

УДК 517.958

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОЦЕССА ПОПЕРЕЧНЫХ
КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СТРУН

© 2025 Д. С. Коновалова

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: dsk@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 02.08.2024 г.; после доработки 27.02.2025 г.;
принята к публикации 10.03.2025 г.

В работе рассматривается процесс поперечных колебаний двух струн, соединённых между собой в некоторой точке. Построена математическая модель этого процесса, в основе которой лежит закон сохранения количества движения, выраженный в форме интегро-дифференциального уравнения. Это уравнение связывает отклонения струн в процессе колебаний с их характеристиками, такими как плотность, натяжение, источники внешних сил. Этот подход можно рассматривать как развитие метода, предложенного А. Н. Тихоновым для уравнения колебаний струны с негладкими данными. Для случая когда плотности струн постоянны и, вообще говоря, не совпадают, сформулирована неклассическая задача, содержащая, помимо данных Коши, необходимые условия согласования. Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи, получены явные формулы её решения.

Ключевые слова: волновое уравнение, интегральные законы сохранения, задача Коши, решётки, разрывные функции.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.102

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена исследованию вопросов, связанных с процессом колебаний струнных решёток (сетей). Под струнной решёткой подразумевается конструкция, состоящая из нескольких струн, имеющих общие точки, т. е. соединённых друг с другом в этих точках. Такая конструкция может быть как двух-, так и трёхмерной. Предполагается, что происходит процесс поперечных колебаний этой системы струн. В данной работе рассматривается система, состоящая всего из двух струн, имеющих общую точку. Предполагается, что эти струны расположены под прямым углом друг к другу и колеблются в плоскости, перпендикулярной плоскости, в которой лежат обе струны.

Отметим некоторые характерные черты настоящего исследования. Так, при построении математической модели используются функции, имеющие разрывы первого рода. К числу работ с такой же особенностью можно отнести, например, работы [1–8]. Приведём краткий обзор этих публикаций.

В работах [1–3] численными методами исследуются практически важные задачи визуализации, обратные задачи сейсморазведки в слоистых средах различной размерности и другие. Решение подобных задач естественно искать в классе кусочно-непрерывных функций, что и делают авторы. Также в данных исследованиях используется дискретизированное преобразование Радона и его обращение. Изучается вопрос о точности такой дискретизации.

Новые формулы обращения преобразования Радона, а также алгоритм реконструкции подынтегральной функции для кусочно-непрерывных функций получены в [4–5].

Методы, используемые в настоящей работе, во многом аналогичны методам, на которых основано решение задач работ [6–8]. Эти исследования посвящены задачам, связанным с процессом поперечных колебаний неоднородной струны и продольных колебаний упругого неоднородного стержня. В указанных статьях предполагается, что характеристики струны/стержня являются кусочно-постоянными функциями.

Ещё одной специфической чертой настоящей работы является использование нетрадиционных дополнительных условий. В качестве иллюстрации подобного подхода можно привести работы [9–12]. Задачи, рассмотренные в этих работах, наряду с дифференциальными уравнениями разного порядка и различных типов, содержат нелокальные начально-краевые условия. К ним можно отнести интегральные и интегро-дифференциальные граничные условия, краевые условия, нелокальные по части переменных и т. д. Авторами доказана разрешимость и единственность решения соответствующих начально-краевых задач, получены оценки производных решения.

В заключение отметим также работы [13–15]. В этих исследованиях, имеющих прикладной характер, для дискретизации неоднородных сплошных сред используются решётки, по которым распространяется определённый волновой процесс. В качестве решёток авторы используют набор узлов внутри сред. Поскольку неоднородности исследуемых сред описываются кусочно-непрерывными функциями, особое внимание в данных работах уделено волновому процессу на решётках вблизи границ этих неоднородностей. Также исследуется вопрос о возможности аппроксимации сплошных сред решётками и приводятся условия, при которых данная дискретизация обеспечивает приемлемое приближение исходного процесса.

1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим процесс поперечных колебаний двух бесконечных струн, соединённых между собой в некоторой точке. Будем предполагать, что смещение каждой из струн в любой момент времени лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости, образованной рассматриваемыми струнами. Будем также считать, что струны не сопротивляются изгибу.

При построении математической модели данного процесса будем основываться на хорошо известных рассуждениях, используемых для математического описания процесса малых поперечных колебаний струны (см., например, [16]). Для определённости условимся обозначать струны X и Y и считать, что они расположены вдоль осей Ox и Oy соответственно, и пересекаются в начале координат. Для вывода уравнения колебаний системы струн воспользуемся вторым законом Ньютона. Рассмотрим, в первую очередь, что происходит в окрестности пересечения струн X и Y , т. е. на участках (x_1, x_2) и (y_1, y_2) , где числа x_1, y_1 отрицательны, а x_2, y_2 — положительны. В дальнейшем такие общие участки системы будем обозначать l_{xy} , а участки струн, не содержащие точки O , обозначим l_x (на струне X) и l_y (на струне Y).

Пусть функция $u(x, t)$ описывает смещение струны X в точке x в момент времени t , а функция $v(y, t)$ — аналогичное смещение струны Y . Тогда составляющая количества движения на участке l_{xy} равна

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \rho_1(\xi) d\xi + \int_{y_1}^{y_2} v_t(\xi, t) \rho_2(\xi) d\xi,$$

где ρ_1, ρ_2 — линейные плотности струн X и Y . Соответственно, изменение количества движения на этом участке системы за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ представляется суммой

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_1(\xi) (u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)) d\xi + \int_{y_1}^{y_2} \rho_2(\xi) (v_t(\xi, t_2) - v_t(\xi, t_1)) d\xi.$$

Данное выражение, согласно второму закону Ньютона, равно импульсу действующих сил, которые, в свою очередь, складываются из натяжений T_1 , T_2 рассматриваемой системы струн и внешней силы, плотность (нагрузка) которой описывается непрерывными функциями $F_1(x, t)$, $F_2(y, t)$. Поскольку струны соединены в точке $(0, 0)$, нам необходимо дополнительно предположить, что заданные функции $F_1(x, t)$, $F_2(y, t)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$, а также неизвестные функции $u(x, t)$ и $v(y, t)$, удовлетворяют условиям согласования

$$F_1(0, t) = F_2(0, t), \quad u(0, t) = v(0, t), \quad T_1 u_x(0, t) = T_2 v_y(0, t). \quad (1)$$

Итак, в результате получаем уравнение поперечных колебаний участка l_{xy} нашей системы струн в интегральной форме:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \rho_1(\xi) (u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)) d\xi + \int_{y_1}^{y_2} \rho_2(\xi) (v_t(\xi, t_2) - v_t(\xi, t_1)) d\xi = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} (T_1 (u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)) + T_2 (v_y(y_2, \tau) - v_y(y_1, \tau))) d\tau \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} F_1(\xi, \tau) d\xi + \int_{y_1}^{y_2} F_2(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Что же касается участков l_x и l_y , то для них уравнение колебаний в интегральной форме ничем не отличается от уравнения колебаний одной бесконечной струны, поскольку в этом случае участки разных струн изолированы друг от друга и не взаимодействуют между собой [16], стр. 75.

Следующий шаг в классическом выводе уравнения колебаний струны — это предположение о двукратной непрерывной дифференцируемости функций, содержащихся в интегральном уравнении. Однако в [16], стр. 72–79, авторы подчёркивают, что данное предположение сужает круг изучаемых физических явлений, что нежелательно с практической точки зрения. В нашем случае природа рассматриваемого колебательного процесса такова, что искомые функции $u(x, t)$ и $v(y, t)$, вообще говоря, не обладают непрерывными частными производными второго порядка. Действительно, в точке соединения струн (и только в ней) каждая из струн получает импульс от другой струны, поэтому естественно было бы ожидать появления разрывов по крайней мере вторых производных функций $u(x, t)$ и $v(y, t)$. Принимая во внимание эти предварительные соображения, в дальнейшем именно интегральное уравнение (2) будет использоваться нами в качестве основного соотношения, описывающего колебания системы струн.

Представим теперь уравнение (2) в иной форме. Для этого обозначим T_{xy} множество, являющееся объединением координатных плоскостей (x, t) и (y, t) в трёхмерном пространстве. В T_{xy} выделим множество G_{xy} , удовлетворяющее следующим условиям:

1. $G_{xy} = G_x \cup G_y$, G_x — область в плоскости (x, t) , G_y — в плоскости (y, t) .
2. Пересечение области G_x с осью Ot совпадает с пересечением области G_y с этой осью: $G_x \cap Ot = G_y \cap Ot$.
3. Границы ∂G_x и ∂G_y являются кусочно-гладкими кривыми, которые мы обозначим C_x и C_y соответственно.

Убедимся теперь, что равенство (2) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{C_x} \left(\rho_1(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx + T_1 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{C_y} \left(\rho_2(y) \frac{\partial v}{\partial t} dy + T_2 \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) + \\ + \iint_{G_x} F_1(x, t) dx dt + \iint_{G_y} F_2(y, t) dy dt = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим сначала, что в случае, когда кривые C_x, C_y являются контурами прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, равенство (3) превращается в равенство (2). Если же данные кривые состоят из нескольких прямоугольников, то формула (3) является просто суммой соотношений (2), записанных для каждого из этих прямоугольников. Учитывая, что при суммировании интегрирование по внутренним границам происходит в обоих направлениях, в результате также получим формулу (3).

Пусть теперь кривые C_x и C_y состоят из произвольных дуг, не являющихся при этом линиями разрыва подынтегральных функций. Для того чтобы убедиться в справедливости формулы (3) и в этом случае, достаточно заменить кривые C_x, C_y ломаными, звенья которых параллельны осям координат. Для областей, ограниченных ломаными, равенство (3) уже доказано. Устремляя к нулю длины всех звеньев, несложно убедиться, что в пределе мы получим формулу (3) для исходных кривых C_x и C_y .

Если же граница множества G_{xy} содержит дуги, являющиеся линиями разрыва подынтегральных функций, равенство (3) остаётся справедливым, если в качестве значений на границе использовать предельные значения с внутренней стороны множества G_{xy} .

В дальнейшем мы будем использовать интегральное уравнение именно в виде (3), учитывая при этом, что содержащиеся в (3) функции должны также удовлетворять условиям согласования (1).

Отметим, что если рассматривать систему двух струн как единое целое, то при построении математической модели естественно использовать функции, допускающие разрывы первого рода.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В данном параграфе более подробно будет исследован случай, когда струны X и Y нашей системы являются однородными, т. е. $\rho_1(x) = \rho_1 = \text{const}$, $\rho_2(x) = \rho_2 = \text{const}$. Именно в рамках этого предположения мы дадим строгую формулировку исследуемой задачи, докажем её разрешимость и единственность полученного решения. Обозначим верхнюю полуплоскость плоскости (x, t) через $R_x^+ = \{(x, t) | t \geq 0\}$, а верхнюю полуплоскость плоскости (y, t) — через $R_y^+ = \{(y, t) | t \geq 0\}$.

Задача. Найти пару функций, определённых в классах $C^1(R_x^+)$, $C^1(R_y^+)$ соответственно, удовлетворяющих уравнению

$$\begin{aligned} \int_{C_x} \left(\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx + T_1 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{C_y} \left(\rho_2 \frac{\partial v}{\partial t} dy + T_2 \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) + \\ + \iint_{G_x} F_1(x, t) dx dt + \iint_{G_y} F_2(y, t) dy dt = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad v(y, 0) = \varphi_2(y), \quad v_t(y, 0) = \psi_2(y), \quad (5)$$

а также условиям согласования

$$u(0, t) = v(0, t), \quad T_1 u_x(0, t) = T_2 v_y(0, t). \quad (6)$$

Подобно ограничениям в [16], стр. 72–79, будем считать функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(y)$ кусочно-гладкими, а функции $F_1(x, t)$, $F_2(y, t)$ — кусочно-непрерывными, удовлетворяющими условиям согласования

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad \psi_1(0) = \psi_2(0), \quad F_1(0, t) = F_2(0, t). \quad (7)$$

Теорема. *Существует единственное решение задачи (4)–(7).*

Доказательство. Для того чтобы убедиться в справедливости сформулированной теоремы, выведем явную формулу решения исследуемой задачи. Сначала, в предположении, что решение данной задачи существует, мы построим его явную формулу, из которой и будет следовать единственность. После этого будет доказано существование искомого решения.

Итак, пусть пара функций $u(x, t)$, $v(y, t)$ является решением нашей задачи. Обратимся к равенству (4). Рассмотрим в качестве кривой C_x треугольник AHB , а в качестве C_y — треугольник CHD . Вершина H данных треугольников лежит на положительной части оси Ot , основания AB и CD расположены вдоль осей Ox и Oy соответственно, а боковые стороны AH , HB и CH , HD являются отрезками характеристик $\sqrt{\rho_1}x \mp \sqrt{T_1}t = \text{const}$ — для сторон AH , HB , и $\sqrt{\rho_2}y \pm \sqrt{T_2}t = \text{const}$ — для сторон CH , HD . Учитывая условия согласования (6), обозначим $u(H) = v(H) = T_H$. В силу того, что вдоль отрезка AH выполнено равенство $dx/dt = \sqrt{T_1/\rho_1} = a_1$, имеет место соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = a_1 du.$$

Аналогично вдоль отрезков HB , CH , HD выполнены соответственно равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = -a_1 du,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} dy + a_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} dt = -a_2 du,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} dy + a_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} dt = a_2 du.$$

Отсюда, с учётом введённых обозначений, приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_B^H \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) &= -a_1 (T_H - u(B)), \\ \int_H^A \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) &= a_1 (u(A) - T_H), \\ \int_C^H \left(\frac{\partial v}{\partial t} dx + a_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) &= -a_2 (T_H - v(C)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_H^D \left(\frac{\partial v}{\partial t} dx + a_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) = a_2 (v(D) - T_H), \quad (9)$$

здесь $a_2 = \sqrt{T_2/\rho_2}$. Подставим теперь полученные равенства в уравнение (3):

$$\begin{aligned} & -\rho_1 a_1 (T_H - u(B)) + \rho_1 a_1 (u(A) - T_H) - \rho_2 a_2 (T_H - u(C)) + \rho_2 a_2 (u(D) - T_H) + \\ & + \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{DHC} F_2(y, t) dy dt = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из полученного равенства можно выразить функцию T_H , описывающую поведение нашей системы в точке пересечения струн X и Y . Заменив в равенстве (10) произведения $\rho_i a_i$, $i = 1, 2$ выражениями $\rho_i a_i = \sqrt{T_i \rho_i}$ и выполнив несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} T_H = & \frac{\sqrt{T_1 \rho_1}}{2(\sqrt{T_1 \rho_1} + \sqrt{T_2 \rho_2})} (u(A) + u(B)) + \frac{\sqrt{T_2 \rho_2}}{2(\sqrt{T_1 \rho_1} + \sqrt{T_2 \rho_2})} (v(C) + v(D)) + \\ & + (2(\sqrt{T_1 \rho_1} + \sqrt{T_2 \rho_2}))^{-1} \left(\int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{DHC} F_2(y, t) dy dt \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, функция T_H , определяемая равенством (11), описывает колебания нашей системы в каждый момент времени в точке соединения струн. Для построения решения введём в рассмотрение множество I_{xy} , которое является объединением множеств $I_x = \{(x, t) \in R_x^+ \mid a_1 t \geq |x|\}$ и $I_y = \{(y, t) \in R_y^+ \mid a_2 t \geq |y|\}$, $I_{xy} = I_x \cup I_y$, а также множества $S_x = R_x^+ \setminus I_x$, $S_y = R_y^+ \setminus I_y$. Очевидно, что на множествах S_x и S_y струны колеблются обособленно и не влияют друг на друга. Наоборот, I_{xy} является множеством, где происходит взаимодействие струн X и Y , поэтому интерес представляет построение решения именно в этом множестве. Используя соотношение (11), выведем теперь формулу для решения нашей задачи в каждой точке множества I_{xy} .

Пусть $M(x_0, t_0)$ — произвольная точка пересечения множества I_{xy} с плоскостью (x, t) . В качестве множества G_{xy} рассмотрим объединение треугольников $EMB \subset (x, t)$ и $DHC \subset (y, t)$. Для определённости будем считать, что $x_0 < 0$. Тогда E — это точка пересечения характеристики $x - x_0 - a_1(t - t_0) = 0$ с осью Ox . Повторяя для данных треугольников рассуждения, аналогичные приведённым выше, получим следующие равенства:

$$\int_B^M \frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = -a_1 (u(M) - u(B)), \quad (12)$$

$$\int_M^E \frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = a_1 (u(E) - u(M)). \quad (13)$$

Складывая равенства (12) и (13), а также равенства (8) и (9), и подставляя полученные соотношения в интегральное уравнение (4), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \rho_1 a_1 (u(E) + u(B) - 2u(M)) + \rho_2 a_2 (v(C) + v(D) - 2T_H) + \\ & \rho_1 \int_E^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \rho_2 \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{EMB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{CHD} F_2(y, t) dy dt = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в данное равенство вместо T_H его выражение (11), получим формулу решения нашей задачи:

$$\begin{aligned}
 u(M) = & u(E)/2 + (2(\sqrt{\rho_1 T_1} + \sqrt{\rho_2 T_2}))^{-1} \left(\sqrt{\rho_1 T_1} u(B) + \sqrt{\rho_2 T_2} (v(C) + v(D) - u(A)) + \right. \\
 & \left. \rho_2 \sqrt{\rho_1 T_1} \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \rho_1 \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{DHC} F_2(y, t) dy dt \right) + \\
 & (2\sqrt{\rho_1 T_1})^{-1} \left(\rho_1 \int_E^A \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{EMHA} F_1(x, t) dx dt \right). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Как было отмечено выше, полученная формула верна для всех точек $M(x, t)$ из множества I_{xy} , когда $x < 0$. Если же $x \geq 0$, то равенство (14) несколько видоизменяется. Также эта формула, конечно, принимает другой вид для точек, принадлежащих пересечению I_{xy} с плоскостью (y, t) . Поскольку в каждом из перечисленных вариантов рассуждения при выводе соответствующих равенств полностью аналогичны вышеизложенным, приведём лишь готовые формулы, опуская выкладки:

$$\begin{aligned}
 u(M) = & u(F)/2 + (2(\sqrt{\rho_1 T_1} + \sqrt{\rho_2 T_2}))^{-1} \left(\sqrt{\rho_1 T_1} u(B) + \sqrt{\rho_2 T_2} (v(C) + v(D) - u(B)) + \right. \\
 & \left. \rho_2 \sqrt{\rho_1 T_1} \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \rho_1 \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{DHC} F_2(y, t) dy dt \right) + \\
 & (2\sqrt{\rho_1 T_1})^{-1} \left(\rho_1 \int_B^F \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{FMHB} F_1(x, t) dx dt \right). \tag{15}
 \end{aligned}$$

В формуле (15) предполагается, что $x_0 > 0$, а F — точка пересечения характеристики $x - x_0 + a_1(t - t_0) = 0$ с осью Ox . Формулы для функции $v(y, t)$ аналогичны соотношениям (14), (15):

$$\begin{aligned}
 v(N) = & v(G)/2 + (2(\sqrt{\rho_2 T_2} + \sqrt{\rho_1 T_1}))^{-1} \left(\sqrt{\rho_2 T_2} v(C) + \sqrt{\rho_1 T_1} (u(B) + u(A) - v(D)) + \right. \\
 & \left. \rho_1 \sqrt{\rho_2 T_2} \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \rho_2 \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{CHD} F_2(y, t) dy dt + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt \right) + \\
 & (2\sqrt{\rho_2 T_2})^{-1} \left(\rho_2 \int_G^D \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{GNHD} F_2(y, t) dy dt \right). \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(N) = & v(J)/2 + (2(\sqrt{\rho_2 T_2} + \sqrt{\rho_1 T_1}))^{-1} \left(\sqrt{\rho_2 T_2} v(C) + \sqrt{\rho_1 T_1} (u(B) + u(A) - v(C)) + \right. \\
 & \left. \rho_1 \sqrt{\rho_2 T_2} \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \rho_2 \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{CHD} F_2(y, t) dy dt + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt \right) + \\
 & (2\sqrt{\rho_2 T_2})^{-1} \left(\rho_2 \int_C^J \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{JNHC} F_2(y, t) dy dt \right). \tag{17}
 \end{aligned}$$

В формулах (16), (17) точка $N(y_0, t_0)$ принадлежит пересечению множества I_{xy} с плоскостью (y, t) , а G и J являются, по аналогии с E и F , точками пересечения соответствующих характеристик с осью Oy .

Что же касается множеств S_x, S_y , то в этих множествах взаимодействие струн отсутствует и решение описывается классическими формулами Даламбера для бесконечной струны.

Таким образом, единственность решения задачи (4)–(7) доказана. $\square$

Для доказательства разрешимости отметим, что функции, содержащиеся в правой части выражений (14)–(17), определяются начальными условиями задачи (4)–(7), т. е. являются произвольными кусочно-гладкими функциями. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции, определяемые равенствами (14)–(17), удовлетворяют уравнению (2), а значит, и уравнению (4), что и доказывает существование решения задачи (4)–(7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа является начальной в исследованиях подобного рода — в ней рассмотрена система, состоящая из двух струн, соединённых в некоторой точке. Построена математическая модель соответствующего волнового процесса, а также поставлена и исследована задача, содержащая, кроме традиционных данных Коши, дополнительные условия и ограничения. Что касается дальнейшего развития данного направления, используемые в работе методы могут быть применены для более сложных постановок. Кроме того, результаты, касающиеся разрешимости и единственности прямых задач, могут стать основой для решения обратных задач, имеющих прикладное значение.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vinogradov M., Ponomarenko O., Moshensky A., Savchenko A. Conformal Mapping of Discontinuous Functions for Inverse Radon Transform // Systems, Decision and Control in Energy V. Studies in Systems, Decision and Control. 2023. V. 481. P. 115–126; DOI: 10.1007/978-3-031-35088-7_8
2. Katsevich A. Analysis of Reconstruction from Discrete Radon Transform Data in R^3 When the Function Has Jump Discontinuities // SIAM J. Math. Anal. 2020. V. 52, N 4. P. 3990–4021; DOI: 10.1137/191295039
3. Баев А.В. Использование преобразования Радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 4. С. 550–560.
4. Anikonov D.S., Kazantsev S.G., Konovalova D.S. A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2023. V. 31, N 6. P. 959–965; DOI: 10.1515/jiip-2023-0038
5. Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Формула обращения преобразования Радона в классе разрывных функций // Сиб. журн. индустр. матем. 2024. Т. 27, № 3. С. 5–11; DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.301
6. Ильин В.А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 6. С. 732–735.
7. Ильин В.А., Луфференко П.В. Смешанные задачи описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // Докл. РАН. 2009. Т. 428, № 1. С. 12–15.

8. Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Обобщённая формула Даламбера для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 2. С. 265–268; DOI: 10.1134/S0374064119020134
9. Кожанов А.И., Кенжебай Х. Краевые задачи с интегро-дифференциальным нелокальным условием для дифференциальных уравнений составного типа четвёртого порядка // Челяб. физ.-матем. журн. 2023. Т. 8, № 4. С. 516–527.
10. Кожанов А.И. Нелокальные задачи с обобщённым условием Самарского—Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2023. Т. 509. С. 50–53.
11. Кожанов А.И., Дюжева А.В. Интегральный аналог первой начально-краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Матем. заметки. 2022. Т. 111, № 4. С. 540–550.
12. Данилюк И.М., Данилюк А.О. Задача Неймана с интегро-дифференциальным оператором в краевом условии // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 5. С. 701–709.
13. Sharma B.L., Eremeyev V.A. Wave transmission across surface interfaces in lattice structures // Int. J. Eng. Sci. 2019. V. 145. P. 1–16; DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.103173
14. Berinskii I.E., Slepyan L.I. How a dissimilar-chain system is splitting: Quasi-static, subsonic and supersonic regimes // J. Mech. Phys. Solids. 2017. V. 107. P. 509–524; DOI: 10.1016/j.jmps.2017.07.014
15. Sharma B. Near-tip field for diffraction on square lattice by rigid constraint // Z. Angew. Math. Phys. 2015. V. 66. P. 2719–2740; DOI: 10.1007/s00033-015-0508-z
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М: Наука, 1977.

UDC 517.958

NONCLASSICAL PROBLEM FOR TRANSVERSE VIBRATIONS OF A STRING SYSTEM

© 2025 D. S. Konovalova^a

*Sobolev Institute of Mathematics,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mail: dsk@math.nsc.ru

Received 02.08.2024, revised 27.02.2025, accepted 10.03.2025

Abstract. The paper considers the transverse vibrations of two strings connected to each other at a certain point. A mathematical model of this process, based on the law of conservation of momentum, expressed in the form of an integro-differential equation is constructed. This equation connects the deviations of the strings during vibrations with their characteristics such as density, tension, and sources of external forces. This approach can be considered as a development of the method proposed by A.N. Tikhonov for the equation of string vibrations with nonsmooth data. For the case where the densities of the strings are constants, we set a nonclassical problem for the integro-differential equation. In addition to the Cauchy data, the problem includes necessary matching conditions. A theorem on the existence and uniqueness of a solution to the problem is proved, and explicit formulas are obtained for its solution.

Keywords: wave equation, integral conservation law, Cauchy problem, lattice, discontinuous function.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.102

REFERENCES

1. M. Vinogradov, O. Ponomarenko, A. Moshensky, and A. Savchenko, “Conformal mapping of discontinuous functions for inverse radon transform,” *Syst. Decis. Control Energy V. Stud. Syst. Decis. Control* **481**, pp. 115–126 (2023). https://doi.org/10.1007/978-3-031-35088-7_8
2. A. Katsevich, “Analysis of reconstruction from discrete radon transform data in R^3 when the function has jump discontinuities,” *SIAM J. Math. Anal.* **52** (4), pp. 3990–4021 (2020). <https://doi.org/10.1137/191295039>
3. A. V. Baev, “Using the Radon transform to solve the inverse scattering problem in a plane layered acoustic medium,” *Comput. Math. Math. Phys.* **58** (4), pp. 537–547 (2018).
4. D. S. Anikonov, S. G. Kazantsev, and D. S. Konovalova, “A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **31** (6), pp. 959–965 (2023). <https://doi.org/10.1515/jiip-2023-0038>
5. D. S. Anikonov and D. S. Konovalova, “Radon transform inversion formula in the class of discontinuous functions,” *J. Appl. Ind. Math.* **18** (3), pp. 379–383 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1990478924030013>
6. V. A. Il'in, “Reduction of the vibrations of an initially stationary rod consisting of two different segments to an arbitrary state,” *Dokl. Math.* **82** (3), pp. 955–958 (2010).
7. V. A. Il'in and P. V. Luferenko, “Mixed problems describing longitudinal oscillations of a rod consisting of two segments with different densities and different elasticities but equal impedances,” *Dokl. Math.* **80** (2), pp. 642–645 (2009).
8. D. S. Anikonov, D. S. Konovalova, “Generalized d'Alembert formula for the wave equation with discontinuous coefficients,” *Differ. Equations* **55** (2), pp. 270–273 (2019).

9. A. I. Kozhanov and Kh. Kenzhebai, "Boundary value problems with an integro-differential non-local condition for composite-type differential equations of the fourth order," *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.* **8** (4), pp. 516–527 (2023) [in Russian].
10. A. I. Kozhanov, "Nonlocal problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for some classes of nonstationary differential equations," *Dokl. Math.* **107** (1), pp. 40–43 (2023).
<https://doi.org/10.1134/S106456242370045X>
11. A. I. Kozhanov and A. V. Dyuzheva, "Integral analogue of the first initial–boundary value problem for second-order hyperbolic and parabolic equations," *Math. Notes* **111** (4), pp. 562–570 (2022).
<https://doi.org/10.1134/S0001434622030245>
12. I. M. Danyliuk and A. O. Danyliuk, "Neumann problem with the integro-differential operator in the boundary condition," *Math. Notes* **100** (5), pp. 687–694 (2016).
<https://doi.org/10.1134/S0001434616110055>
13. B. L. Sharma and V. A. Eremeyev, "Wave transmission across surface interfaces in lattice structures," *Int. J. Eng. Sci.* **145**, pp. 1–16 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103173>
14. I. E. Berinskii and L. I. Slepian, "How a dissimilar-chain system is splitting: Quasi-static, subsonic and supersonic regimes," *J. Mech. Phys. Solids*. **107**, pp. 509–524 (2017).
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.07.014>
15. B. Sharma, "Near-tip field for diffraction on square lattice by rigid constraint," *Z. Angew. Math. Phys.* **66**, pp. 2719–2740 (2015). <https://doi.org/10.1007/s00033-015-0508-z>
16. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].