

УДК 539.3:517.95

## О СОПРЯЖЕНИИ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ТИМОШЕНКО В УПРУГИХ ТЕЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ

© 2024 Н. А. Николаева

*Северо-Восточный федеральный университет,  
ул. Кулаковского, 48, г. Якутск 677000, Россия*

E-mail: niknataf@mail.ru

Поступила в редакцию 13.10.2023 г.; после доработки 21.05.2024 г.;  
принята к публикации 03.07.2024 г.

Исследуется задача о сопряжении тонких упругих включений Тимошенко, расположенных в двумерном упругом теле с трещиной. Предполагается, что трещина пересекает тонкое включение в некоторой точке, являющейся точкой взаимного контакта. В точке контакта и на берегах трещины задаются нелинейные краевые условия типа неравенств, которые позволяют предотвратить взаимное проникание частей включения и берегов трещины соответственно. Установлены существование и единственность решения задачи. Получена дифференциальная постановка в виде краевой задачи, содержащая в себе условия сопряжения.

**Ключевые слова:** условия сопряжения, нелинейные краевые условия, включение Тимошенко, трещина, вариационное неравенство.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.405

### ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования обусловлена стремительным увеличением применения композиционных материалов с тонкими волокнами при создании различных конструкций и изделий. При эксплуатации данных конструкций наличие инородных включений может привести к образованию трещин. Это вызывает необходимость изучения математических задач равновесия упругих тел с тонкими включениями и трещинами. При этом существенную роль играет выбор краевых условий на берегах трещины. Существует два подхода для описания задач теории трещин. Первый подход — это классический, который характеризуется линейными краевыми условиями на берегах [1]. В этом случае допускается взаимное проникание берегов трещины, что является недостатком модели. Вторым же подход описывается нелинейными краевыми условиями вида системы равенств и неравенств, которые обеспечивают взаимное непроникание берегов трещины (см. [2, 3]). В случае отслоения также применимы описанные методы моделирования трещин, поскольку отслоение подразумевает наличие трещины между включением и материалом матрицы. В представленной работе для описания трещин применяются нелинейные краевые условия. На сегодняшний день опубликовано значительное количество результатов, где при описании отслоения тонких включений используются указанные нелинейные краевые условия. Широкий класс задач данного направления можно разделять по способу моделирования тонких включений, расположенных в упругих телах.

Математические модели тонких упругих включений Тимошенко с возможным отслоением в упругом теле были сформулированы в работах [4, 5]. Впоследствии по указанному направлению были рассмотрены различные постановки задач и исследованы предельные переходы по параметру жёсткости [6], была выведена формула Гриффитса [7], проанализирован случай, когда включение Тимошенко пересекает внешнюю границу под нулевым углом [8], были

построены и проверены численные алгоритмы решения [9], а также изучены задачи сопряжения [10–12].

Исследования математических моделей тонких жёстких включений при наличии отслоения в упругих телах берут своё начало с публикации [13]. В дальнейшем для данной модели были рассмотрены задачи оптимального управления параметрами включения [14], численное решение [15], некоторые контактные задачи [16–18] и задачи сопряжения [19–21].

Модель Бернулли—Эйлера является одной из наиболее распространённых моделей для описания поведения тонких упругих включений в упругом теле [22, 23]. В частности, с включением Бернулли—Эйлера были исследованы задачи о равновесии двумерного вязкоупругого тела [24], задача с параметром повреждаемости [25], задача о равновесии пластины, сопряжённой с препятствием [26], а также различные задачи о сопряжении [20, 27, 28].

Отдельно отметим работы, где обсуждаются общие и всесторонние вопросы сопряжения математических моделей линейной теории упругости. В работе [29] на примере бигармонического уравнения сформулированы условия сопряжения для стержней и пластин. В [30–32] рассмотрены разнообразные задачи о сопряжении линейных структур и стержней. В [33–35] изучены условия сопряжения в рамках теории упругих балок. Сопряжения линейных включений и трещин рассмотрены в [36–38].

В представленной работе рассматривается задача равновесия двумерного упругого тела с трещиной и с тонким упругим включением. Упругое включение моделируется балкой Тимошенко. На берегах трещины задаются краевые условия взаимного непроникания берегов. Предполагается, что трещина точкой пересечения делит включение на две части. Таким образом, возникает контакт частей включения в одной точке. Указанная точка является точкой сопряжения. В этом случае, исходя из геометрии расположения трещины и включения, условие непроникания учитывается и в точке сопряжения. Наличие данного краевого условия исключает взаимное проникание частей включения друг в друга и является естественным с точки зрения механики. Целью данной работы является доказательство однозначной разрешимости поставленной задачи и отыскание краевых условий в точке сопряжения для дифференциальной постановки. При этом дифференциальная постановка будет рассмотрена для двух случаев: 1) когда тонкие включения не имеют отслоения и 2) когда имеется отслоение одного из сопряжённых включений.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

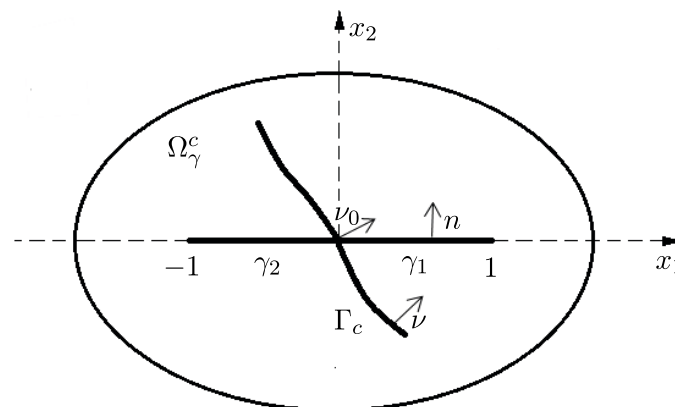


Рис. 1. Область  $\Omega$  с трещиной  $\Gamma_c$  и тонкими включениями  $\gamma_1, \gamma_2$

Пусть  $\bar{\gamma} \subset \Omega$ ,  $\bar{\Gamma}_c \subset \Omega$  — гладкие кривые без самопересечений такие, что  $\gamma \cap \Gamma_c = \{(0, 0)\}$ ,  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0, 0)\}$ ,  $\gamma_1 = (0, 1) \times \{0\}$ ,  $\gamma_2 = (-1, 0) \times \{0\}$ . Здесь  $\Omega$  — ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^2$  с гладкой границей  $\Gamma$ . Предположим, что кривые  $\Gamma_c$  и  $\gamma$  можем продолжить

до пересечения внешней границы  $\Gamma$ , разбивая при этом область  $\Omega$  на четыре подобласти  $D_i$  с липшицевыми границами  $\partial D_i$ , причём  $meas(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Обозначим через  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  единичный вектор нормали к  $\Gamma_c$ , через  $n = (0, 1)$  — единичный вектор нормали к  $\gamma$ , через  $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$  и  $s = (1, 0)$  — касательные вектора к  $\Gamma_c$  и  $\gamma$  соответственно. Нормаль в точке  $(0, 0)$ , которая совпадает с направлением нормали  $\nu$  к  $\Gamma_c$ , обозначим через  $\nu_0$  (см. рис. 1). Пусть также  $\Omega_\gamma^c = \Omega \setminus (\bar{\gamma} \cup \bar{\Gamma}_c)$ .

В рассматриваемой модели область  $\Omega_\gamma^c$  будет соответствовать упругому телу в естественном состоянии,  $\Gamma_c$  — трещине, а  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — тонким упругим включениям с заданными свойствами. В частности, считаем, что поведение упругих включений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  описывается моделью балок Тимошенко (см., например, [39]). Введём тензор модулей упругости  $A = \{a_{ejkl}\}$  с обычными свойствами симметрии

$$a_{ejkl} = a_{jekl} = a_{klej}, \quad a_{ejkl} \in L^\infty(\Omega)$$

и положительной определённости

$$a_{ejkl}\xi_{kl}\xi_{ej} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi_{ej} = \xi_{je}, \quad c_0 = const > 0, \quad e, j, k, l = 1, 2.$$

Всюду в работе все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

Обозначим через  $u = (u_1, u_2)$  и  $\sigma = \{\sigma_{ej}\}$  поле перемещений и тензор напряжения упругого тела  $\Omega_\gamma^c$ ,  $e, j = 1, 2$ . Функции  $v^{(i)}$ ,  $w^{(i)}$ ,  $\varphi^{(i)}$  будут определены на тонких включениях  $\gamma_i$  и рассмотрены как функции одной переменной  $x_1$ ,  $i = 1, 2$ . Вместе с тем функции  $v^{(i)}$ ,  $w^{(i)}$  описывают вертикальные и горизонтальные перемещения, а  $\varphi^{(i)}$  — углы поворота нормального сечения включений  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ . Скачок функции  $v$  на  $\Gamma_c$  обозначим через  $[v] = v^+ - v^-$ , где  $v^\pm$  соответствуют значениям  $v$  на положительном и отрицательном берегах кривой  $\Gamma_c$  по отношению к нормали  $\nu$ . Тензор деформаций введём по формулам:  $\varepsilon = \{\varepsilon_{ej}\}$ ,  $\varepsilon_{ej}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_e}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_e} \right)$ ,  $e, j = 1, 2$ . Кроме того,  $\sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$ ,  $\sigma_\nu = \sigma_{ej}\nu_j\nu_e$ ,  $\sigma_\tau = \sigma_{ej}\nu_j\tau_e$ ,  $u_\nu = u\nu$ ,  $u_\tau = u\tau$ ,  $u_n = un$ ,  $u_s = us$ , где  $e, j = 1, 2$ .

## 2. СЛУЧАЙ БЕЗ ОТСЛОЕНИЯ

В этом разделе мы рассматриваем задачу равновесия упругого тела с трещиной и тонкими упругими включениями без отслоения. Для данной задачи будет приведена вариационная постановка, доказаны существование и единственность решения, а также сформулирована дифференциальная постановка, которая эквивалентна вариационной.

Рассмотрим вариационную постановку задачи. С этой целью введём множество допустимых функций

$$K_1 = \{(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \mid u \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, (v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in H^1(\gamma_i)^3, v^{(i)} = u_n, w^{(i)} = u_s \text{ на } \gamma_i, \\ i = 1, 2; [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \Gamma_c; ((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geq 0\},$$

где  $H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)$  — подпространство пространства Соболева  $H^1(\Omega_\gamma^c)$ :

$$H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma^c) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Приведём значение условий, которые входят в определение множества  $K_1$ . Равенства  $v^{(i)} = u_n$ ,  $w^{(i)} = u_s$  на  $\gamma_i$  означают совпадение вертикальных (по оси  $x_2$ ) и горизонтальных (по оси  $x_1$ ) перемещений упругого тела с перемещениями включений на  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ . Неравенство  $[u_\nu] \geq 0$  описывает взаимодействие берегов трещины  $\Gamma_c$ , допуская их контакт (знак равенства) либо расхождение (знак строгого неравенства), и одновременно исключает проникание берегов трещины. Данное условие непроникания выполнено почти всюду на  $\Gamma_c$ . Тогда

в точке  $(0, 0)$  может быть допущено проникание включений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  друг в друга. Условие  $((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geq 0$ , в свою очередь, обеспечивает непроникание включений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке контакта.

Введём функционал энергии

$$\Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)})^2 + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})^2 \right\}.$$

Здесь и далее по тексту, где не указано, считаем, что  $i = 1, 2$ . Вдобавок, для упрощения будем писать  $\sigma(u) \varepsilon(u) = \sigma_{ej}(u) \varepsilon_{ej}(u)$ ,  $f u = f_e u_e$ ,  $v_x = \frac{dv}{dx}$ ,  $x = x_1$ ,  $(x_1, x_2) \in \Omega$ .

**Теорема 1. Задача минимизации**

найти  $(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_1$ , так что  $\Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \inf_{K_1} \Pi$

имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_1, \\ \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)}(\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) \right\} + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

для всех  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_1$ ,  $i = 1, 2$ .

**Доказательство.** Множество  $K_1$  в силу выпуклости и замкнутости будет слабо замкнутым. Функционал  $\Pi$  является слабо полунепрерывным снизу. Доказательство этого свойства мы приводить не будем, поскольку с аналогичной схемой рассуждения можно ознакомиться в [2]. Таким образом, для доказательства существования решения нам достаточно показать коэрцитивность функционала  $\Pi$ . Итак, при  $(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_1$ ,  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)})^2 + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})^2 \right\} \pm \\ &\pm \alpha \int_{\gamma_1} ((v^{(1)})^2 + (w^{(1)})^2) \pm \beta \int_{\gamma_2} ((v^{(2)})^2 + (w^{(2)})^2). \end{aligned}$$

В силу неравенства Корна, непрерывности вложения пространства  $H_1^1(\Omega_\gamma^c)$  в  $L^2(\gamma_i)$  и условий  $u_n = v^{(i)}$ ,  $u_s = w^{(i)}$  на  $\gamma_i$  при малых  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  будут справедливы оценки

$$\frac{1}{8} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \alpha \int_{\gamma_1} ((v^{(1)})^2 + (w^{(1)})^2) \geq 0, \quad \frac{1}{8} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \beta \int_{\gamma_2} ((v^{(2)})^2 + (w^{(2)})^2) \geq 0. \quad (2)$$

На основании леммы, доказанной в [6], получим, что существуют константы  $c_2 > 0$ ,  $c_3 > 0$ , не зависящие от функций такие, что

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \left\{ (w_x^{(1)})^2 + (\varphi_x^{(1)})^2 + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})^2 \right\} + \alpha \int_{\gamma_1} ((v^{(1)})^2 + (w^{(1)})^2) &\geq c_2 \left\| (v^{(1)}, w^{(1)}, \varphi^{(1)}) \right\|_{H^1(\gamma_1)}^2, \\ \int_{\gamma_2} \left\{ (w_x^{(2)})^2 + (\varphi_x^{(2)})^2 + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})^2 \right\} + \beta \int_{\gamma_2} ((v^{(2)})^2 + (w^{(2)})^2) &\geq c_3 \left\| (v^{(2)}, w^{(2)}, \varphi^{(2)}) \right\|_{H^1(\gamma_2)}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая (2), (3), неравенства Корна и Коши, для функционала энергии запишем

$$\begin{aligned} \Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \geq c_0 \|u\|_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)}^2 - c_1 \|u\|_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)} + c_2 \left\| (v^{(1)}, w^{(1)}, \varphi^{(1)}) \right\|_{H^1(\gamma_1)}^2 + \\ + c_3 \left\| (v^{(2)}, w^{(2)}, \varphi^{(2)}) \right\|_{H^1(\gamma_2)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует коэрцитивность функционала  $\Pi$  на множестве  $K_1$ .

Докажем единственность решения методом от противного. Допустим, что задача (1) имеет два решения:  $(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$  и  $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ . Поскольку неравенство справедливо для всех  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_1$ , в неравенство для первого решения  $(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$  в качестве пробного элемента  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)})$  возьмём второе решение  $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ . Также в неравенство для второго решения  $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$  подставим  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$ . После этого сложим полученные неравенства. Тогда, с одной стороны, верно соотношение

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u - \tilde{u}) \varepsilon(u - \tilde{u}) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^{(i)} - \tilde{w}_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)} - \tilde{\varphi}_x^{(i)})^2 \right\} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} - \tilde{v}_x^{(i)} - \tilde{\varphi}^{(i)})^2 \leq 0.$$

С другой стороны, из рассуждений, аналогичных рассуждениям доказательства коэрцитивности функционала  $\Pi$ , справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u - \tilde{u}) \varepsilon(u - \tilde{u}) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^{(i)} - \tilde{w}_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)} - \tilde{\varphi}_x^{(i)})^2 \right\} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} - \tilde{v}_x^{(i)} - \tilde{\varphi}^{(i)})^2 \geq 0.$$

В результате получим

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u - \tilde{u}) \varepsilon(u - \tilde{u}) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^{(i)} - \tilde{w}_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)} - \tilde{\varphi}_x^{(i)})^2 \right\} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} - \tilde{v}_x^{(i)} - \tilde{\varphi}^{(i)})^2 = 0.$$

Отсюда приходим к необходимому противоречию:  $(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ . Таким образом, задача (1) имеет единственное решение.

Теорема 1 полностью доказана.  $\square$

Приведём дифференциальную формулировку задачи (1). Данная постановка состоит в следующем: для заданных внешних сил  $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$  требуется найти поле перемещений  $u = (u_1, u_2)$ , тензор напряжения  $\sigma$ , определённые в  $\Omega_\gamma^c$ , и функции  $v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}$ , определённые на  $\gamma_i$ , такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (4)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (5)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^\pm = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (6)$$

$$-v_{xx}^{(i)} - \varphi_x^{(i)} = [\sigma_n], \quad -w_{xx}^{(i)} = [\sigma_s], \quad -\varphi_{xx}^{(i)} + v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (7)$$

$$v^{(i)} = u_n, \quad w^{(i)} = u_s \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (8)$$

$$\varphi^{(1)} + v_x^{(1)} = w_x^{(1)} = \varphi_x^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad \varphi^{(2)} + v_x^{(2)} = w_x^{(2)} = \varphi_x^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \quad (9)$$

$$((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geq 0, \quad (10)$$

$$\varphi_x^{(1)}(0+) = \varphi_x^{(2)}(0-) = 0, \quad (11)$$

$$(w_x^{(2)} w^{(2)})(0-) + (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)}) v^{(2)}(0-) - (w_x^{(1)} w^{(1)})(0+) - (\varphi^{(1)} + v_x^{(1)}) v^{(1)}(0+) = 0, \quad (12)$$

$$(w_x^{(2)} \bar{w}^{(2)})(0-) + (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)}) \bar{v}^{(2)}(0-) - (w_x^{(1)} \bar{w}^{(1)})(0+) - (\varphi^{(1)} + v_x^{(1)}) \bar{v}^{(1)}(0+) \geq 0 \quad (13)$$

$$\forall (\bar{v}^i, \bar{w}^i) \in H^1(\gamma_i)^2, \quad ((\bar{w}^{(1)}, \bar{v}^{(1)})(0+) - (\bar{w}^{(2)}, \bar{v}^{(2)})(0-))\nu_0 \geq 0,$$

$i = 1, 2$ . Здесь (4) — суть уравнения равновесия упругого тела и линейный закон Гука, (7) — уравнения равновесия тонких включений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , которые в точности соответствуют моделям упругих балок Тимошенко. При этом в уравнениях (7) правые части  $[\sigma_n], [\sigma_s]$  описывают силы, действующие на включения со стороны упругого тела. Условие (5) описывает закрепление тела на внешней границе  $\Gamma$ . Краевые условия (6) являются типичными для данного класса задач (см. [3]). Соотношения (8) прокомментированы выше при определении множества  $K_1$ . Первая группа краевых условий (9) соответствует нулевой перерезывающей силе, нулевой деформации растяжения (сжатия) и нулевому моменту тонкого включения  $\gamma_1$  в точке  $x = 1$ ; вторая группа краевых условий (9) определяет аналогичное для тонкого включения  $\gamma_2$  в точке  $x = -1$ . Оставшиеся условия (10)–(13) описывают сопряжение тонких включений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке  $(0, 0)$ .

**Теорема 2.** *Дифференциальная постановка (4)–(13) эквивалентна вариационной задаче (1) на классе достаточно гладких решений.*

**Доказательство. Необходимость.** Рассмотрим получение полной системы краевых условий (4)–(13) из вариационного неравенства (1). Сперва с помощью подстановки в (1) тестовых функций вида  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \pm (\theta, 0, 0, 0)$ , где  $\theta \in C_0^\infty(\Omega_\gamma^c)^2$ , убеждаемся, что выполнено уравнение равновесия из (4) в смысле обобщённых функций. Получение краевых условий (6) на кривой  $\Gamma_c$  мы опустим, поскольку аналогичную схему доказательства можно найти в [19]. Обоснуем справедливость (7)–(13). Возьмём в (1) в качестве пробных функций элементы:  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ , где  $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_1$ ,  $[\tilde{u}_\nu] = 0$  на  $\Gamma_c$ ,  $((\tilde{w}^{(1)}, \tilde{v}^{(1)})(0+) - (\tilde{w}^{(2)}, \tilde{v}^{(2)})(0-))\nu_0 = 0$ . Получим

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma^c} f \tilde{u} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)} \tilde{w}^{(i)} + \varphi_x^{(i)} \tilde{\varphi}^{(i)} + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)}) (\tilde{v}_x^{(i)} + \tilde{\varphi}^{(i)}) \right\} = 0.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая уравнения равновесия (4) и условия (6), находим

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_n] \tilde{u} - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^{(i)} \tilde{w}^{(i)} + (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \tilde{\varphi}^{(i)} + (v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)}) \tilde{v}^{(i)} \right\} + \\ & + w_x^{(1)} \tilde{w}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + w_x^{(2)} \tilde{w}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \\ & + \varphi_x^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее выберем в (14) тестовые функции, обладающие свойствами

$$\tilde{v}^{(i)} = \tilde{w}^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i)} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0+, 0-, 1, -1.$$

Получаем равенство

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} ([\sigma_n] \tilde{u}_n + [\sigma_s] \tilde{u}_s) - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^{(i)} \tilde{w}^{(i)} + (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \tilde{\varphi}^{(i)} + (v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)}) \tilde{v}^{(i)} \right\} = 0,$$

откуда благодаря равенствам  $\tilde{v}^{(i)} = \tilde{u}_n$ ,  $\tilde{w}^{(i)} = \tilde{u}_s$  на  $\gamma_i$  следуют уравнения (7).

Вернёмся к равенству (14), справедливому для указанных выше функций  $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ . В силу (7), мы будем иметь

$$w_x^{(1)} \tilde{w}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \\ + w_x^{(2)} \tilde{w}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} = 0.$$

Поскольку на функции  $\tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}$  при  $x = 1, -1$ , а на  $\tilde{\varphi}^{(i)}$  при  $x = 1, -1, 0+, 0-$  отсутствуют ограничения, из последнего равенства получим краевые условия (9) и (11).

Подставим теперь в вариационное неравенство (1) пробные элементы  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) + (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ ,  $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_1$ ,  $[\tilde{u}_\nu] = 0$  на  $\Gamma_c$ . Мы имеем

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma^c} f \tilde{u} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)} \tilde{w}_x^{(i)} + \varphi_x^{(i)} \tilde{\varphi}_x^{(i)} + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)}) (\tilde{v}_x^{(i)} + \tilde{\varphi}^{(i)}) \right\} \geq 0.$$

Отсюда, интегрируя по частям, а также применяя краевые условия (4), (6)–(11), получим неравенство

$$-w_x^{(1)} \tilde{w}^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)}(0+) + w_x^{(2)} \tilde{w}^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)}(0-) \geq 0,$$

которое справедливо для всех функций  $(\tilde{v}^i, \tilde{w}^i) \in H^1(\gamma_i)^2$  таких, что

$$((\tilde{w}^{(1)}, \tilde{v}^{(1)})(0+) - (\tilde{w}^{(2)}, \tilde{v}^{(2)})(0-)) \nu_0 \geq 0.$$

Таким образом, мы обосновали, что из (1) следует условие (13).

И наконец, приступим к доказательству справедливости равенства (12). Для этого в вариационное неравенство (1) последовательно выберем в роли пробных элементов функции:  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (0, 0, 0, 0)$  и  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = 2(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$ . В результате получим

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)} w_x^{(i)} + \varphi_x^{(i)} \varphi_x^{(i)} + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)}) (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)}) \right\} = 0.$$

Интегрирование по частям и применение условий (4), (6)–(8) здесь даёт равенство

$$w_x^{(1)} w^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)} \varphi^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) v^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \\ + w_x^{(2)} w^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)} \varphi^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) v^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} = 0,$$

из которого в силу условий (9) и (11) приходим к справедливости равенства (12). Таким образом, теорема в одну сторону доказана.

*Достаточность.* Пусть теперь выполнены все соотношения (4)–(13). Возьмём  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_1$ . Умножим (4) на  $(\bar{u} - u)$ , первое равенство в (7) на  $(\bar{v}^{(i)} - v^{(i)})$ , второе — на  $(\bar{w}^{(i)} - w^{(i)})$ , третье — на  $(\bar{\varphi}^{(i)} - \varphi^{(i)})$ . Проинтегрируем по  $\Omega_\gamma^c$  и  $\gamma_i$  соответственно. Сложим интегралы. Тогда мы имеем

$$\int_{\Omega_\gamma^c} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (-v_{xx}^{(i)} - \varphi_x^{(i)} - [\sigma_n])(\bar{v}^{(i)} - v^{(i)}) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (-w_{xx}^{(i)} - [\sigma_s])(\bar{w}^{(i)} - w^{(i)}) + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (-\varphi_{xx}^{(i)} + v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar{\varphi}^{(i)} - \varphi^{(i)}) = 0.$$

Интегрируя это тождество по частям, мы получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)} (\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)} (\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)}) (\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \right\} = \\ & - \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma n (\bar{u} - u)] + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_n] (\bar{v}^{(i)} - v^{(i)}) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_s] (\bar{w}^{(i)} - w^{(i)}) + \\ & + w_x^{(1)} (\bar{w}^{(1)} - w^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)} (\bar{\varphi}^{(1)} - \varphi^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) (\bar{v}^{(1)} - v^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + \\ & + w_x^{(2)} (\bar{w}^{(2)} - w^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)} (\bar{\varphi}^{(2)} - \varphi^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) (\bar{v}^{(2)} - v^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-}. \end{aligned}$$

Для получения вариационного неравенства (1) нам достаточно показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. Покажем это. В силу (8), (9), (11), (12) и последних трёх условий из (6) последнее равенство можем переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)} (\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)} (\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)}) (\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \right\} = \quad (15) \\ & - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu [\bar{u}_\nu] - w_x^{(1)} \bar{w}^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) \bar{v}^{(1)}(0+) + w_x^{(2)} \bar{w}^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) \bar{v}^{(2)}(0-). \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части (15) неотрицательно в силу второго неравенства из (6) и неравенства  $[\bar{u}_\nu] \geq 0$ , а сумма оставшихся слагаемых неотрицательна по условию (13). Следовательно, правая часть (15) неотрицательна. Таким образом, мы показали, что из (4)–(13) следует вариационное неравенство (1).

Итак, теорема 2 полностью доказана.  $\square$

### 3. СЛУЧАЙ С ОТСЛОЕНИЕМ

В данном разделе будет исследована задача равновесия упругого тела с трещиной и тонкими упругими включениями. При этом будет предполагаться наличие отслоения на положительном берегу  $\gamma_1$  (см. рис. 1). В данном случае существование отслоения означает, что помимо трещины  $\Gamma_c$  существует ещё и трещина между включением  $\gamma_1$  и упругим телом. Оказывается, что для данного случая условия сопряжения в контактной точке для дифференциальной постановки будут идентичными с предыдущим случаем. Вместе с тем, формулировки задачи, а также доказательство эквивалентности будут значительно отличаться. Обозначения останутся прежними.

Приведём вариационную постановку задачи. Для этого введём множество допустимых функций

$$\begin{aligned} K_2 = \{ & (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \mid u \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, (v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in H^1(\gamma_i)^3, v^{(2)} = u_n, w^{(2)} = u_s \text{ на } \gamma_2; \\ & v^{(1)} = u_n^-, w^{(1)} = u_s^- \text{ на } \gamma_1; [u_n] \geq 0 \text{ на } \gamma_1; [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \Gamma_c; \\ & ((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geq 0, i = 1, 2 \} \end{aligned}$$



и запишем функционал энергии

$$\Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)})^2 + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})^2 \right\}.$$

**Теорема 3.** *Задача минимизации*

найти  $(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_2$ , так что  $\Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \inf_{K_2} \Pi$

имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\begin{aligned} & (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_2, \\ & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)}(\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

для всех  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_2$ ,  $i = 1, 2$ .

Теорема 3 доказывается тем же путём, что и теорема 1 из предыдущего раздела, поэтому выкладки мы здесь опустим.

Приведём дифференциальную формулировку для данного случая. Найти  $u$ ,  $\sigma$ , определённые в  $\Omega_\gamma^c$ , и  $v^{(i)}$ ,  $w^{(i)}$ ,  $\varphi^{(i)}$ , определённые на  $\gamma_i$ , такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A \varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma^c, \quad (17)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (18)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^\pm = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (19)$$

$$-v_{xx}^{(i)} - \varphi_x^{(i)} = [\sigma_n], \quad -w_{xx}^{(i)} = [\sigma_s], \quad -\varphi_{xx}^{(i)} + v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} = 0 \quad \text{на } \gamma_i, \quad (20)$$

$$v^{(1)} = u_n^-, \quad w^{(1)} = u_s^- \quad \text{на } \gamma_1, \quad v^{(2)} = u_n, \quad w^{(2)} = u_s \quad \text{на } \gamma_2, \quad (21)$$

$$\varphi^{(1)} + v_x^{(1)} = w_x^{(1)} = \varphi_x^{(1)} = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad \varphi^{(2)} + v_x^{(2)} = w_x^{(2)} = \varphi_x^{(2)} = 0 \quad \text{при } x = -1, \quad (22)$$

$$[u_n] \geq 0, \quad \sigma_n^+ \leq 0, \quad \sigma_s^+ = 0, \quad \sigma_n^+[u_n] = 0 \quad \text{на } \gamma_1, \quad (23)$$

$$((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geq 0, \quad (24)$$

$$\varphi_x^{(1)}(0+) = \varphi_x^{(2)}(0-) = 0, \quad (25)$$

$$(w_x^{(2)} w^{(2)})(0-) + (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)})v^{(2)}(0-) - (w_x^{(1)} w^{(1)})(0+) - (\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})v^{(1)}(0+) = 0, \quad (26)$$

$$(w_x^{(2)} \bar{w}^{(2)})(0-) + (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)})\bar{v}^{(2)}(0-) - (w_x^{(1)} \bar{w}^{(1)})(0+) - (\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})\bar{v}^{(1)}(0+) \geq 0 \quad (27)$$

$$\forall (\bar{v}^i, \bar{w}^i) \in H^1(\gamma_i)^2, \quad ((\bar{w}^{(1)}, \bar{v}^{(1)})(0+) - (\bar{w}^{(2)}, \bar{v}^{(2)})(0-))\nu_0 \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Здесь первые два равенства из (21) гарантируют совпадение вертикальных и горизонтальных перемещений упругого тела с перемещениями включения на  $\gamma_1^-$ . Группа нелинейных краевых условий (23) описывает отслоение тонкого включения на  $\gamma_1^+$ .

**Теорема 4.** *Формулировки (16) и (17)–(27) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

**Доказательство. Необходимость.** Докажем, что из вариационного неравенства (16) следуют все условия (17)–(27). А именно, приведём доказательство справедливости краевых условий (20), (22)–(27). Остальные условия получаются аналогично предыдущей модели.

Итак, возьмём в (16) тестовые функции вида

$$(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) + (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}),$$

где  $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_2$ ,  $[\tilde{u}_\nu] = 0$  на  $\Gamma_c$ ,  $\tilde{v}^{(i)} = \tilde{w}^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i)} = 0$  на  $\gamma_i$ . Интегрирование по частям и применение уравнений равновесия (17) и условий (19) приводит к неравенству

$$-\int_{\gamma_1} \sigma^+ n \tilde{u}^+ = -\int_{\gamma_1} (\sigma_n^+ \tilde{u}_n^+ + \sigma_s^+ \tilde{u}_s^+) \geq 0,$$

откуда получаем

$$\sigma_n^+ \leq 0, \quad \sigma_s^+ = 0 \quad \text{на } \gamma_1.$$

Справедливость условия  $\sigma_n^+[u_n] = 0$  из (23) доказывается локально. Схожие рассуждения можно найти в [19]. Таким образом, мы убедились в верности всех соотношений (23).

Рассмотрим теперь функции  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ , где  $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_2$ ,  $((\tilde{w}^{(1)}, \tilde{v}^{(1)})(0+) - (\tilde{w}^{(2)}, \tilde{v}^{(2)})(0-))\nu_0 = 0$ ,  $[\tilde{u}_\nu] = 0$  на  $\Gamma_c$ ,  $[\tilde{u}_n] = 0$  на  $\gamma_1$ . Производя подстановку функций  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)})$  в (16), мы будем иметь равенство

$$\begin{aligned} & -\int_{\gamma_1} [(\sigma n) \tilde{u}] - \int_{\gamma_2} [\sigma n] \tilde{u} - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^{(i)} \tilde{w}^{(i)} + (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \tilde{\varphi}^{(i)} + (v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)}) \tilde{v}^{(i)} \right\} + \\ & + w_x^{(1)} \tilde{w}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \\ & + w_x^{(2)} \tilde{w}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь для первого слагаемого в силу (23) можем записать цепочку преобразований

$$-\int_{\gamma_1} [(\sigma n) \tilde{u}] = -\int_{\gamma_1} [\sigma_n \tilde{u}_n] - \int_{\gamma_1} [\sigma_s \tilde{u}_s] \pm \int_{\gamma_1} \sigma_n^+ \tilde{u}_n^- - \int_{\gamma_1} \sigma_s^+ \tilde{u}_s^- = -\int_{\gamma_1} [\sigma_n] \tilde{u}_n^- - \int_{\gamma_1} [\sigma_s] \tilde{u}_s^-.$$

Учитывая это и равенства  $\tilde{v}^{(1)} = \tilde{u}_n^-$ ,  $\tilde{w}^{(1)} = \tilde{u}_s^-$  на  $\gamma_1$ ,  $\tilde{v}^{(2)} = \tilde{u}_n$ ,  $\tilde{w}^{(2)} = \tilde{u}_s$  на  $\gamma_2$ , а также предполагая, что  $\tilde{v}^{(i)} = \tilde{w}^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i)} = 0$  при  $x = 0, 1, -1$ , из (28) получим

$$-\sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} ([\sigma_s] + w_{xx}^{(i)}) \tilde{w}^{(i)} - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} ([\sigma_n] + v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)}) \tilde{v}^{(i)} - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \tilde{\varphi}^{(i)} = 0.$$

Отсюда следуют все уравнения (20). Далее, возвращаясь к равенству (28), получим справедливость всех соотношений (22) и (25).

Чтобы получить следующее условие, сначала поочерёдно выберем в вариационное неравенство (16) функции  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (0, 0, 0, 0)$  и  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = 2(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$ . Затем проинтегрируем по частям и применим условия (17)–(22), (25). В результате получим равенство вида

$$-\int_{\gamma_1} \sigma^+ n [u] - w_x^{(1)} w^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) v^{(1)}(0+) + w_x^{(2)} w^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) v^{(2)}(0-) = 0,$$

откуда находим (26), поскольку здесь первое слагаемое равно нулю в силу последних двух условий из (23).

И наконец, путём подстановки в вариационное неравенство (16) пробных функций  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) + (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ , где  $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_2$ ,  $[\tilde{u}_\nu] = 0$  на  $\Gamma_c$ ,  $[\tilde{u}_n] = 0$  на  $\gamma_1$ , и применения доказанных выше краевых условий, убедимся в справедливости условия (27). Таким образом, теорема в одну сторону доказана.

*Достаточность.* Докажем теперь, что из (17)–(27) следует (16). Из (17) и (20) для произвольной функции  $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_1$  после интегрирования получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)} (\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)} (\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)}) (\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \right\} = \\ & = - \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] - \int_{\gamma_1} [\sigma n (\bar{u} - u)] \pm \int_{\gamma_1} \sigma_n^+ (\bar{u}_n^- - u^-) \pm \int_{\gamma_1} \sigma_s^+ (\bar{u}_s^- - u_s^-) - \\ & - \int_{\gamma_2} [\sigma n (\bar{u} - u)] + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_n] (\bar{v}^{(i)} - v^{(i)}) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_s] (\bar{w}^{(i)} - w^{(i)}) + \\ & + w_x^{(1)} (\bar{w}^{(1)} - w^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)} (\bar{\varphi}^{(1)} - \varphi^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) (\bar{v}^{(1)} - v^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + \\ & + w_x^{(2)} (\bar{w}^{(2)} - w^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)} (\bar{\varphi}^{(2)} - \varphi^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) (\bar{v}^{(2)} - v^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-}. \end{aligned}$$

Очевидно, что для того чтобы получить вариационное неравенство (16), достаточно доказать неотрицательность правой части равенства выше. Действительно, применяя краевые условия (19), (21)–(23), (25) и (26), последнее равенство переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)} (\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)} (\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)}) (\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \right\} = \\ & = - \int_{\gamma_1} \sigma_n^+ [\bar{u}_n] - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu [\bar{u}_\nu] - w_x^{(1)} \bar{w}^{(1)}(0+) - \\ & - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)}) \bar{v}^{(1)}(0+) + w_x^{(2)} \bar{w}^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)}) \bar{v}^{(2)}(0-). \end{aligned} \quad (29)$$

Первое и второе слагаемые правой части равенства (29) неотрицательны в силу (19), (23) и условий  $[\bar{u}_n] \geq 0$  на  $\gamma_1$ ,  $[\bar{u}_\nu] \geq 0$  на  $\Gamma_c$ . Сумма оставшихся слагаемых правой части (29) будет неотрицательна по условию (27). Следовательно, из (29) получаем вариационное неравенство (16).

Теорема 4 полностью доказана.  $\square$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изучена задача о сопряжении тонких упругих включений, которые расположены в двумерном упругом теле с трещиной. При этом предполагается, что трещина проходит между включениями. Мы исследовали два случая: случай без отслоения, а также случай с отслоением, где на одном из берегов одного из включений имеется трещина. Для каждого случая получены следующие результаты:

1. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи равновесия.

2. Получены эквивалентные дифференциальные постановки задач, включающие в себя условия сопряжения в точке контакта.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект FSRG-2023-0025). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
2. Khludnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of Cracks in Solids. Southampton—Boston: WIT Press, 2000.
3. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
4. Итоу Х., Лойгеринг Г., Хлуднев А. М. Тонкие включения Тимошенко в упругом теле с возможным отслоением // Докл. АН. 2014. Т. 59, № 9. С. 401–404.
5. Khludnev A. M., Leugering G. On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2015. V. 20, N 5. P. 495–511; DOI: 10.1177/1081286513505106
6. Itou H., Khludnev A. M. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 39, N 17. P. 4980–4993; DOI: 10.1002/mma.3279
7. Shcherbakov V. V. The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // ZAMM-Z. Angew. Math. Mech. 2016. V. 96, N 11. P. 1306–1317; DOI: 10.1002/zamm.201500145
8. Khludnev A. M., Popova T. S. Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle // Acta Mech. Solida Sin. 2017. V. 30, N 3. P. 327–333.
9. Rudoy E. M., Lazarev N. P. Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 334, N 17. P. 18–26.
10. Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 4. P. 1–14; DOI: 10.1177/1081286515594655
11. Khludnev A. M., Popova T. S. Junction problem for Euler—Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Quart. Appl. Math. 2016. V. 74, N 4. P. 705–718; DOI: 10.1090/qam/1447
12. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужёсткого включения // Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 1. С. 73–89.
13. Khludnev A. M., Leugering G. On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // Math. Meth. Appl. Sci. 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967; DOI: 10.1002/mma.1308
14. Щербakov В. В. Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 1. С. 138–147.
15. Рудой Е. М. Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жёстким включением // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19, № 2. С. 74–87.
16. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жёсткого включения // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2014. Т. 1. С. 32–45.
17. Николаева Н. А. Пластина Кирхгофа—Лява с плоским жёстким включением // Челяб. физ.-матем. журн. 2023. Т. 8, № 1. С. 29–46; DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18103
18. Фанкина И. В. Контактная задача для упругой пластины с тонким жёстким включением // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19, № 3. С. 90–98.
19. Николаева Н. А. О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 4. С. 68–80.

20. *Faella L., Khludnev A. M.* Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies // *Math. Methods Appl. Sci.* 2016. V. 39, N 12. P. 3381–3390.
21. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Об иерархии тонких включений в упругих телах. // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 87–107.
22. *Khludnev A. M.* Equilibrium of an elastic body with closely spaced thin inclusions // *Comp. Math. Math. Phys.* 2018. V. 58, N 10. P. 1660–1672; DOI: 10.1134/S096554251810007X
23. *Khludnev A. M., Leugering G.* Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // *Math. Mech. Complex Sys.* 2014. V. 2, N 1. P. 1–21.
24. Попова Т. С. Задачи о тонких включениях в двумерном вязкоупругом теле // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 21, № 2. С. 66–78.
25. *Khludnev A. M.* On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter // *Math. Mech. Solids.* 2018. V. 24, N 9. P. 2742–2753; DOI: 10.1177/1081286518796472.
26. Фурцев А. И. О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2017. Т. 17, № 4. С. 94–111; DOI: 10.17377/PAM.2017.17.9
27. Николаева Н. А. Задача о равновесии упругого тела с трещиной и тонкими включениями, которые сопряжены между собой // Дальневост. матем. журн. 2024. Т. 24, № 1. С. 73–95; DOI: 10.47910/FEMJ202408
28. *Khludnev A. M., Popova T. S.* Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control // *Comp. Math. Appl.* 2019. V. 77, N 1. P. 253–262.
29. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
30. *Boerquin F., Ciarlet P. G.* Modeling and justification of eigenvalue problems for junctions between elastic structures // *J. Funct. Anal.* 1989. V. 87, N 2. P. 392–427.
31. *Le Dret H.* Modeling of the junction between two rods // *J. Math. Pures Appl.* 1989. V. 68, N 3. P. 365–397.
32. Дуранте Т, Назаров С. А., Кардоне Дж. Моделирование сочленений пластин и стержней посредством самосопряжённых расширений // Вестник СПбГУ. 2009. Т. 1, № 2. С. 3–14.
33. *Gaudiello A., Monneau R., Mossino J., Murat F., Sili A.* Junctions of elastic plates and beams // *ESAIM Contr. Optim. CA.* 2007. V. 13, N 3. P. 419–457.
34. Боган Ю. А. Об условиях сопряжения А. А. Самарского и В. Б. Андреева в теории упругих балок // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 662–669.
35. Боган Ю. А. Осреднение неоднородной упругой балки при сопряжении элементов шарниром конечной жёсткости // Сиб. журн. индустр. матем. 1998. Т. 1, № 2. С. 67–72.
36. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983.
37. Мочалов Е. В., Сильвестров В. В. Задача взаимодействия тонких жёстких остроконечных включений, расположенных между разными упругими материалами // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 99–117.
38. Мхитарян С. М. О напряжённом состоянии упругой бесконечной пластины с конечной трещиной, взаимодействующей с абсолютно жёстким тонким включением // Доклады НАН РА. 2018. Т. 118, № 1. С. 39–48.
39. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1973.

UDC 539.3:517.95

# JUNCTION PROBLEM FOR ELASTIC TIMOSHENKO INCLUSIONS IN ELASTIC BODIES WITH A CRACK

© 2024 N. A. Nikolaeva

*North-Eastern Federal University, Yakutsk, 677027 Russia*

E-mail: niknataf@mail.ru

Received 13.10.2023, revised 21.05.2024, accepted 03.07.2024

**Abstract.** The paper is concerned with a junction problem for Timoshenko elastic inclusions placed in an elastic body with a crack. It is assumed that the crack crosses the thin inclusion at some point. This point is a mutual contact point. Inequality-type boundary conditions are imposed at the point of contact and on the crack edges to prevent mutual penetration between inclusion parts and crack edges, respectively. Existence and uniqueness theorems are established. Differential formulation in the form of a boundary value problem that contains junction boundary conditions is presented.

**Keywords:** junction conditions, nonlinear boundary conditions, Timoshenko inclusion, crack, variational inequality.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.405

## REFERENCES

1. N. F. Morozov, *Mathematical Issues of Crack Theory* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
2. A. M. Khludnev and V. A. Kovtunenkov, *Analysis of Cracks in Solids* (WIT Press, Southampton—Boston, 2000).
3. A. M. Khludnev, *Problems of Elasticity Theory in Nonsmooth Domains* (Fizmatlit, Moscow, 2010) [in Russian].
4. H. Itou, G. Leugering, and A. M. Khludnev, “Timoshenko thin inclusions in an elastic body with possible delamination,” *Dokl. Phys.* **59** (9), 401–404 (2014).
5. A. M. Khludnev and G. Leugering, “On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies,” *Math. Mech. Solids* **20** (5), 495–511 (2015). <https://doi.org/10.1177/1081286513505106>
6. H. Itou and A. M. Khludnev, “On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies,” *Math. Meth. Appl. Sci.* **39** (17), 4980–4993 (2016). <https://doi.org/10.1002/mma.3279>
7. V. V. Shcherbakov, “The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions,” *ZAMM-Z. Angew. Math. Mech.* **96** (11), 1306–1317 (2016). <https://doi.org/10.1002/zamm.201500145>
8. A. M. Khludnev and T. S. Popova, “Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle,” *Acta Mech. Solida Sin.* **30** (3), 327–333 (2017).
9. E. M. Rudoy and N. P. Lazarev, “Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko’s beam,” *J. Comput. Appl. Math.* **334** (17), 18–26 (2018).
10. A. M. Khludnev, L. Faella, and T. S. Popova, “Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies,” *Math. Mech. Solids* **22** (4), 1–14 (2017). <https://doi.org/10.1177/1081286515594655>
11. A. M. Khludnev and T. S. Popova, “Junction problem for Euler–Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies,” *Quart. Appl. Math.* **74** (4), 705–718 (2016). <https://doi.org/10.1090/qam/1447>

12. A. M. Khludnev and T. S. Popova, “The problem of conjugation of the elastic inclusion of Timoshenko and a semi-rigid inclusion,” *Mat. Zam. SVFU* **25** (1), 73–89 (2018) [in Russian].
13. A. M. Khludnev and G. Leugering, “On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks,” *Math. Meth. Appl. Sci.* **33** (16), 1955–1967 (2010). <https://doi.org/10.1002/mma.1308>
14. V. V. Shcherbakov, “On an optimal control problem for the shape of thin inclusions in elastic bodies,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **16** (1), 138–147 (2013) [*J. Appl. Ind. Math.* **7** (3), 435–443 (2013)]. <https://doi.org/10.1134/S1990478913030174>
15. E. M. Rudoy, “Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a delaminated thin rigid inclusion,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **19** (2), 74–87 (2016) [*J. Appl. Ind. Math.* **10** (2), 264–276 (2016)]. <https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2016.19.207>
16. N. P. Lazarev, “The problem of equilibrium of the Timoshenko plate containing a crack along a thin rigid inclusion,” *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mech. Komp’yut. Nauki* **1**, 32–45 (2014) [in Russian].
17. N. A. Nikolaeva, “Kirchhoff–Love plate with a flat rigid inclusion,” *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.* **8** (1), 29–46 (2023) [in Russian]. <https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-18103>
18. I. V. Fankina, “A contact problem for an elastic plate with a thin rigid inclusion,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **19** (3), 90–98 (2016) [*J. Appl. Ind. Math.* **10** (3), 333–340 (2016)]. <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.411>
19. N. A. Nikolaeva, “About integration of the crack with thin inclusions in elastik bodies,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **22** (4), 68–80 (2019) [*J. Appl. Ind. Math.* **22** (4), 68–80 (2019)]. <https://doi.org/10.1134/S1990478919040112>
20. L. Faella and A. M. Khludnev, “Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies,” *Math. Methods Appl. Sci.* **39** (12), 3381–3390 (2016).
21. A. M. Khludnev and T. S. Popova, “On the hierarchy of thin inclusions in elastic bodies,” *Mat. Zam. SVFU* **23** (1), 87–107 (2016) [in Russian].
22. A. M. Khludnev, “Equilibrium of an elastic body with closely spaced thin inclusions,” *Comput. Math. Math. Phys.* **58** (10), 1660–1672 (2018). <https://doi.org/10.1134/S096554251810007X>
23. A. M. Khludnev and G. Leugering, “Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies,” *Math. Mech. Complex Sys.* **2** (1), 1–21 (2014).
24. T. S. Popova, “Problems on thin inclusions in a two-dimensional viscoelastic body,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **21** (2), 66–78 (2018.) [*J. Appl. Ind. Math.* **12** (4), 313–324 (2018)]. <https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2018.21.206>
25. A. M. Khludnev, “On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter,” *Math. Mech. Solids* **24** (9), 2742–2753 (2018). <https://doi.org/10.1177/1081286518796472>.
26. A. I. Furtsev, “On the contact of a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion,” *Sib. Zh. Chistoi Prikl. Mat.* **17** (4), 94–111 (2017). <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.9>
27. N. A. Nikolaeva, “Equilibrium problems for elastic body with a crack and thin conjugated inclusions,” *Dal’nevost. Mat. Zh.* **24** (1), 73–95 (2024) [in Russian]. <https://doi.org/10.47910/FEMJ202408>
28. A. M. Khludnev and T. S. Popova, “Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control,” *Comput. Math. Appl.* **77** (1), 253–262 (2019).
29. A. A. Samarskii and V. B. Andreev, *Difference Methods for Elliptic Equations* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
30. F. Boerquin and P. G. Ciarlet, “Modeling and justification of eigenvalue problems for junctions between elastic structures,” *J. Funct. Anal.* **87** (2), 392–427 (1989).
31. H. Le Dret, “Modeling of the junction between two rods,” *J. Math. Pures Appl.* **68** (3), 365–397 (1989).
32. T. Durante, G. Cardone, and S. A. Nasarov, “Modeling junction of plates and beams by means of self-adjoint extensions,” *Vestn. S.-Peterburg Gos. Univ.* **1** (2), 3–14 (2009) [*J. Control. Vestn. St. Petersburg Univ. Math.* **42** (2), 67–75 (2009)].
33. A. Gaudiello, R. Monneau, J. Mossino, F. Murat, and A. Sili, “Junctions of elastic plates and beams,” *ESAIM Control Optim. CA* **13** (3), 419–457 (2007).

34. Yu. A. Bogan, "On the conjugation conditions of A. A. Samarskii and V. B. Andreev in the theory of elastic beams," *Mat. Zam.* **92** (5), 662–669 (2012) [in Russian].
35. Yu. A. Bogan, "Averaging of a nonuniform elastic beam with the connection of elements by a hinge of finite rigidity," *Sib. Zh. Ind. Mat.* **1** (2), 67–72 (1998) [in Russian].
36. L. T. Berezhnitskii, V. V. Panasyuk, and N. G. Stashchuk, *Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in a Deformable Body* (Nauk. Dumka, Kiev, 1983) [in Russian].
37. E. V. Mochalov and V. V. Silvestrov, "Problem of interaction of thin rigid needle-shaped inclusions located between different elastic materials," *Izv. RAN. MTT* (5), 99–117 (2011) [*Mech. Solids* **46** (5), 739–754 (2011)].
38. S. M. Mkhitarian, "On the stress state of an elastic infinite plate with a finite crack interacting with an absolutely rigid thin inclusion," *Dokl. NAN RA* **118** (1), 39–48 (2018) [in Russian].
39. E. I. Grigolyuk and I. T. Selezov, *Results of Science and Technology* (VINITI, Moscow, 1973) [in Russian].