УДК 517.962

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ РЕШЕНИЙ ГИБРИДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ЛОТКИ—ВОЛЬТЕРРЫ

© 2024 А. В. Платонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9, г. Санкт-Петербург 199034, Россия

E-mail: a.platonov@spbu.ru

Поступила в редакцию 28.06.2023 г.; после доработки 04.09.2024 г.;
принята к публикации 06.11.2024 г.

Рассматривается дискретная система типа Лотки—Вольтерры. Предполагается, что эта система может функционировать как в некотором плановом, так и в возмущённом режимах. Исследуются ограничения на время пребывания системы в этих режимах, обеспечивающие желаемое динамическое поведение. В частности, определяются условия предельной ограниченности решений и перманентности системы. Используется прямой метод Ляпунова, причём в разных частях фазового пространства строятся разные функции Ляпунова. Оцениваются размеры области допустимых начальных значений решений и области предельного пребывания решений, соответствующих требуемой динамике системы. Устанавливаются ограничения на величину шага дискретизации системы.

Ключевые слова: разностные системы Лотки—Вольтерры, переключения, предельная ограниченность решений, перманентность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.407

ВВЕДЕНИЕ

Системы типа Лотки—Вольтерры широко используются для моделирования различных взаимодействий между некими субъектами в биологической, химической или экономической среде [1, 2]. Наиболее часто такие системы применяют для построения популяционных моделей, описывающих динамику изменения численности нескольких популяций в биологическом сообществе. При этом в прикладных задачах задействуются как непрерывные, так и разностные модели [3, 4]. Разностные уравнения могут получаться в результате дискретизации непрерывных уравнений с помощью каких-то вычислительных схем, а могут строиться и непосредственно без привязки к непрерывным моделям. Поскольку динамика изменения численности популяций представляет собой по сути дискретный процесс, то математический аппарат разностных уравнений часто оказывается более уместным для описания данного процесса [4].

Одной из важных задач популяционной динамики является проблема предельной ограниченности решений [1]. В рамках этой задачи исследуются условия, гарантирующие существование ограниченной области в фазовом пространстве системы такой, что любое решение за конечное время войдёт в данную область и более её уже не покинет. С биологической точки зрения это будет означать, что численности популяций не будут превышать некоторые определённые значения. В дискретных моделях такую предельную ограниченность часто удаётся гарантировать лишь для решений, начинающихся в некоторой конечной окрестности начала координат. Но поскольку размер этой окрестности можно варьировать, то это не вызывает принципиальных проблем при моделировании реальных процессов.

Другой важной задачей является проблема персистентности системы [1]. Персистентность означает, что в процессе биологического взаимодействия популяции не вымирают, и их численности не опускаются ниже некоторых определённых положительных значений. Если система обладает свойствами предельной ограниченности решений и персистентности, то она называется перманентной [1, 5, 6].

Указанные выше задачи широко исследовались в последние десятилетия для систем Лотки—Вольтерры с постоянными и переменными коэффициентами [4–6], при воздействии случайных или неслучайных возмущений [7–9], при наличии запаздывания или диффузии [10, 11], и т. д. Отдельный интерес для практических приложений представляет изучение систем с гибридной структурой [12, 13], в частности, когда коэффициенты заданной системы могут переключаться с одного набора значений на другой в результате каких-то внешних воздействий, изменения схемы управления, и т. п. Разработке методов динамического анализа для систем с переключениями посвящено множество работ (см. [14, 15]). Стандартным инструментом для такого анализа является прямой метод Ляпунова. Например, системы Лотки—Вольтерры с переключениями рассматривались в работах [16–18].

В настоящей работе исследуется гибридная дискретная система типа Лотки—Вольтерры, которая может функционировать как в плановом режиме с некоторым асимптотически устойчивым положением равновесия, так и в возмущённом режиме, при котором теряются указанное положение равновесия и свойства устойчивости. Анализируется динамика такой системы, устанавливаются достаточные условия предельной ограниченности решений и перманентности, оцениваются области допустимых начальных и предельных значений решений, соответствующие изучаемой динамике. Отличительной особенностью работы является применение метода дробления фазового пространства системы на части и построение разных функций Ляпунова в разных частях этого пространства. Такой подход позволяет получить лучшие результаты как в качественном, так и в количественном смысле [19, 20].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретную систему

$$x_i(k+1) = x_i(k)\exp\Big(h\big(c_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} f_j(x_j(k))\big)\Big), \quad i = 1,\dots,n. \tag{1}$$

Уравнения (1) являются разностным аналогом хорошо известной дифференциальной системы Лотки—Вольтерры обобщённого типа [3, 4]. Они обычно используются для моделирования взаимодействия нескольких популяций в биологическом сообществе. Так, переменная $x_i(k)$ описывает численность i-ой популяции при k-ой итерации; $k = 0, 1, \dots$; $i = 1,\dots,n$. Величина $h > 0$ определяет шаг дискретизации. Постоянные коэффициенты c_i и p_{ij} характеризуют скорость естественного прироста (убыли) популяций, внутривидовую конкуренцию и межвидовое взаимодействие; $i, j = 1,\dots,n$. Функции $f_i(z_i)$, заданные при $z_i \in [0, +\infty)$, подбираются таким образом, чтобы результаты моделирования согласовывались с наблюдаемыми экспериментальными данными; $i = 1,\dots,n$.

Отметим, что уравнения (1) также применяют для моделирования некоторых химических и экономических процессов [1, 2].

В соответствии с физическим смыслом переменных, систему (1) будем рассматривать в неотрицательном ортанте $K^+ = \{\mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n)^T : z_i \geqslant 0, i = 1,\dots,n\}$. Через $K_0^+ = \{\mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n)^T : z_i > 0, i = 1,\dots,n\}$ обозначим внутренность ортанта K^+. Заметим, что множества K^+ и K_0^+ являются инвариантными множествами системы (1).

Согласно стандартным предположениями (см. [1–3]), будем считать, что функции $f_i(z_i)$ непрерывны и строго возрастают при $z_i \in [0, +\infty)$, $f_i(0) = 0$ и $f_i(z_i) \to +\infty$ при $z_i \to +\infty$; $i = 1,\dots,n$.

Дополнительно предположим, что для любой константы H функции $\tilde{f}_i(z_i) = f_i(e^{z_i})$ удовлетворяют условию Липшица на интервале $(-\infty, H]$ с некоторой константой Липшица $L(H) > 0$, и кроме того, $\int\limits_0^1 \frac{f_i(\tau)}{\tau}\, d\tau < +\infty$; $i = 1,\dots,n$.

Замечание 1. Все сделанные предположения будут выполнены, например, для функций степенного типа: $f_i(z_i) = z_i^{\mu_i}$, где $\mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. В частности, случай, когда $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 1$, соответствует классической разностной системе Лотки—Вольтерры.

Обозначим $f(\mathbf{z}) = (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))^T$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^n$.

Будем считать, что $\det \mathbf{P} \neq 0$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c} < 0$ (покомпонентно), и существуют положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что матрица $\Lambda\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\Lambda$ отрицательно определена (здесь $\Lambda = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$).

При сделанных предположениях система (1) будет иметь единственное положение равновесия $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^T \in K_0^+$, причём это положение равновесия будет асимптотически устойчивым [1–4].

Динамику системы (1) назовём плановым (программным) режимом. Далее полагаем, что в некоторые моменты времени в результате каких-то внешних воздействий рассматриваемая система переходит в возмущённый режим

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp\Big(h\big(\hat{c}_i(k) + \sum_{j=1}^n \hat{p}_{ij}(k) f_j(x_j(k))\big)\Big), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Здесь коэффициенты $\hat{c}_i(k)$, $\hat{p}_{ij}(k)$ представляют собой некоторые ограниченные величины

$$|\hat{c}_i(k)| \leqslant \hat{c}_i, \quad |\hat{p}_{ij}(k)| \leqslant \hat{p}_{ij}, \quad k = 0, 1, \ldots \quad (\hat{c}_i = \mathrm{const} \geqslant 0,\ \hat{p}_{ij} = \mathrm{const} \geqslant 0).$$

А после окончания действия возмущений система снова возвращается в плановый режим (1). В качестве другой интерпретации задачи можно полагать, что система функционирует в возмущённом режиме (2), но в некоторые моменты времени мы с помощью специального стабилизирующего управления приводим систему к плановому режиму (1). После отключения управления система возвращается к режиму (2).

Целью настоящей работы является нахождение ограничений на время пребывания (число последовательных итераций) исследуемой системы в режимах (1) и (2), гарантирующих требуемые динамические характеристики поведения решений системы. В частности, будет исследована задача о попадании решений системы в некоторую компактную окрестность $G \in K_0^+$ точки $\bar{\mathbf{x}}$ и дальнейшем их там пребывании. Таким образом, в работе будут получены условия предельной ограниченности решений и перманентности гибридной системы, состоящей из подсистем (1) и (2).

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА И ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК НА НИХ

Для решения поставленной задачи будем использовать две функции Ляпунова [3, 17]

$$V_1(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{\bar{x}_i}^{z_i} \frac{f_i(\tau) - f_i(\bar{x}_i)}{\tau}\, d\tau, \quad V_2(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{\bar{x}_i}^{z_i} \frac{f_i(\tau)}{\tau}\, d\tau,$$

где в качестве коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ возьмём числа, указанные в предыдущем разделе статьи.

Имеем, что $V_1(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $V_1(\mathbf{z}) > 0$ при $\mathbf{z} \neq \bar{\mathbf{x}}$, и $V_1(\mathbf{z}) \to +\infty$, если $z_i \to +0$ хотя бы при одном значении индекса $i \in \{1, \ldots, n\}$, а также если $\|\mathbf{z}\| \to +\infty$. В то же время, функция $V_2(\mathbf{z})$ сохраняет конечное значение, если $z_i \to +0$ при $i \in \{1, \ldots, n\}$, но $V_2(\mathbf{z}) \to +\infty$ при $\|\mathbf{z}\| \to +\infty$. Таким образом, можно указать такое $\bar{H} > 0$, что

$$V_2(\mathbf{z}) > 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{z}\| \geqslant \bar{H}. \tag{3}$$

Вычислим конечные разности функций $V_1(\mathbf{z})$ и $V_2(\mathbf{z})$ на решениях подсистем (1) и (2).

Выберем произвольные значения $0 < H_1 < \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_i$ и $H_2 > \|\bar{\mathbf{x}}\|$. Зададим область (см. рис. 1)

$$T_1(H_1,H_2) = \left\{\mathbf{z} \in K_0^+ :\ \|\mathbf{z}-\bar{\mathbf{x}}\| \geqslant H_1,\ \|\mathbf{z}\| \leqslant H_2\right\}.$$

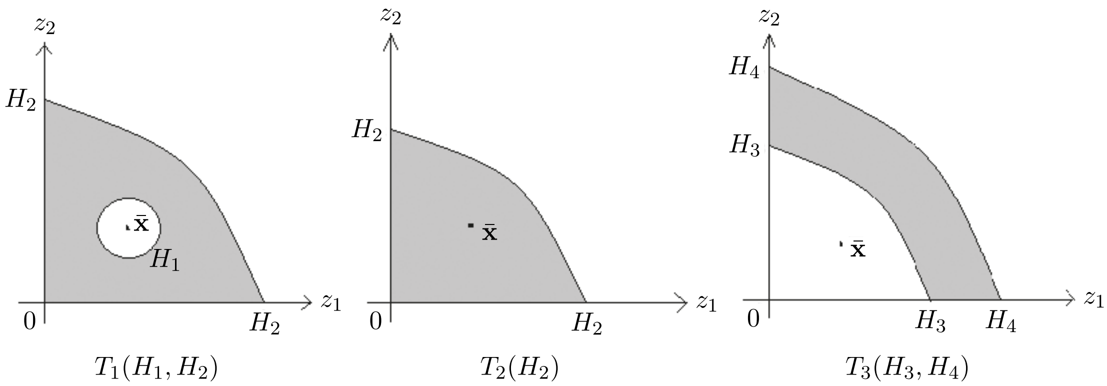

Рис. 1. Области фазового пространства

Получаем

$$\Delta V_1\big|_{(1)} = V_1(\mathbf{x}(k+1)) - V_1(\mathbf{x}(k)) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{x_i(k)}^{x_i(k+1)} \frac{f_i(\tau)-f_i(\bar{x}_i)}{\tau}\,d\tau = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int\limits_{y_i(k)}^{y_i(k+1)} \Big(\tilde{f}_i(\xi)-\tilde{f}_i(\bar{y}_i)\Big)\,d\xi =$$

$$= h\sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(\tilde{f}_i(y_i(k)+\theta_{ik}\Delta y_i(k)) - \tilde{f}_i(\bar{y}_i)\Big) \sum_{j=1}^n p_{ij}\Big(\tilde{f}_j(y_j(k))-\tilde{f}_j(\bar{y}_j)\Big) =$$

$$= h\sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(\tilde{f}_i(y_i(k)) - \tilde{f}_i(\bar{y}_i)\Big) \sum_{j=1}^n p_{ij}\Big(\tilde{f}_j(y_j(k))-\tilde{f}_j(\bar{y}_j)\Big) +$$

$$+ h\sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(\tilde{f}_i(y_i(k)+\theta_{ik}\Delta y_i(k)) - \tilde{f}_i(y_i(k))\Big) \sum_{j=1}^n p_{ij}\Big(\tilde{f}_j(y_j(k))-\tilde{f}_j(\bar{y}_j)\Big).$$

Здесь $y_i(k) = \ln x_i(k)$, $\bar{y}_i = \ln \bar{x}_i$, $\Delta y_i(k) = y_i(k+1) - y_i(k)$, $\theta_{ik} \in (0,1)$, $i = 1,\ldots,n$.

Значит, если $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant H_2$ и $\|\mathbf{x}(k+1)\| \leqslant H_2$, то будет справедливо неравенство

$$\Delta V_1\big|_{(1)} \leqslant \Big(-b_1 h + b_2 L(\ln H_2)h^2\Big)\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\|^2,$$

где b_1, b_2 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от h и H_2.

Выберем $0 < h_1(H_2) < b_1/\big(b_2\,L(\ln H_2)\big)$. Тогда, если $h \in (0, h_1(H_2))$, то пока решение системы (1) остаётся в области $T_1(H_1,H_2)$, будут верны оценки

$$\Delta V_1\big|_{(1)} \leqslant -h\,b_3(H_2)\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\|^2 \leqslant -h\,\alpha_1(H_1,H_2), \tag{4}$$

где $b_3(H_2)$, $\alpha_1(H_1,H_2)$ — положительные постоянные, зависящие от H_2 и от H_1, H_2 соответственно.

Проводя аналогичные рассуждения, можно задать неотрицательную постоянную $\beta_1(H_2)$, зависящую от H_2, так, что если $h \in (0, h_1(H_2))$, то пока решение системы (2) остаётся в области (см. рис. 1)

$$T_2(H_2) = \left\{\mathbf{z} \in K_0^+ :\ \|\mathbf{z}\| \leqslant H_2\right\},$$

будет верна оценка

$$\Delta V_1\big|_{(2)} \leqslant h\,\beta_1(H_2). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь область вида (см. рис. 1)

$$T_3(H_3, H_4) = \left\{\mathbf{z} \in K_0^+ :\ H_3 \leqslant \|\mathbf{z}\| \leqslant H_4\right\},$$

где H_3, H_4 — некоторые положительные постоянные, $H_3 < H_4$.

Имеем

$$\Delta V_2\big|_{(1)} = V_2(\mathbf{x}(k+1)) - V_2(\mathbf{x}(k)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{x_i(k)}^{x_i(k+1)} \frac{f_i(\tau)}{\tau}\,d\tau = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_{y_i(k)}^{y_i(k+1)} \tilde{f}_i(\xi)\,d\xi =$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{f}_i(y_i(k) + \hat{\theta}_{ik}\Delta y_i(k)) \left(c_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{f}_j(y_j(k))\right) =$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{f}_i(y_i(k)) \left(c_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{f}_j(y_j(k))\right) +$$

$$+ h\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\tilde{f}_i(y_i(k) + \hat{\theta}_{ik}\Delta y_i(k)) - \tilde{f}_i(y_i(k))\right) \left(c_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{f}_j(y_j(k))\right).$$

Здесь, как и ранее, $y_i(k) = \ln x_i(k)$, $\Delta y_i(k) = y_i(k+1) - y_i(k)$, $\hat{\theta}_{ik} \in (0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$.

Значит, если $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant H_4$ и $\|\mathbf{x}(k+1)\| \leqslant H_4$, то будет справедливо неравенство

$$\Delta V_2\big|_{(1)} \leqslant -b_4 h\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))\|^2 + b_5 h\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))\| + b_6 L(\ln H_4)h^2\left(1 + \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))\|^2\right),$$

где b_4, b_5, b_6 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от h и H_4.

Найдём величину $\widetilde{H} > 0$ такую, что

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{z})\| > b_5/b_4 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{z}\| \geqslant \widetilde{H}. \tag{6}$$

На основе величин, определяемых по формулам (3) и (6), найдём константу $\hat{H} = \max\{\bar{H};\ \widetilde{H}\}$. Будем считать, что $H_4 > H_3 > \hat{H}$. Тогда нетрудно подобрать такие положительные постоянные $h_2(H_3, H_4)$ и $b_7(H_3, H_4)$, что если $h \in (0, h_2(H_3, H_4))$, то пока решение системы (1) остаётся в области $T_3(H_3, H_4)$, будет выполнено неравенство

$$\Delta V_2\big|_{(1)} \leqslant -h\,b_7(H_3, H_4)\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))\|^2.$$

В результате, для любого $\eta \geqslant 0$ в области $T_3(H_3, H_4)$ можно построить оценку

$$\Delta V_2\big|_{(1)} \leqslant -h\,\alpha_2(\eta, H_3, H_4)V_2^{\eta}(\mathbf{x}(k)), \tag{7}$$

где $\alpha_2(\eta, H_3, H_4)$ — положительная постоянная, зависящая от выбора величин η, H_3 и H_4.

Аналогичным образом можно найти неотрицательную постоянную $\beta_2(\eta, H_3, H_4)$, зависящую от выбора величин η, H_3 и H_4, такую, что при $h \in (0, h_2(H_3, H_4))$ в области $T_3(H_3, H_4)$ будет верна оценка

$$\Delta V_2\big|_{(2)} \leqslant h\,\beta_2(\eta, H_3, H_4)V_2^{\eta}(\mathbf{x}(k)). \tag{8}$$

Замечание 2. Коэффициенты $\alpha_1(H_1,H_2)$, $\beta_1(H_2)$, $\alpha_2(\eta,H_3,H_4)$, $\beta_2(\eta,H_3,H_4)$, присутствующие в неравенствах (4)–(8), а также величины $h_1(H_2)$, $h_2(H_3,H_4)$, могут быть несложным образом оценены при выбранных значениях H_1, H_2, H_3, H_4, η для конкретно заданного семейства подсистем (1), (2) в результате численного анализа.

3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим теперь гибридную систему, образованную подсистемами (1) и (2). Пусть дискретная функция $\sigma(k):\{0,1,\ldots\}\to\{1,2\}$ определяет порядок переключения между этими подсистемами. Так, если $\sigma(k)=1$, то считаем, что во время k-ой итерации гибридная система работает в плановом режиме (1), а если $\sigma(k)=2$, то — в возмущённом режиме (2); $k=0,1,\ldots$.

Соотношения (4)–(8), установленные ранее для выбранных функций Ляпунова, позволяют получить оценки для решений гибридной системы в соответствующих областях положительного ортанта K_0^+.

Лемма. *Для любых η, y, x, таких что $\eta>0$, $y>0$ и $x<y^{-\eta+1}$, справедливы неравенства*

$$\big(y-xy^\eta\big)^{-\eta+1}\geqslant y^{-\eta+1}+(\eta-1)x,\quad \text{\textit{если}}\quad \eta>1,$$

и

$$\big(y-xy^\eta\big)^{-\eta+1}\leqslant y^{-\eta+1}+(\eta-1)x,\quad \text{\textit{если}}\quad 0<\eta<1.$$

Доказательство. Выберем $\eta>0$, $y>0$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\big(y^{-\eta+1}+(\eta-1)x\big)\big(y-xy^\eta\big)^{\eta-1}.$$

Имеем

$$\varphi'(x)=-\eta(\eta-1)xy^\eta\big(y-xy^\eta\big)^{\eta-2}.$$

Если $\eta>1$, то $\varphi'(x)>0$ при $x<0$ и $\varphi'(x)<0$ при $0<x<y^{-\eta+1}$, а значит

$$\max_{(-\infty,\,y^{-\eta+1})}\varphi(x)=\varphi(0)=1.$$

Аналогично если $0<\eta<1$, то $\varphi'(x)<0$ при $x<0$ и $\varphi'(x)>0$ при $0<x<y^{-\eta+1}$, а значит,

$$\min_{(-\infty,\,y^{-\eta+1})}\varphi(x)=\varphi(0)=1.$$

Лемма доказана. □

Пусть некоторые значения $0<H_1<\min\limits_{i=1,\ldots,n}\bar x_i$ и $H_2>\|\bar{\mathbf{x}}\|$ выбраны, величина $h_1(H_2)$ определена и оценки (4), (5) в области $T_1(H_1,H_2)$ построены.

Положим: $\bar\omega_k(H_1,H_2)=\alpha_1(H_1,H_2)$, если $\sigma(k)=1$, и $\bar\omega_k(H_1,H_2)=-\beta_1(H_2)$, если $\sigma(k)=2$; $k=0,1,\ldots$.

Возьмём $k_0\geqslant 0$, $\mathbf{x}_0\in T_1(H_1,H_2)$ и рассмотрим решение $\mathbf{x}(k)$ гибридной системы (1), (2) такое, что $\mathbf{x}(k_0)=\mathbf{x}_0$. Предположим, что при $k=k_0,\ldots,\tilde k$ решение $\mathbf{x}(k)$ остаётся в области $T_1(H_1,H_2)$. Тогда если $h\in(0,h_1(H_2))$, то при $k=k_0+1,\ldots,\tilde k$ будут справедливы оценки

$$V_1(\mathbf{x}(k))\leqslant V_1(\mathbf{x}(k-1))-h\bar\omega_{k-1}(H_1,H_2)\leqslant\ldots\leqslant V_1(\mathbf{x}_0)-h\sum_{i=k_0}^{k-1}\bar\omega_i(H_1,H_2). \tag{9}$$

Аналогично пусть некоторые значения $\eta\geqslant 0$, $H_4>H_3>\hat H$ выбраны, величина $h_2(H_3,H_4)$ определена и оценки (7), (8) в области $T_3(H_3,H_4)$ построены. Положим

$\widetilde{\omega}_k(\eta, H_3, H_4) = \alpha_2(\eta, H_3, H_4)$, если $\sigma(k) = 1$, и $\widetilde{\omega}_k(\eta, H_3, H_4) = -\beta_2(\eta, H_3, H_4)$, если $\sigma(k) = 2$; $k = 0, 1, \ldots$.

Возьмём $k_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0 \in T_3(H_3, H_4)$ и рассмотрим решение $\mathbf{x}(k)$ гибридной системы (1), (2) такое, что $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$. Предположим, что при $k = k_0, \ldots, \tilde{k}$ решение $\mathbf{x}(k)$ остаётся в области $T_3(H_3, H_4)$. Тогда, применяя лемму, нетрудно найти положительное $\bar{h}_2(\eta, H_3, H_4) \leqslant h_2(H_3, H_4)$ такое, что если $h \in (0, \bar{h}_2(\eta, H_3, H_4))$, то при $k = k_0 + 1, \ldots, \tilde{k}$ будут справедливы оценки

$$\begin{aligned} V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}(k)) &\geqslant \Big(V_2(\mathbf{x}(k-1)) - h\widetilde{\omega}_{k-1}(\eta, H_3, H_4) V_2^{\eta}(\mathbf{x}(k-1))\Big)^{-\eta+1} \geqslant \\ &\geqslant V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}(k-1)) + (\eta - 1) h\widetilde{\omega}_{k-1}(\eta, H_3, H_4) \geqslant \ldots \geqslant \\ &\geqslant V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}_0) + (\eta - 1) h \sum_{i=k_0}^{k-1} \widetilde{\omega}_i(\eta, H_3, H_4), \end{aligned} \tag{10}$$

если $\eta > 1$;

$$\begin{aligned} V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}(k)) &\leqslant \Big(V_2(\mathbf{x}(k-1)) - h\widetilde{\omega}_{k-1}(\eta, H_3, H_4) V_2^{\eta}(\mathbf{x}(k-1))\Big)^{-\eta+1} \leqslant \\ &\leqslant V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}(k-1)) + (\eta - 1) h\widetilde{\omega}_{k-1}(\eta, H_3, H_4) \leqslant \ldots \leqslant \\ &\leqslant V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}_0) + (\eta - 1) h \sum_{i=k_0}^{k-1} \widetilde{\omega}_i(\eta, H_3, H_4), \end{aligned} \tag{11}$$

если $0 \leqslant \eta < 1$;

$$V_2(\mathbf{x}(k)) \leqslant \Big(1 - h\widetilde{\omega}_{k-1}(1, H_3, H_4)\Big) V_2(\mathbf{x}(k-1)) \leqslant \ldots \leqslant \prod_{i=k_0}^{k-1} \Big(1 - h\widetilde{\omega}_i(1, H_3, H_4)\Big) V_2(\mathbf{x}_0), \tag{12}$$

если $\eta = 1$.

Учитывая конкретный вид используемых функций Ляпунова $V_1(\mathbf{z})$ и $V_2(\mathbf{z})$, неравенства (9)–(12) позволяют оценить значение $\|\mathbf{x}(k)\|$ в течение времени пребывания рассматриваемого решения $\mathbf{x}(k)$ гибридной системы в соответствующих областях положительного ортанта.

4. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Будем теперь исследовать динамику решений гибридной системы (1), (2). Получим сначала достаточные условия предельной ограниченности решений системы с помощью функции Ляпунова $V_2(\mathbf{z})$.

Теорема 1. *Пусть для некоторых выбранных значений $H_4 > H_3 > \hat{H}$, $\eta \geqslant 0$ построены оценки* (7), (8) *и при этом справедливы следующие условия:*

1) существуют числа Δ_1 и Δ_2 такие, что

$$H_3 < B(H_3) < \Delta_2 < \Delta_1 < B(\Delta_1) < H_4, \tag{13}$$

где

$$B(s) = \max_{\mathbf{z} \in K_0^+ :\ V_2(\mathbf{z}) = A(s)} \|\mathbf{z}\|, \quad A(s) = \max_{\mathbf{z} \in K_0^+ :\ \|\mathbf{z}\| = s} V_2(\mathbf{z});$$

2) время пребывания (число последовательных итераций) гибридной системы в режиме (1) *ограничено снизу натуральным значением L_1, а время пребывания (число последовательных итераций) системы в режиме* (2) *ограничено сверху натуральным значением L_2, и выполнено соотношение*

$$-\alpha_2(\eta, H_3, H_4) L_1 + \beta_2(\eta, H_3, H_4) L_2 < 0. \tag{14}$$

Тогда найдётся такое $h_{01} > 0$, *что если* $h \in (0, h_{01})$ *и* $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \Delta_1$, *то можно указать* $K \geqslant 0$ *так, чтобы неравенство* $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant \Delta_2$ *имело место при всех* $k \geqslant k_0+K$. *Здесь* $\mathbf{x}(k)$ *— решение гибридной системы* (1), (2), *удовлетворяющее начальному условию* $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$; $k_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0 \in K_0^+$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_0 \in T_3(H_3, H_4)$. Тогда, если $h \in (0, \bar{h}_2(\eta, H_3, H_4))$, то пока решение гибридной системы остаётся в области $T_3(H_3, H_4)$, будут выполнены оценки (10)–(12) (в зависимости от выбранного значения η).

Выбор величины Δ_1 согласно неравенствам (13), а также предположение об ограниченности времени пребывания системы в режиме (2) гарантируют существование значения $0 < h_{21}(\eta, H_3, H_4, \Delta_1, L_2) \leqslant \bar{h}_2(\eta, H_3, H_4)$ такого, что при $h \in (0, h_{21}(\eta, H_3, H_4, \Delta_1, L_2))$ и $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \Delta_1$ будет сохраняться условие $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant H_4$ при всех $k = k_0, k_0+1, \ldots$ (т. е. решение гибридной системы не покинет область $T_3(H_3, H_4)$ через верхнюю границу $\|\mathbf{z}\| = H_4$).

С другой стороны, согласно условию (14) найдётся такое $\bar{k} \geqslant k_0$, что при $k = \bar{k}$ оценки (10)–(12) станут несовместными в области $T_3(H_3, H_4)$ (значит, решение гибридной системы в момент $k = \bar{k}$ покинет область $T_3(H_3, H_4)$ через нижнюю границу $\|\mathbf{z}\| = H_3$).

Наконец, выбор величины Δ_2 согласно неравенствам (13) с учётом предположения об ограниченности времени пребывания системы в режиме (2) гарантируют существование значения $0 < h_{22}(\eta, H_3, H_4, \Delta_2, L_2) \leqslant \bar{h}_2(\eta, H_3, H_4)$ такого, что при $h \in (0, h_{22}(\eta, H_3, H_4, \Delta_2, L_2))$ будет сохраняться условие $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant \Delta_2$ при всех $k \geqslant \bar{k}$ (т. е. решение гибридной системы, войдя в какой-то момент в область $T_2(\Delta_2)$, в дальнейшем её уже не покинет).

Полагая $h_{01} = \min\{h_{21}(\eta, H_3, H_4, \Delta_1, L_2); h_{22}(\eta, H_3, H_4, \Delta_2, L_2)\}$, приходим к требуемому. Теорема доказана. □

Замечание 3. Нетрудно проверить, что величина K в формулировке теоремы 1 может быть выбрана не зависящей от k_0, т. е. условия теоремы 1 обеспечивают равномерную предельную ограниченность решений.

Замечание 4. Неравенства (13) задают ограничения на выбор величин H_3 и H_4 (см. рис. 2). Можно заметить, что для существования величин Δ_1 и Δ_2, удовлетворяющих неравенствам (13), необходимо и достаточно, чтобы значения H_3 и H_4 были выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $B(B(H_3)) < H_4$.

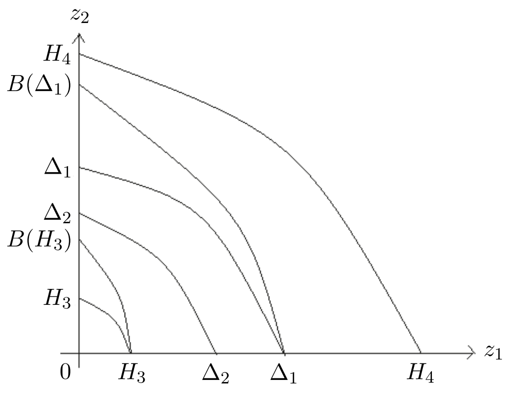

Рис. 2. Ограничения на выбор значений H_3 и H_4

Замечание 5. С помощью выбора величины η можно оптимизировать соотношение (14), найдя $\max\limits_{\eta \geqslant 0} \alpha_2(\eta, H_3, H_4)/\beta_2(\eta, H_3, H_4)$. Отметим, что условие 1) теоремы 1 не зависит от выбора η. Однако, от выбора η зависит оценка на предельное допустимое значение шага дискретизации h_{01}.

Замечание 6. Если функции $\tilde{f}_i(z_i) = f_i(e^{z_i})$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условию Липшица на любом интервале $(-\infty, H]$ с константой Липшица $L > 0$, не зависящей от выбора H, то, полагая $H_4 = +\infty$, можно рассмотреть задачу о равномерной диссипативности гибридной системы (1), (2). Для этого достаточно сделать дополнительное предположение о существовании такого $\eta \geqslant 0$, для которого оценки (7), (8) будут справедливы в области $T_3(H_3, +\infty)$. В этом случае в условиях теоремы 1 можно выбрать $\Delta_1 = +\infty$.

Привлечём теперь для динамического анализа функцию Ляпунова $V_1(\mathbf{z})$, чтобы гарантировать перманентность гибридной системы (1), (2).

Теорема 2. *Пусть время пребывания (число последовательных итераций) гибридной системы в режиме* (1) *ограничено снизу натуральным значением* L_1*, а время пребывания (число последовательных итераций) системы в режиме* (2) *ограничено сверху натуральным значением* L_2*, и справедливы следующие условия:*

1) для некоторых выбранных значений $H_4 > H_3 > \hat{H}$, $\eta \geqslant 0$ *построены оценки* (7), (8)*, и при этом существуют числа* Δ_1 *и* Δ_2*, удовлетворяющие неравенствам* (13)*, а также верно соотношение* (14)*;*

2) для некоторого $0 < H_1 < \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_i$ *и* $H_2 = \Delta_2$ *построены оценки* (4), (5) *и при этом*

$$-\alpha_1(H_1, \Delta_2)L_1 + \beta_1(\Delta_2)L_2 < 0. \tag{15}$$

Тогда для любой константы $C > 0$ *можно найти* $h_{02} > 0$ *так, что если* $h \in (0, h_{02})$*, то будет существовать* $N \geqslant 0$ *такое, что любое решение гибридной системы* (1), (2)*, начинающееся в области* $T_2(\Delta_1)$*, не позднее* N*-ой итерации войдёт в область*

$$G = \left\{ \mathbf{z} \in K_0^+ : \; V_1(\mathbf{z}) \leqslant D(H_1) + C \right\} \cap T_2(\Delta_2),$$

где $D(H_1) = \max\limits_{\mathbf{z} \in K_0^+ : \; \|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{x}}\| = H_1} V_1(\mathbf{z})$*, и далее её не покинет.*

Доказательство. Согласно теореме 1, при $h \in (0, h_{01})$ любое решение системы (1), (2), начинающееся в области $T_2(\Delta_1)$, в какой-то момент войдёт в область $T_2(\Delta_2)$ и более её не покинет. Условие (15), с учётом оценки (9), гарантирует, что если $h \in (0, h_1(\Delta_2))$, то в какой-то момент решение войдёт в H_1-окрестность точки $\bar{\mathbf{x}}$. Наконец, шаг дискретизации можно выбрать настолько малым, чтобы решения, начинающиеся в H_1-окрестности точки $\bar{\mathbf{x}}$, не выпрыгивали за пределы области G за L_2 итераций. Теорема доказана. □

Замечание 7. Применение функции Ляпунова $V_2(\mathbf{z})$ позволяет загнать решения гибридной системы (1), (2), начинающиеся в области $T_2(\Delta_1)$ в область $T_2(\Delta_2)$ (гарантировать их предельную ограниченность). А применение функции Ляпунова $V_1(\mathbf{z})$ позволяет в дальнейшем загнать решения в некоторую окрестность G точки $\bar{\mathbf{x}}$ (гарантировать перманентность системы). Размеры окрестности G, ограничения на величины L_1 и L_2, а также оценку допустимого шага дискретизации, можно регулировать за счёт выбора констант C, H_1, H_3, H_4, η, Δ_1, Δ_2. На рис. 3 изображена схема поведения решений системы, обеспечивающегося теоремой 2. Отметим, что с помощью только одной из функций Ляпунова $V_1(\mathbf{z})$ или $V_2(\mathbf{z})$ гарантировать перманентность системы при сделанных предположениях не удастся.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим систему вида (1), описывающую взаимодействие двух ($n = 2$) популяций в биологическом сообществе

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) \exp\Big(h\big(-1 - x_1(k) + 2x_2(k)\big)\Big), \\ x_2(k+1) &= x_2(k) \exp\Big(h\big(3 - 2x_1(k) - x_2(k)\big)\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

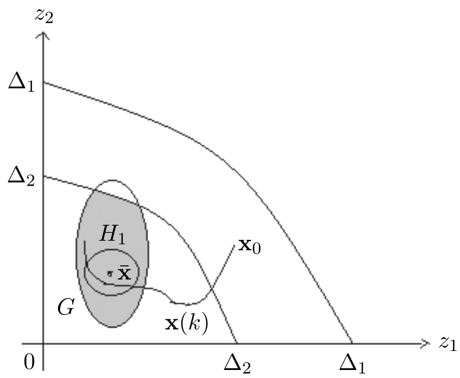

Рис. 3. Динамика решений гибридной системы

Здесь $f_i(z_i) = z_i$, $i = 1, 2$. Система (16) имеет положение равновесия $\bar{\mathbf{x}} = (1, 1)^T \in K_0^+$.

Предположим, что возмущённая система (2) представлена в форме

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) \exp\Big(h\big(-\cos(k) + \cos(k)\, x_1(k) + 2\sin(k)\, x_2(k)\big)\Big), \\ x_2(k+1) &= x_2(k) \exp\Big(h\big(3\cos(k) - 2\sin(k)\, x_1(k) + \cos(k)\, x_2(k)\big)\Big). \end{aligned} \tag{17}$$

Выберем $\Lambda = \operatorname{diag}\{1,\, 1\}$ и построим функции Ляпунова

$$V_1(\mathbf{z}) = z_1 - \ln z_1 + z_2 - \ln z_2 - 2, \quad V_2(\mathbf{z}) = z_1 + z_2 - 2.$$

Зададим $H_3 = 4$. Тогда $B(H_3) = 4\sqrt{2}$, и потому можно взять, например, $\Delta_2 = 6$, $\Delta_1 = 10$. Получим $B(\Delta_1) = 10\sqrt{2}$, и следовательно, для выполнения неравенств (13) достаточно положить $H_4 = 15$.

Для $\eta = 2$ при достаточно малом шаге дискретизации h в области $T_3(4, 15)$ придём к оценкам

$$V_2(\mathbf{z}) > 0, \quad \Delta V_2\big|_{(16)} \leqslant -0.15\, h\, V_2^2(\mathbf{x}(k)), \quad \Delta V_2\big|_{(17)} \leqslant 7.1\, h\, V_2^2(\mathbf{x}(k)).$$

Согласно теореме 1, если выполнено неравенство

$$-0.15 L_1 + 7.1 L_2 < 0, \tag{18}$$

то решения исследуемой гибридной системы, состоящей из подсистем (16) и (17), начинающиеся в области $T_2(10)$, в какой-то момент времени попадут в область $T_2(6)$ и более из неё не выйдут. Таким образом, указанные решения системы будут предельно ограниченными.

Возьмём теперь $H_1 = 0.75$. При достаточно малом шаге дискретизации h в области $T_1(0.75, 6)$ получим оценки

$$\Delta V_1\big|_{(16)} \leqslant -0.56\, h, \quad \Delta V_1\big|_{(17)} \leqslant 53\, h.$$

Значит, если, в дополнение к неравенству (18), выполнено соотношение

$$-0.56 L_1 + 53 L_2 < 0, \tag{19}$$

то согласно теореме 2 изучаемая гибридная система будет перманентной для решений, начинающихся в области $T_2(10)$. Отметим, что неравенство (18) вытекает из неравенства (19). Таким образом, условие (19) будет гарантировать невымирание рассматриваемых популяций и их ограниченную численность. Более того, с помощью теоремы 2 можно оценить границы для предельных численностей этих популяций. Наилучшей точности оценок можно добиться путём численного перебора возможных значений параметров H_1, H_3, H_4, Δ_1, Δ_2, η.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были получены ограничения на закон переключения между плановым и возмущённым режимами функционирования заданной дискретной динамической системы, гарантирующие предельную ограниченность решений системы и её перманентность. Для решения поставленной задачи использовался прямой метод Ляпунова. Поскольку для неоднородных систем оценки на выбранную функцию Ляпунова, как правило, существенно зависят от рассматриваемой области фазового пространства, бывает целесообразно разбить фазовое пространство на части и в каждой из частей использовать свои оценки. Возможно даже в каждой из частей строить свою функцию Ляпунова. В настоящей работе к анализу были привлечены две функции Ляпунова. Было отмечено, что лишь совместное применение этих функций приводит к желаемому результату. Полученные в работе соотношения связывают между собой ограничения на закон переключения, размеры области начальных значений решений, размеры области предельного пребывания решений, величину шага дискретизации. Эти соотношения определяются выбором некоторых вспомогательных параметров, что позволяет формулировать задачи по оптимизации данного выбора.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Санкт-Петербургского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
2. *Kazkurewicz E., Bhaya A.* Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation. Boston: Birkhauser, 1999.
3. *Пых Ю. А.* Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983.
4. *Hofbauer J., Hutson V., Jansen W.* Coexistence for systems governed by difference equations of Lotka—Volterra type // J. Math. Biol. 1987. V. 25, N 5. P. 553–570; DOI: 10.1007/BF00276199
5. *Chen F. D.* Permanence and global attractivity of a discrete multispecies Lotka—Volterra competition predator-prey systems // Appl. Math. Comput. 2006. V. 182, N 1. P. 3–12; DOI: 10.1016/j.amc.2006.03.026
6. *Lu Z., Wang W.* Permanence and global attractivity for Lotka—Volterra difference systems // J. Math. Biol. 1999. V. 39, N 3. P. 269–282; DOI: 10.1007/s002850050171
7. *Перцев Н. В., Пичугин Б. Ю., Логинов К. К.* Статистическое моделирование динамики популяций, развивающихся в условиях воздействия токсичных веществ // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 2. С. 84–94.
8. *Capone F., De Luca R., Rionero S.* On the stability of non-autonomous perturbed Lotka—Volterra models // Appl. Math. Comput. 2013. V. 219, N 12. P. 6868–6881; DOI: 10.1016/j.amc.2013.01.003
9. *Li L., Wang Zh.-J.* Global stability of periodic solutions for a discrete predator-prey system with functional response // Nonlinear Dynamics. 2013. V. 72, N 3. P. 507–516; DOI: 10.1007/s11071-012-0730-6
10. *Chakraborty K., Haldar S., Kar T. K.* Global stability and bifurcation analysis of a delay induced prey-predator system with stage structure // Nonlinear Dyn. 2013. V. 73, N 3. P. 1307–1325; DOI: 10.1007/s11071-013-0864-1

11. *Balbus J.* Permanence in nonautonomous competitive systems with nonlocal dispersal // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 447, N 1. P. 564–578; DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.10.030

12. *Bao J., Mao X., Yin G., Yuan C.* Competitive Lotka—Volterra population dynamics with jumps // Nonlinear Anal. 2011. V. 74, N 17. P. 6601–6616; DOI: 10.1016/j.na.2011.06.043

13. *Hu H., Wang K., Wu D.* Permanence and global stability for nonautonomous N-species Lotka—Volterra competitive system with impulses and infinite delays // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 377, N 1. P. 145–160; DOI: 10.1016/j.jmaa.2010.10.031

14. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhauser, 2003.

15. *Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A. N.* Disturbance attention properties of time-controlled switched systems // J. Franklin Inst. 2001. V. 338, N 7. P. 765–779; DOI: 10.1016/S0016-0032(01)00030-8

16. *Zu L., Jiang D., O'Regan D.* Conditions for persistence and ergodicity of a stochastic Lotka—Volterra predator-prey model with regime switching // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 29, N 1–3. P. 1–11; DOI: 10.1016/j.cnsns.2015.04.008

17. *Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Platonov A. V., Zhang L.* Stability analysis and uniform ultimate boundedness control synthesis for a class of nonlinear switched difference systems // J. Differ. Equ. Appl. 2012. V. 18, N 9. P. 1545–1561; DOI: 10.1080/10236198.2011.581665

18. *Platonov A. V.* On the global asymptotic stability and ultimate boundedness for a class of nonlinear switched systems // Nonlinear Dyn. 2018. V. 92, N 4. P. 1555–1565; DOI: 10.1007/s11071-018-4146-9

19. *Wang S., Wu W., Lu J., She Zh.* Inner-approximating domains of attraction for discrete-time switched systems via multi-step multiple Lyapunov-like functions // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 2021. V. 40. Article 100993; DOI: 10.1016/j.nahs.2020.100993

20. *Platonov A. V.* Analysis of the dynamical behavior of solutions for a class of hybrid generalized Lotka—Volterra models // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2023. V. 119. Article 107068; DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.107068

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.962

ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF SOLUTIONS FOR HYBRID DIFFERENCE LOTKA—VOLTERRA SYSTEMS

© 2024 A. V. Platonov

St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia

E-mail: a.platonov@spbu.ru

Received 28.06.2023, revised 04.09.2024, accepted 06.11.2024

Abstract. A difference system of the Lotka—Volterra type is considered. It is assumed that this system can operate both in some program and perturbed modes. The restrictions on the time of the system's stay in these modes, providing the desired dynamical behavior, are investigated. In particular, the conditions of the ultimate boundedness of solutions and the permanence of the system are obtained. The direct Lyapunov method is used, and different Lyapunov functions are constructed in different parts of the phase space. The sizes of the domain of permissible initial values of solutions and the domain of the ultimate bound of solutions corresponding to the required dynamics of the system are estimated. Constraints are set on the size of the digitization step of the system.

Keywords: Lotka—Volterra systems, switching, ultimate boundedness of solutions, permanence.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.407

REFERENCES

1. J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).
2. E. Kazkurewicz and A. Bhaya, *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation* (Birkhäuser, Boston, 1999).
3. Yu. A. Pykh, *Equilibrium and Stability in Population Dynamics Models* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
4. J. Hofbauer, V. Hutson, and W. Jansen, "Coexistence for systems governed by difference equations of Lotka–Volterra type," J. Math. Biol. **25** (5), 553–570 (1987). https://doi.org/10.1007/BF00276199
5. F. D. Chen, "Permanence and global attractivity of a discrete multispecies Lotka–Volterra competition predator-prey systems," Appl. Math. Comput. **182** (1), 3–12 (2006). https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.03.026
6. Z. Lu and W.Wang, "Permanence and global attractivity for Lotka—Volterra difference systems," J. Math. Biol. **39** (3), 269–282 (1999). https://doi.org/10.1007/s002850050171
7. N. V. Pertsev, B. Yu. Pichugin, and K. K. Loginov, "Statistical modeling of population dynamics developing under the influence of toxic substances," Sib. Zh. Ind. Mat. **14** (2), 84–94 (2011) [in Russian].
8. F. Capone, R. De Luca, and S. Rionero, "On the stability of non-autonomous perturbed Lotka—Volterra models," Appl. Math. Comput. **219** (12), 6868–6881 (2013). https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.01.003
9. L. Li and Zh.-J. Wang, "Global stability of periodic solutions for a discrete predator—prey system with functional response," Nonlinear Dyn. **72** (3), 507–516 (2013). https://doi.org/10.1007/s11071-012-0730-6

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 813–824.

10. K. Chakraborty, S. Haldar, and T. K. Kar, "Global stability and bifurcation analysis of a delay induced prey-predator system with stage structure," Nonlinear Dyn. **73** (3), 1307–1325 (2013). https://doi.org/10.1007/s11071-013-0864-1

11. J. Balbus, "Permanence in nonautonomous competitive systems with nonlocal dispersal," J. Math. Anal. Appl. **447** (1), 564–578 (2017). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.10.030

12. J. Bao, X. Mao, G. Yin, and C. Yuan, "Competitive Lotka—Volterra population dynamics with jumps," Nonlinear Anal. **74** (17), 6601–6616 (2011). https://doi.org/10.1016/j.na.2011.06.043

13. H. Hu, K. Wang, and D. Wu, "Permanence and global stability for nonautonomous N-species Lotka—Volterra competitive system with impulses and infinite delays," J. Math. Anal. Appl. **377** (1), 145–160 (2011). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.10.031

14. D. Liberzon, *Switching in Systems and Control* (Birkhäuser, Boston, 2003).

15. G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, and A. N. Michel, "Disturbance attention properties of time-controlled switched systems," J. Franklin Inst. **338** (7), 765–779 (2001). https://doi.org/10.1016/S0016-0032(01)00030-8

16. L. Zu, D. Jiang, and D. O'Regan, "Conditions for persistence and ergodicity of a stochastic Lotka—Volterra predator-prey model with regime switching," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **29** (1–3), 1–11 (2015). https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.04.008

17. A. Yu. Aleksandrov, Y. Chen, A. V. Platonov, and L. Zhang, "Stability analysis and uniform ultimate boundedness control synthesis for a class of nonlinear switched difference systems," J. Differ. Equ. Appl. **18** (9), 1545–1561 (2012). https://doi.org/10.1080/10236198.2011.581665

18. A. V. Platonov, "On the global asymptotic stability and ultimate boundedness for a class of nonlinear switched systems," Nonlinear Dyn. **92** (4), 1555–1565 (2018). https://doi.org/10.1007/s11071-018-4146-9

19. S. Wang, W. Wu, J. Lu, and Zh. She, "Inner-approximating domains of attraction for discrete-time switched systems via multi-step multiple Lyapunov-like functions," Nonlinear Anal. Hybrid Syst. **40**, 100993 (2021). https://doi.org/10.1016/j.nahs.2020.100993

20. A. V. Platonov, "Analysis of the dynamical behavior of solutions for a class of hybrid generalized Lotka—Volterra models," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **119**, 107068 (2023). https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.107068