

УДК 539.3

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЁТОМ ВРЕМЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ФАЗ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СТРУКТУРЕ

© 2025 А. В. Мишин

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Поступила в редакцию 27.10.2024 г.; после доработки 15.04.2025 г.;
принята к публикации 22.04.2025 г.

В работе представлена гомогенизация нестационарной модели линейной теории упругости методом условных моментов, в результате которой получены эффективные коэффициенты линейной теории упругости и эффективная плотность. В результате выполнения операций полученные эффективные коэффициенты зависят от масштабов корреляции фаз по времени и пространству и являются взаимозависимыми. Возникновение масштабов корреляции является следствием вычисления интегралов, содержащих функцию Грина (решение для оператора нестационарной модели линейной теории упругости) и корреляционную по времени и пространству функцию структуры. Исследована эффективная плотность.

Ключевые слова: гетерогенная среда, микроструктура, функция Грина, условное осреднение, корреляционная функция, преобразование Фурье, структурный фазовый переход.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.103

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] при нахождении осреднённых уравнений с определёнными эффективными коэффициентами (при гомогенизации) на исходные уравнения нестационарной линейной теории упругости сразу производится действие преобразованием Фурье по времени. При дальнейших операциях над исходными уравнениями не учитывается корреляционная функция структуры по времени, что ограничивает найденный результат. Возможность учёта корреляционной функции в подходах [1–3] сталкивается с трудностью, связанной с отсутствием механизма появления данной корреляционной функции в Фурье-представлении в интегралах, входящих в выражение по вычислению эффективных коэффициентов. Описываемое ограничение анализируемой гетерогенной среды приводит к отсутствию влияния её микроструктурных свойств (корреляция фаз системы в пространстве и времени) на макроскопические свойства (эффективные коэффициенты) гетерогенной среды. В работе [4] гомогенизация производится для нестационарных процессов, однако отсутствует алгоритм нахождения эффективных коэффициентов.

В настоящей работе предлагается вывод эффективных коэффициентов, входящих в осреднённые уравнения нестационарной модели линейной теории упругости. Вывод произведён на основе гомогенизации исходных уравнений методом условных моментов [5, 6], который включает в себя аппарат функций Грина, условное осреднение и преобразование Фурье. В работе анализируется влияние корреляционной функции как геометрии структуры, так и по времени

на эффективные упругие и инерционные свойства гетерогенной среды. Корреляционная функция возникает в результате применения условного осреднения к решению, записанному через функцию Грина. Для гомогенизации используется функция Грина, являющаяся решением нестационарного уравнения линейной теории упругости. Далее выполняется преобразование Фурье по пространству и времени на преобразованное решение, записанное через функцию Грина и условно осреднённое. То есть преобразование Фурье по времени в настоящей работе используется для преобразования решения, а не для преобразования исходных уравнений. В результате данной операции возникают интегралы, включающие функцию Грина и корреляционную функцию. Эти интегралы отображают отклик поля в среде на распространяющееся поле и геометрическую и временную корреляцию фаз в неоднородной структуре. Данные интегралы входят в выражения по вычислению итоговых эффективных коэффициентов линейной теории упругости и эффективной плотности.

Следует отметить, что исследования в области механики гетерогенных сред как активно велись [1–15], так и активно ведутся [16–23] вследствие наличия актуальных нерешённых вопросов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем нестационарное распределение поля упругости в микронеоднородной двухфазной среде (композитный материал). В качестве исходной модели используем модель нестационарной изотропной линейной теории упругости в форме

$$\begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij} - \rho \partial_t \partial_t u_i &= 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta), \\ \lambda_{ij\alpha\beta} &= \left(K - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu I_{ij\alpha\beta}, \quad I_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda_{ij\alpha\beta}$ — тензор упругости, содержащий объёмный K и сдвиговый μ упругие модули системы в рассматриваемой точке, ρ — плотность в точке. $\delta_{i\alpha}$ — символ Кронекера, ∂_t — производная по времени, ∂_j — производная по пространственным переменным. Тензор упругости является коэффициентом пропорциональности в законе Гука $\sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$, связывающем тензора линейной деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжений σ_{ij} . u_i — компонента вектора смещений.

Структуру среды считаем обладающей статистически однородными и изотропными свойствами и заполняющей всё трёхмерное пространство.

Характерный размер микроточки модели (1) считаем существенно большим относительно характерного расстояния между атомами (молекулами) в структуре и существенно меньшим относительно характерного размера пространственной неоднородности фаз в структуре — характерного размера для элементарных структурных элементов фаз. Характерный размер пространственной неоднородности фаз в структуре существенно меньше характерного масштаба осреднения, характеризующего макроточку. Макроточка определяет осреднённое поле.

2. ВЫВОД ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ВХОДЯЩИХ В ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ОСРЕДНЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Целью является получение из исходных уравнений (1) осреднённые, представимые в виде

$$\partial_j \langle \sigma_{ij} \rangle - \rho^* \partial_t \partial_t \langle u_i \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ij\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle, \quad (2)$$

где $\lambda_{ij\alpha\beta}^*$ — входящий в осреднённый закон Гука эффективный изотропный тензор, содержащий искомые эффективные коэффициенты линейной теории упругости K^* и μ^* , ρ^* — эффективная плотность. Связь осреднённых тензоров $\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$ и $\langle \sigma_{ij} \rangle$ с осреднёнными тензорами деформаций и напряжений каждой из фаз имеет следующий вид $\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle = c_1 \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_1 + c_2 \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_2$,

$\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = c_1 \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle_1 + c_2 \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle_2$, аналогично для смещений $\langle u_i \rangle = c_1 \langle u_i \rangle_1 + c_2 \langle u_i \rangle_2$, где c_ν — объёмная концентрация фазы ν , $c_1 + c_2 = 1$. Необходимая информация о гетерогенной структуре располагается в эффективных коэффициентах K^* , μ^* , ρ^* вид которых следует получить.

Применим формализм метода условных моментов [5]. Исходное уравнение (1) на смещение преобразовывается путём прибавления и отнимания искомого тензора λ_{ijmn}^* к виду

$$\lambda_{ij\alpha\beta}^* \partial_j \partial_\beta u_\alpha - \rho^* \partial_t \partial_t u_i = -\partial_j (\lambda_{ij\alpha\beta} - \lambda_{ij\alpha\beta}^*) \partial_\beta u_\alpha + (\rho - \rho^*) \partial_t \partial_t u_i. \quad (3)$$

Для оператора $\hat{L} = \lambda_{ij\alpha\beta}^* \partial_j \partial_\beta - \rho^* \delta_{i\alpha} \partial_t \partial_t$ найдём функцию Грина, считая правую часть уравнения (3) источником, а среду бесконечной. Функция Грина нестационарной модели линейной теории упругости находится из уравнения

$$\lambda_{ijml}^* \partial_j^{(1)} \partial_l^{(1)} G_{mp}^{(1,2)} - \rho^* \partial_t \partial_t G_{ip}^{(1,2)} = \delta_{ip} \delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}) \quad (4)$$

и имеет вид (ещё впервые полученный Стоксом)

$$G_{ij}^{(1,2)} = t \frac{-\delta_{ij} + 3n_i n_j}{4\pi\rho^* r^3} \chi\left(\frac{r}{c_l}, \frac{r}{c_t}\right) + \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{4\pi r \rho^* c_t^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_t}\right) + \frac{n_i n_j}{4\pi r \rho^* c_l^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_l}\right),$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}}{r}$, $r = |\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}|$, $\mathbf{r}^{(i)}$ — радиус-вектор в точку i ; $(c_t)^2 = \frac{\mu^*}{\rho^*}$, $(c_l)^2 = \frac{K^* + \frac{4}{3}\mu^*}{\rho^*}$ — поперечная и продольная эффективные скорости звука гетерогенного материала соответственно, $\chi\left(\frac{r}{c_l}, \frac{r}{c_t}\right)$ — индикаторная функция, равная единице в интервале $\left(\frac{r}{c_l}, \frac{r}{c_t}\right)$ и нулю вне интервала.

Далее в рамках метода условных моментов, основываясь на формализме функции Грина, выпишем решение уравнений (3) на смещения и деформации:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= \langle u_i^{(1)} \rangle - \int_V G_{ip}^{(1,2)} \partial_q^{(2)} (\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^*) \partial_n^{(2)} u_m^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)} + \\ &\quad + \int_V G_{ip}^{(1,2)} (\rho^{(2)} - \rho^*) \ddot{u}_p^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}, \\ \varepsilon_{ij}^{(1)} &= \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle - \int_V \partial_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,2)} \partial_q^{(2)} (\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^*) \varepsilon_{mn}^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} + \\ &\quad + \int_V \partial_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,2)} (\rho^{(2)} - \rho^*) \ddot{u}_p^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $2\partial_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,2)} = \partial_j^{(1)} G_{ip}^{(1,2)} + \partial_i^{(1)} G_{jp}^{(1,2)}$.

3. НАХОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПЛОТНОСТИ

Продифференцируем дважды по времени уравнение на смещение (5):

$$\ddot{u}_i^{(1)} = \langle \ddot{u}_i^{(1)} \rangle + \int_V \ddot{G}_{ip}^{(1,2)} (\rho^{(2)} - \rho^*) \ddot{u}_p^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)} + (). \quad (6)$$

Слагаемое в скобках в выражении (6) в настоящей работе не рассматривается — в результате действий в рамках метода условных моментов оно приводит к модификации оператора осреднённой линейной нестационарной теории упругости (2). Целью является получение эффективных коэффициентов, входящих в уравнение с оператором, тождественным оператору линейной теории упругости (2). Обобщение оператора приведёт к появлению новых коэффициентов, не влияющих на эффективные коэффициенты.

Применим формализм условного осреднения к выражению (6). Для этого умножим его на $f(\ddot{u}_i^{(1)}, \ddot{u}_i^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \lambda_{ij\alpha\beta}^{(2)} \Big|_{\nu}^{(1)})$ и проинтегрируем по конфигурации полей. В результате чего имеем равенство

$$\left\langle \ddot{u}_i^{(1)} \right\rangle_{\nu} = \left\langle \ddot{u}_i^{(1)} \right\rangle + \sum_k \int_V \ddot{G}_{ip}^{(1,2)} (\rho^k - \rho^*) \left\langle \ddot{u}_p^{(2)k} \right\rangle p_{\nu k}^{(1,2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}, \quad (7)$$

где слагаемое $p_{\nu k}^{(1,2)} = w_k^{(2)} \Big|_{\nu}^{(1)} = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k) \varphi^{(1,2)}$ характеризует вероятностную функцию геометрии и времени структуры, которая определяет вероятность нахождения фазы k в точке $\mathbf{r}^{(2)}$ в момент времени $t^{(2)}$ при условии, что фаза ν в момент времени $t^{(1)}$ расположена в точке $\mathbf{r}^{(1)}$; $\varphi^{(1,2)}$ — корреляционная функция геометрии и времени неоднородной структуры; $\nu, k = 1, 2$.

Запись $\left\langle u_i^{(2)k} \Big|_{\nu}^{(1)} \right\rangle$ обозначает условно осреднённый вектор смещений в точке $\mathbf{r}^{(2)}$ в момент времени $t^{(2)}$ для фазы k при условии, что в точке $\mathbf{r}^{(1)}$ в момент времени $t^{(1)}$ находится компонента ν . Для подобных членов, как и в работах [5, 6, 16], считается выполненным равенство $\left\langle u_i^{(2)k} \Big|_{\nu}^{(1)} \right\rangle = \left\langle \ddot{u}_i^{(2)} \right\rangle_k$.

Следующая операция по поиску эффективного коэффициента плотности основана на нахождении разницы $\left\langle \ddot{u}_i^{(1)} \right\rangle_2 - \left\langle \ddot{u}_i^{(1)} \right\rangle_1$ на основе равенства (7) с последующим выполнением преобразования Фурье

$$\langle C_i \rangle_k = \int_{V, t} \left\langle \ddot{u}_i^{(1)} \right\rangle_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{r} dt$$

для него, что приводит к выражению

$$\left\langle C'_i \right\rangle = -\ddot{K}_{ip} ((\rho_1 - \rho^*) \langle C_p \rangle_1 - (\rho_2 - \rho^*) \langle C_p \rangle_2), \quad (8)$$

где

$$\ddot{K}_{ip} = \int_{V, t} \ddot{G}_{ip}^{(1,2)} \varphi e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{r} dt \quad (9)$$

являются интегралами, отображающими информацию об отклике поля в среде (функция Грина) на распространяющееся поле и о корреляционной функции геометрии структуры и времени $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

Выражение (8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \left\langle C'_p \right\rangle &= (\delta_{ip} - \ddot{K}_{ip} \rho'')^{-1} \ddot{K}_{in} \rho' \langle C_n \rangle, \\ \rho' &= \rho_2 - \rho_1, \quad \rho'' = c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1 - \rho^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее умножим выражение (7) на c_{ν} и просуммируем по ν . В результате получается выражение

$$\rho^* \langle \ddot{u}_i \rangle = c_1 \rho_1 \langle \ddot{u}_i \rangle_1 + c_2 \rho_2 \langle \ddot{u}_i \rangle_2,$$

которое с учётом равенств $\langle \rho \rangle = c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2$, $\rho' = \rho_2 - \rho_1$ и преобразования Фурье переписывается к виду

$$\rho^* C_i = \langle \rho \rangle C_i + c_1 c_2 \rho' C'_i. \quad (11)$$

Объёмные концентрации считаем слабо меняющимися относительно изменения полей и масштаба корреляции фаз по времени.

Используя равенства (10) и (11), получим выражение для эффективного коэффициента плотности

$$\rho^* = \langle \rho \rangle + c_1 c_2 \rho' (\delta_{ji} - \ddot{K}_{ji} \rho'')^{-1} \ddot{K}_{ji} \rho'. \quad (12)$$

Для нахождения ρ^* следует вычислить интегралы $\ddot{K}_{ji}$ (9).

Заметим, что эффективная плотность (12) зависит от $\mathbf{k}, \omega$, то есть в общем виде приведёт к оператору, модифицирующему оператор линейной нестационарной теории упругости.

При вычислении интегралов $\ddot{K}_{ij}$ в работе будет полагаться $\mathbf{k} = 0, \omega = 0$. корреляционная функция геометрии и времени структуры имеет вид $\varphi(\mathbf{r}, t) = e^{-\alpha r} e^{-\beta t}$, в которой временные и пространственные переменные разделены.

Пояснения, связанные с предположением $\mathbf{k} = 0, \omega = 0$ и видом корреляционной функции, даны в конце данного пункта по нахождению эффективного коэффициента плотности.

Масштаб корреляции фаз по пространству означает, что структура является определённой на масштабе $(\alpha)^{-1}$, т.е. определённость имеется при движении от фиксированной точки до интересующей точки, находящейся на расстоянии, меньшем $(\alpha)^{-1}$; при соответствующем расстоянии, большем $(\alpha)^{-1}$, информация о структуре экспоненциально убывает. Масштаб корреляции фаз по времени означает, что для рассматриваемой точки пространства информация о фазе существует время $(\beta)^{-1}$, а далее экспоненциально убывает.

Интеграл $\ddot{K}_{ij}$ от первого слагаемого в функции Грина (4) обращается в нуль в силу интегрирования по углам $\int (-\delta_{ij} + 3n_i n_j) d\Omega = (-4\pi + 4\pi) \delta_{ij} = 0$. Проведём цепочку равенств для второго слагаемого в (4):

$$\begin{aligned} \int_{V, t} \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{4\pi r c_t^2} \partial_t \partial_t \delta \left(t - \frac{r}{c_t} \right) \varphi dr dt &= \frac{2}{3} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_{r, t} \partial_t \partial_t \delta \left(t - \frac{r}{c_t} \right) \varphi r dr dt = \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_{r, t} \left(\partial_t \partial_t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw(t-\frac{r}{c_t})} dw \right) \varphi r dr dt = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_{r, w} \left(\int_0^{+\infty} e^{-iwt} e^{-\beta t} dt \right) w^2 e^{iw \frac{r}{c_t}} dw e^{-\alpha r} r dr = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_{r, w} \frac{1}{iw + \beta} w^2 e^{iw \frac{r}{c_t}} dw e^{-\alpha r} r dr = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{w - i\beta} w^2 e^{iw \frac{r}{c_t}} dw e^{-\alpha r} r dr = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{-i}{2\pi} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w - i\beta} w^2 e^{iw \frac{r}{c_t}} dw e^{-\alpha r} r dr = \\ &= \frac{2}{3} \frac{\beta^2}{c_t^2} \delta_{ij} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + \frac{\beta}{c_t})r} r dr = \frac{2}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_t\right)^2} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

В ходе данных операций использована формула для δ -функции

$$\delta \left(t - \frac{r}{c_t} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw(t-\frac{r}{c_t})} dw,$$

далее интеграл по dw посчитан методом вычетов с учётом особой точки $i\beta$, лежащей в верхней полуплоскости.

Выполняя аналогичные операции для третьего слагаемого в (4), получим выражение

$$\rho^* \ddot{K}_{ij} = \rho^* \ddot{K} \delta_{ij} = \frac{2}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_t\right)^2} \delta_{ij} + \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_l\right)^2} \delta_{ij}.$$

Подставляя данные результаты в формулу (12), имеем выражение для эффективного коэффициента плотности

$$\rho^* = \langle \rho \rangle - \frac{c_1 c_2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1 + \rho^* \left(\frac{1}{\bar{K} \rho^*} - 1 \right)}, \quad (13)$$

который получился зависимым от коэффициентов $\frac{\alpha}{\beta} c_t$, $\frac{\alpha}{\beta} c_l$, включающих масштабы корреляции фаз по времени и пространству в гетерогенной структуре. Следует также отметить взаимовлияние эффективных коэффициентов линейной теории упругости и эффективной плотности, что является следствием зависимости ρ^* от эффективных скоростей звука c_t , c_l гетерогенной среды. Вычисление ρ^* произведено без предположения о малости коэффициентов $\left(\frac{\alpha}{\beta} c_t \right)^{-1}$, $\left(\frac{\alpha}{\beta} c_l \right)^{-1}$.

При нахождении эффективной плотности в (5) и (6) отброшено слагаемое $\int_V G_{ip}^{(1,2)} \partial_q^{(2)} \left(\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^* \right) \partial_n^{(2)} u_m^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}$. Проанализируем его. В соответствии с операциями, данное слагаемое дважды дифференцируется по времени, условно осредняется и преобразовывается. В результате чего имеем интеграл $\int_V \partial_q \ddot{G}_{ip}^{(1,2)} \varphi e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{r} dt$. Если отбросить член $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, то интеграл будет равен нулю вследствие интегрирования по углам. Рассмотрим вначале случай $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sim 1 + i\mathbf{k}\mathbf{r}$, при котором с учётом слагаемого $i\mathbf{k}\mathbf{r}$ интегрирование по углам не занулится. Сам интеграл при этом берётся по частям для производной ∂_q . В результате дифференцирования и операций, произведённых в работе при вычислении интеграла $\ddot{K}_{ij}$, результат получается пропорциональным $\frac{\mathbf{k}}{(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_t)^2}$. Масштабы корреляции

по пространству и времени в работе предполагаются малыми относительно скорости звука в среде. Рассматриваемое слагаемое $\int_V G_{ip}^{(1,2)} \partial_q^{(2)} \left(\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^* \right) \partial_n^{(2)} u_m^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}$ при выполнении операций в рамках метода условных моментов приведёт к добавке к эффективным коэффициентам упругости (не плотности), которая является малой $\left(\frac{\alpha}{\beta} c_t \right)^{-2} \ll 1$, но не модифицирующей оператор линейной теории упругости. К модификации оператора приводят все последующие слагаемые $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$ при их разложении и интегрировании. То есть эффективные коэффициенты будут зависеть от частоты и волнового вектора, при этом коэффициент пропорциональности перед ними имеет вид $\left(\frac{\alpha}{\beta} c_t \right)^{-n}$, $n > 2$. Слагаемые, модифицирующие оператор, являются малыми вследствие используемой гипотезы о том, что характерный масштаб изменения осреднённого поля значительно превышает характерный масштаб геометрии структуры (аналогично для времени).

Анализ отброшенного слагаемого $\int_V \partial_j^{(1)} G_{ip}^{(1,2)} (\rho^{(2)} - \rho^*) \ddot{u}_p^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}$ в (5) при нахождении эффективных коэффициентов упругости (см. ниже) аналогичен представленным выше операциям. Отличие здесь в том, что при разложении $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$ возникают только слагаемые, модифицирующие оператор. То есть вклад в эффективный коэффициент плотности будет операторным.

Ненулевые волновой вектор и частота в интегралах $\ddot{K}_{ij}$ приводят к модификации оператора осреднённой линейной нестационарной теории упругости. Допустим, что у нас в экспоненте $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$ имеется только пространственная часть, которую мы разложим в ряд. И рассмотрим вначале только вклад от члена $(\mathbf{k}\mathbf{r})^2$. Нечётные слагаемые при разложении в ряд занулятся вследствие интегрирования по углам. Результат интегрирования при этом будет пропорционален $k^2 \alpha^{-2} \left(\frac{\alpha}{\beta} c_t \right)^2 \frac{1}{(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_t)^4}$. Что при выполнении обратного преобразования Фурье приведёт к модификации анализируемого оператора. Аналогичные рассуждения справедливы далее при вычислении интегралов $R_{ijpq}(\mathbf{k}, \omega)$.

Вид корреляционной функции выбран в виде экспоненциального закона — как следствие решения дифференциального уравнения. Для пространственной составляющей дифференциальное уравнение имеет вид

$$dp_{11} = -\frac{dr}{x_1}p_{11} + \frac{dr}{x_2}(1 - p_{11}),$$

где x_1 — характерный размер фазы 1 в структуре, x_2 — характерный размер фазы 2; член p_{11} характеризует вероятность того, что в точке $\mathbf{r}^{(2)}$ находится фаза 1, при условии, что в точке $\mathbf{r}^{(1)}$ находится фаза 1. Дифференциальное уравнение записано на приращение dp_{11} , то есть на изменение вероятности p_{11} при сдвиге на dr с учётом характерных размеров фаз. Решение дифференциального уравнения с учётом равенств $c_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2}$, $c_2 = \frac{x_2}{x_1+x_2}$, $\alpha^{-1} = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$ имеет вид, представленный в работе. Основываясь на таких же операциях, для временной составляющей дифференциальное уравнение и его решение имеют аналогичный вид. В работе используется предположение о независимости пространственной и временной корреляций — упрощённый вид функции условной вероятности.

4. НАХОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УПРУГОСТИ

Вывод эффективных коэффициентов упругости K^* , μ^* в рамках метода условных моментов аналогичен предыдущим работам [5, 6, 16] и операциям, представленным выше. Результатом гомогенизации является осреднённый закон Гука

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_1 \lambda_{ij\alpha\beta}^1 \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_1 + c_2 \lambda_{ij\alpha\beta}^2 \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_2 = \lambda_{ij\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$$

с определённым видом эффективного тензора упругости:

$$\lambda_{jk\alpha\beta}^* = \langle \lambda_{jk\alpha\beta} \rangle + c_1 c_2 \lambda'_{jkmn} \left(I_{\gamma\delta mn} + R_{\gamma\delta pq} (\lambda_{pqmn}^* - \lambda''_{pqmn}) \right)^{-1} R_{\gamma\delta r\nu} \lambda'_{r\nu\alpha\beta}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda'_{ij\alpha\beta} &= \lambda_{ij\alpha\beta}^1 - \lambda_{ij\alpha\beta}^2, \quad \lambda''_{ij\alpha\beta} = c_2 \lambda_{ij\alpha\beta}^1 + c_1 \lambda_{ij\alpha\beta}^2, \\ R_{ijpq}(\mathbf{k}, \omega) &= - \int \partial_q \partial_{(j} G_{i)p}(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (15)$$

$\lambda'_{ij\alpha\beta}$ — тензор упругости фазы ν . Интегралы $R_{ijpq}(\mathbf{k}, \omega)$ являются следствием применения метода условных моментов и отображают информацию об отклике поля в среде (функция Грина) на распространяющееся поле и о корреляционной функции геометрии структуры и времени $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

Для нахождения коэффициентов K^* , μ^* вычислим интегралы R_{jkpq} , где также полагаем $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\omega = 0$. Разложение члена $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t}$ по степеням $\mathbf{k}\mathbf{r}$ и ωt приведёт к зависимости от $\mathbf{k}$, ω эффективного тензора упругости $\lambda_{jk\alpha\beta}^*(\mathbf{k}, \omega)$, что при выполнении обратного преобразования Фурье модифицирует оператор осреднённой модели нестационарной линейной теории упругости. Модификация подразумевает появление новых операторных слагаемых с коэффициентами при производных (по пространству и времени), составленных из масштабов корреляции α^{-1} , β^{-1} в структуре. В настоящей работе характерный масштаб изменения осреднённого поля полагаем существенно превышающим характерные масштабы скоррелированности (неоднородности), этим и обусловлены равенства $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\omega = 0$.

Интегралы R_{jkpq} (15) вычисляются аналогично интегралам $\ddot{K}_{ij}$. Итоговое выражение для них имеет следующий вид:

$$R_{jkpq} = -\frac{1+a}{3} \frac{1}{\rho^*(c_t)^2} I_{jkpq} + \frac{1+b}{15} \frac{(c_t)^2 - (c_l)^2}{\rho^*(c_t)^2 (c_l)^2} (\delta_{jk} \delta_{pq} + 2I_{jkpq}). \quad (16)$$

$$a = -\frac{7}{5} \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 \left(\frac{c_t}{c_l} \right)^2,$$

$$b = -\left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 \left(16 \frac{(c_t)^2}{(c_l)^2 - (c_t)^2} + 10 \left(\frac{c_l}{c_t} \right)^2 \frac{(c_l)^2}{(c_l)^2 - (c_t)^2} \right).$$

При вычислении интегралов R_{jkpq} по коэффициентам $\frac{\alpha}{\beta} c_t$, $\frac{\alpha}{\beta} c_l$ разложение произведено до первого порядка малости (в связи с существенным увеличением объёма вычислений).

Подставляя выражение (16) в (14), найдём искомые эффективные коэффициенты упругости:

$$K^* = c_1 K_1 + c_2 K_2 - \frac{c_1 c_2 (K_1 - K_2)^2}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + \frac{4}{3} \mu^* - \frac{(K^* + \frac{4}{3} \mu^*)^2}{\mu^*} \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 A},$$

$$\mu^* = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \frac{\mu^* (9K^* + 8\mu^* - \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 B)}{6K^* + 12\mu^* + \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 B}}, \quad (17)$$

где

$$A = \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^{-2} \left(a - b \frac{K^* + \frac{1}{3} \mu^*}{(K^* + \frac{4}{3} \mu^*)} \right),$$

$$B = \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^{-2} \left(10a \left(K^* + \frac{4}{3} \mu^* \right) - 4b \left(K^* + \frac{1}{3} \mu^* \right) \right).$$

Найденные эффективные коэффициенты также получились зависимы от коэффициентов $\frac{\alpha}{\beta} c_t$, $\frac{\alpha}{\beta} c_l$, включающих масштабы корреляции фаз по времени и пространству в гетерогенной структуре. Эффективные коэффициенты линейной теории упругости (17) взаимозависимы между собой и с коэффициентом эффективной плотности. При $\frac{\beta}{\alpha c_l} = 0$ (соответственно, $a = b = 0$) полученные эффективные коэффициенты согласуются с рядом подходов, перечисленных в [17].

5. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПЛОТНОСТИ

Во-первых, проанализируем асимптотические случаи $\frac{\alpha}{\beta} c_l \gg 1$ и $\frac{\alpha}{\beta} c_l \ll 1$. При $\frac{\alpha}{\beta} c_l \gg 1$ выражение (13) принимает вид $\rho^* = \langle \rho \rangle$, что соответствует формуле прямой теории смесей. В данном случае масштаб корреляции фаз по времени $(\beta)^{-1}$ существенно превышает временной параметр $(c_l \alpha)^{-1}$, асимптотика $\beta \rightarrow 0$ соответствует отсутствию корреляции фаз во времени. Этот же результат $\rho^* = \langle \rho \rangle$ получается если функция Грина ищется без учёта инерционного слагаемого (то есть это слагаемое считается источником). При $\frac{\alpha}{\beta} c_l \ll 1$ выражение (13) принимает вид формулы обратной теории смесей $\rho^* = \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle^{-1}$. В данном случае масштаб корреляции по времени фаз существенно меньше временного параметра $(c_l \alpha)^{-1}$, $(\beta \rightarrow \infty)$ и существенно влияет на инерционные свойства неоднородной структуры.

Коэффициент эффективной плотности (13) сводится к квадратичному уравнению

$$x(\rho^*)^2 + (c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1 - x \langle \rho \rangle) \rho^* - \rho_1 \rho_2 = 0, \quad x = \frac{1}{\bar{K}} - 1,$$

решением которого является выражение

$$\rho^* = \frac{-(c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1) + x \langle \rho \rangle + \sqrt{((c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1) - x \langle \rho \rangle)^2 - 4x \rho_1 \rho_2}}{2x}.$$

Рассмотрим случай существенно различающихся плотностей фаз. При $\rho_1 = 0$ найденное решение принимает вид

$$\rho^* = \rho_2 \frac{(1+x)c_2 - 1}{x},$$

который имеет место для $c_2 > \frac{1}{(1+x)}$. При $c_2 < \frac{1}{(1+x)}$ решением является $\rho^* = 0$. Таким образом, анализ эффективного коэффициента плотности предсказывает наличие несущей фазы и структурного фазового перехода.

Анализ коэффициентов упругости (17) в частном случае $\frac{\alpha}{\beta}c_l = 0$ произведён в работе [17] и предсказывает несущую фазу и структурный фазовый переход. Анализ коэффициентов (17) с учётом взаимозависимости с коэффициентом эффективной плотности (13) планируется в одной из следующих работ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведённой гомогенизации нестационарной модели линейной теории упругости получены эффективные коэффициенты линейной теории упругости и коэффициент эффективной плотности. Итоговые эффективные инерционные и упругие свойства гетерогенного материала зависят от масштабов корреляции фаз по времени и пространству. Соответствующие корреляции являются следствием применения условного осреднения к решению, записанному через функцию Грина. В результате действия на решение преобразованием Фурье возникает свёртка функции Грина и корреляционной функции, определяющая итоговые эффективные коэффициенты и приводящая к их взаимовлиянию. Исследование асимптотических случаев эффективного коэффициента плотности приводит к формулам прямой и обратной теории смесей. Анализ эффективного коэффициента плотности для существенно различающихся плотностей фаз предсказывает структурный фазовый переход. Данный переход зависит от объёмной концентрации фаз и масштабов корреляции. В частном случае отсутствия корреляции по времени фаз найденные эффективные коэффициенты согласуются с существующими подходами.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджетов Института теоретической и прикладной механики им. Христиановича СО РАН и Новосибирского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Д.Т. Теория упругости микroneоднородных сред. М.: Наука, 1977.
2. Khoroshun L.P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // Appl. Mech. 2000. V. 30, N 10. P. 30–62.
3. Christensen. R.M. Theory of Viscoelasticity. N. Y.: Academic Press, 1982.
4. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
5. Khoroshun L.P. A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites // Mekh. Kompos. Mater. 1995. V. 31, N 3. P. 310–318.
6. Khoroshun L.P. Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials // Appl. Mech. 1987. V. 23, N 10. P. 100–108.

7. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10, N 4. P. 335–342.
8. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11, N 2. P. 127–140.
9. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielkristallen der nichtregularen Systeme // Ann. Phys. 1936. V. 417, N 25. P. 645–672.
10. Kroner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls // Z. Phys. 1958. V. 151, N 4. P. 504–518.
11. Hill R.A. A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13, N 4. P. 213–222.
12. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: МИЛ, 1963.
13. Khoroshun L.P. Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media // Appl. Mech. 1978. V. 14. P. 3–17.
14. Болотин В.В., Москаленко В.Н. Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды // Прикл. мех. техн. физ. 1968. Т. 9, № 1. С. 66–72.
15. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
16. Мишин А.В. Обобщённая производная и её использование для анализа микроструктуры гетерогенной среды // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 4. С. 79–96; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406
17. Mishin A.V., Fomin V.M. Analysis of the Behavior of Heterogeneous Media with Significantly Differing Physical Properties with Allowance for the Effective Dimension of the Space and Generalized Derivative Formalism // Mech. Solids. 2022. V. 57. P. 2005–2019.
18. Fedotov A. The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials // J. Mater. Sci. 2018. V. 53, N 7. P. 5092–5102.
19. Danas K., Ponte Castañeda P. A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: I - Theory // Eur. J. Mech. A Solids. 2009. V. 28, N 3. P. 387–401.
20. Лурье С.А., Соляев Ю.О. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2010. № 1. С. 80–90.
21. Gao J., Buldyrev S.V., Stanley H.E., Havlin S. Networks formed from interdependent networks // Nature Phys. 2012. V. 8, N 1. P. 40–48.
22. Ходаков Г.С. Реология суспензий. Теория фазового течения и её экспериментальное обоснование // Рос. хим. журн. 2003. № 2. С. 33–44.
23. Moshev V.V., Kozhevnikova L.L. Predictive potentialities of a cylindrical structural cell for particulate elastomeric composites // Int. J. Solids Struct. 2000. V. 37. N 7.

UDC 539.3

HOMOGENIZATION OF A NONSTATIONARY MODEL OF LINEAR THEORY OF ELASTICITY WITH ACCOUNT FOR TEMPORAL CORRELATION OF PHASES IN A HETEROGENEOUS STRUCTURE

© 2025 A. V. Mishin

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia
Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Received 27.10.2024, revised 15.04.2025, accepted 22.04.2025

Abstract. The paper presents the homogenization of the nonstationary model of the linear theory of elasticity by the method of conditional moments, as a result of which the effective coefficients of the linear theory of elasticity and the effective density are obtained. As a result of performing operations, the obtained effective coefficients depend on the scales of phase correlation in time and space and are interdependent. The occurrence of correlation scales is a consequence of calculating the integrals containing the Green's function (the solution for the operator of the nonstationary model of the linear theory of elasticity) and the correlation function of the structure in time and space. The effective density is investigated.

Keywords: heterogeneous medium, microstructure, Green's function, conditional averaging, correlation function, Fourier transform, structural phase transition.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.103

REFERENCES

1. T. D. Shermergor, *Elasticity Theory for Microinhomogeneous Materials* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
2. L. P. Khoroshun, "Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites," *Appl. Mech.* **30** (10), 30–62 (2000).
3. R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity* (Academic Press, New York, 1982).
4. R. I. Nigmatulin, *Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
5. L. P. Khoroshun, "A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites," *Mekh. Kompoz. Mater.* **31** (3), 310–318 (1995) [in Russian].
6. L. P. Khoroshun, "Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials," *Appl. Mech.* **23** (10), 100–108 (1987).
7. Z. Hashin and S. Shtrikman, "On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity," *J. Mech. Phys. Solids* **10** (4), 335–342 (1962).
8. Z. Hashin and S. Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials," *J. Mech. Phys. Solids* **11** (2), 127–140 (1963).
9. D. A. G. Bruggeman, "Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielkristallen der nichtregularen Systeme," *Ann. Phys.* **417** (25), 645–672 (1936).

10. E. Kroner, "Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls," *Z. Phys.* **151** (4), 504–518 (1958).
11. R. A. Hill, "A self-consistent mechanics of composite materials," *J. Mech. Phys. Solids* **13** (4), 213–222 (1965).
12. J. D. Eshelby, *The Continuum Theory of Dislocations* (Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1963) [in Russian].
13. L. P. Khoroshun, "Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media," *Appl. Mech.* **14**, 3–17 (1978).
14. V. V. Bolotin and V. N. Moskalenko, "Determination of the elastic constants of a micro inhomogeneous medium," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **34** (1), 66–72 (1968) [in Russian].
15. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Averaging of Processes in Periodic Media* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
16. A. V. Mishin, "The generalized derivative and its use in the analysis of the microstructure of a heterogeneous medium," *J. Appl. Ind. Math.* **15** (4), 631–646 (2021).
<https://doi.org/10.1134/S1990478921040074>
17. A. V. Mishin and V. M. Fomin, "Analysis of the behavior of heterogeneous media with significantly differing physical properties with allowance for the effective dimension of the space and generalized derivative formalism," *Mech. Solids* **57**, 2005–2019 (2022).
18. A. Fedotov, "The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials," *J. Mater. Sci.* **53** (7), 5092–5102 (2018).
19. K. Danas and P. Ponte Castañeda, "A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: I-Theory," *Eur. J. Mech. A Solids* **28** (3), 387–401 (2009).
20. S. A. Lurie and Yu. O. Solyaev, "Modified Eshelby method in the problem of determining effective properties with spherical micro- and nanoinclusions," *Vestn. PNIPU. Mekh.* (1), 80–90 (2010) [in Russian].
21. J. Gao, S. V. Buldyrev, H. E. Stanley, and S. Havlin, "Networks formed from interdependent networks," *Nature Phys.* **8** (1), 40–48 (2012).
22. G. S. Khodakov, "Rheology of suspensions. Theory of phase flow and its experimental substantiation," *Russ. Khim. Zh.* (2), 33–44 (2003) [in Russian].
23. V. V. Moshev and L. L. Kozhevnikova, "Predictive potentialities of a cylindrical structural cell for particulate elastomeric composites," *Int. J. Solids Struct.* **37** (7), (2000).