходят через точку $\tilde{P}_1$, что невозможно. Итак, $z_{odd}\tilde{P}_1$, $z_{even} > G(\tilde{P}_1)$, и $z_{odd}G(z_{odd})FG(z_{odd})$ — предельный цикл, то есть, $z_{odd} = GF(z_{odd})$ (рис. 4(b)).

В случае, если данный предельный цикл $z_{odd}z_{even}$ единственный, то из доказательства его существования и теоремы 3 следует, что он будет являться ω -предельным множеством для любой начальной точки $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ гибридной системы (1), (2), что мы будем называть глобальной устойчивостью цикла.

Аналогичные рассуждения можно провести для $z_1 \in (Q_1\tilde{P}_1)$, исследуя последовательность точек $z_{2i} \in (Q_2\tilde{P}_2)$, для которой предельная точка $z_{even} \in (Q_2\tilde{P}_2)$. $\square$

Следствие 4. Пусть существуют два предельных цикла, которые содержат точки z_{odd}, w_{odd} соответственно и $z_{odd} < w_{odd}$. Тогда $z_{even} < w_{even}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена регуляризация гибридной модели динамики популяций хищника и жертвы с внутривидовой конкуренцией посредством использования двух линий переключения с целью избежать учащающихся переключений (chattering) между системами, что несвойственно для систем взаимодействующих популяций. Основными результатами исследования являются предельные множества данной динамической системы, а также выводы о чувствительности модели по отношению к введению переключений. Показано, что в случае $\lambda < \lambda^*$ введённые переключения качественно не меняют характер поведения положительных полутраекторий, сохраняя глобальную устойчивость равновесия P системы (1). Однако при $\lambda > \lambda^*$ поведение положительных полутраекторий изменяется, предельными множествами становятся циклы, в случае существования единственного цикла, он является глобально устойчивым. Таким образом, можно сказать, что значение λ^* для параметра λ является бифуркационным для представленной гибридной системы. Кроме того, отметим, что для случая $\lambda > \lambda^*$ возникает проблема исследования вопроса о количестве предельных циклов в гибридной системе (1), (2).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Института прикладных математических исследований, ФИЦ «Карельский научный центр РАН». Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen X., Huang L.* A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model // *J. Math. Anal. Appl.* 2015. V. 428, N 2. P. 817–837; DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045
2. Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Гибридная модель динамики популяций с режимом убежища: регуляризация и самоорганизация // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.* 2023. Т. 33, № 3. С. 467–482; DOI: 10.35634/vm230306
3. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
4. Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Модель «хищник–жертва» с переменной структурой взаимодействия // *Тр. КарНЦ РАН.* 2023. № 4. С. 36–40; DOI: 10.17076/mat1767
5. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
6. *Deng J., Tang S., Lai C.-H.* Non-smooth ecological systems with a switching threshold depending on the pest density and its rate of change // *Nonlinear Anal. Hybri.* 2021. V. 42, N 8. P. 1–24; DOI: 10.1016/j.nahs.2021.101094
7. *Zhang Y., Xiao Y.* Global dynamics for a Filippov epidemic system with imperfect vaccination // *Nonlinear Anal. Hybri.* 2020. V. 38, N 6. P. 1–20; DOI: 10.1016/j.nahs.2020.100932
8. Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
9. *Acary V., Brogliato B., Orlov Y.* Chattering-Free Digital Sliding-Mode Control with State Observer and Disturbance Rejection // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2012. V. 57, N 5. P. 1–16; DOI: 10.1109/TAC.2011.2174676
10. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
11. Завалишин Н. Н., Логофет Д. О. Моделирование экологических систем по заданной диаграмме «запасы–потоки» // *Матем. моделирование.* 1997. Т. 9, № 9. С. 3–17.
12. *Shih S.-D.* The period of a Lotka–Volterra system // *Taiwan. J Math.* 1997. V. 1, N 4. P. 451–470.
13. *Atehortua A., Ladino L., Valverde J.* Population dynamics of a two-stage migratory species with predation and capture // *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 2014. V. 16, N 1. P. 27–39; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2013.09.003
14. Петросян Л. А., Захаров В. В. Математические модели в экологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.
15. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва–Ижевск: ИКИ, 2003.
16. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физмалит, 2011.
17. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ОГИЗ, 1947.

UDC 517.91

A MODEL OF HYBRID POPULATION DYNAMICS WITH REFUGE-REGIME: REGULARIZATION AND LIMIT SETS

© 2024 A. N. Kirillov^a, A. M. Sazonov^b

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Center,
Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185910 Russia*

E-mails: ^akrllv1812@yandex.ru, ^bsazon-tb@mail.ru

Received 09.10.2023, revised 02.12.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. The paper is devoted to the regularization of the population “predator–prey” dynamics with the preys’ intraspecific competition. The model has the form of the hybrid system consisting of the two two-dimensional systems switching between each other. The switching of the systems allows us to reproduce the special Refuge-regime when the prey number is very small and the predators have complications to find preys. The regularization of the system by using two switching lines to avoid chattering is provided. The limit sets for the regularized model are established. The studying of the model sensitivity to the switchings. The condition under which the hybridization does not change the global stability of an equilibrium is derived. In the other case the limit sets are cycles.

Keywords: hybrid system, population dynamics, regularization, limit set.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.403

REFERENCES

1. X. Chen and L. Huang, “A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model,” *J. Math. Anal. Appl.* **428** (2), 817–837 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.045>
2. A. N. Kirillov and A. M. Sazonov, “Hybrid model of population dynamics with a refuge regime: Regularization and self-organization,” *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki* **33** (3), 467–482 (2023) [in Russian]. <https://doi.org/10.35634/vm230306>
3. Yu. M. Svirezhev and D. O. Logofet, *Stability of Biological Communities* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
4. A. N. Kirillov and A. M. Sazonov, “‘Predator–prey’ model with variable interaction structure,” *Tr. KarNTs RAN* (4), 36–40 (2023) [in Russian]. <https://doi.org/10.17076/mat1767>
5. A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side* (Nauka, Moscow, 1985) [in Russian].
6. J. Deng, S. Tang, and C.-H. Lai, “Non-smooth ecological systems with a switching threshold depending on the pest density and its rate of change,” *Nonlinear Anal. Hybri.* **42** (8), 1–24 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101094>
7. Y. Zhang and Y. Xiao, “Global dynamics for a Filippov epidemic system with imperfect vaccination,” *Nonlinear Anal. Hybri.* **38** (6), 1–20 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2020.100932>
8. V. I. Utkin, *Sliding Modes in Optimization and Control Problems* (Nauka, Moscow, 1981) [in Russian].
9. V. Acary, B. Brogliato, and Y. Orlov, “Chattering-free digital sliding-mode control with state observer and disturbance rejection,” *IEEE Trans. Autom. Control* **57** (5), 1–16 (2012). <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2174676>

10. P. Hartman, *Ordinary Differential Equations* (John Wiley & Sons, New York—London—Sydney, 1964; Mir, Moscow, 1970).
11. N. N. Zavalishin and D. O. Logofet, “Modeling of ecological systems according to a given ‘stocks—flows’ diagram,” *Mat. Model.* **9** (9), 3–17 (1997) [in Russian].
12. S.-D. Shih, “The period of a Lotka—Volterra system,” *Taiwan. J Math.* **1** (4), 451–470 (1997).
13. A. Atehortua, L. Ladino, and J. Valverde, “Population dynamics of a two-stage migratory species with predation and capture,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **16** (1), 27–39 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2013.09.003>
14. L. A. Petrosyan and V. V. Zakharov, *Mathematical Models in Ecology* (Izd. SPbGU, St. Petersburg, 1997) [in Russian].
15. A. D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations* (IKI, Moscow—Izhevsk, 2003) [in Russian].
16. A. S. Bratus’, A. S. Novozhilov, and A. P. Platonov, *Dynamical Systems and Models of Biology* (Fizmatlit, Moscow, 2011) [in Russian].
17. V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations* (OGIZ, Moscow, 1947) [in Russian].