

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО
УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ© 2025 В. Г. Романов^{1а}, Т. В. Бугуева^{1,2б}¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,²Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, РоссияE-mails: ^аromanov@math.nsc.ru, ^бbugueva@math.nsc.ruПоступила в редакцию 22.11.2024 г.; после доработки 26.02.2025 г.;
принята к публикации 10.03.2025 г.

Исследованы прямая и обратная задачи для квазилинейного волнового уравнения $\square u - qu^2 - K * u = 0$, в котором ядро $K(x, t)$ представимо в виде $K(x, t) = p(x)K_0(t)$, где $p(x)$ — непрерывная функция. Обратная задача посвящена определению функций $q(x)$ и $p(x)$. В качестве дополнительной информации в обратной задаче задаются следы производной по переменной x двух решений прямой начально краевой задачи, соответствующих различным краевыми условиям, при $x = 0$ на конечном отрезке $[0, T]$. Найдены условия однозначной разрешимости прямой задачи. Для обратной задачи установлена теорема о локальном существовании решения задачи.

Ключевые слова: нелинейное волновое уравнение, интегродифференциальное уравнение, уравнение с памятью, прямая задача, обратная задача, существование решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.104

В последние годы активно изучаются различные постановки прямых (см. работы [1–7]) и обратных (см. [8–14]) задач для линейных и нелинейных волновых уравнений «с памятью» и методы их решений. Так в работе [1] изучается задача Коши в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, для полулинейного затухающего волнового уравнения с нелинейной памятью $\square u + u_t = t^{-\gamma} * |u|^p$, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, здесь $0 < \gamma < 1$, $p > 1$. Установлено глобальное существование и асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решений с малыми данными в случае, когда $1 \leq n \leq 3$. В работе [2] рассматривается нелинейное волновое уравнение $\square u + g * \Delta u - \omega \Delta u_t + \mu u_t = |u|^{p-2}u$, где $p > 1$, $\omega \geq 0$, $\mu > \lambda\omega$, λ — первое собственное значение оператора $-\Delta$ при однородных граничных условиях Дирихле. Доказана теорема о локальном существовании решения, также показано, что при некоторых подходящих предположениях на $g(t)$ и на исходные данные это решение является глобальным с энергией, которая экспоненциально убывает в потенциальной яме. В работе [3] получен критический показатель для квазилинейного волнового уравнения $\square u + \mu(-\Delta)^{-1/2}u_t = t^{-\gamma} * |u|^p$, здесь $\mu > 0$, $0 < \delta < 1$, $p > 1$. В сверхкритическом случае доказано существование глобальных решений с малыми данными, тогда как в подкритическом случае доказано отсутствие глобальных решений с малыми данными. В работе [4] исследуется критический показатель степени для уравнения $\square u = F(t, u)$, $F = f * N(u)$, $N(u) \approx |u|^p$. Для подходящих f и p доказано существование локальных по времени решений и глобальных решений задачи Коши с небольшими данными в однородных и неоднородных пространствах Соболева. Исследуется предельный случай степенной нелинейности, т. е. $F = N(u)$. В работе [5] изучается глобальное решение, единственность и асимптотическое поведение нелинейного уравнения $\square u = \Delta_p u - g * \Delta u$, где $\Delta_p u$ — нелинейный p -Лаплас оператор, $p > 2$. Глобальное решение построено с помощью приближений Фаедо—Галеркина с учётом того, что исходные данные находятся в соответствую-

ющем наборе устойчивости, созданном из многообразия Нехари. В работе [6] рассматривается нелинейное волновое уравнение $\square u + au_t + g * \Delta u = |u|^{p-2}u$, где $a > 0$, $p > 2$. С использованием функционала Ляпунова исследовано глобальное существование, установлен разрыв решений с неположительной начальной энергией. В работе [7] рассматривается задача Коши для полулинейного волнового уравнения $\square u + b_0(1+t)^{-\beta}u_t = t^{-\gamma} * |u|^p$, здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $0 < \gamma < 1$, $p > 1$, $b_0 > 0$, $0 < \beta < 1$. В энергетическом пространстве $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ получены условия глобального существования.

В работах [8–14] изучаются различные постановки обратных задач для нелинейных волновых уравнений «с памятью». В работе [8] относительно функции $u(x, t, \lambda)$ для интегродифференциального уравнения $\square u + au_t + (b + \lambda^2 c)u + Q * u = 0$, рассматривается обратная задача определения функций $a(x)$, $c(x)$, $q(x)$. Здесь λ — параметр, функция $Q(x, t) = q(x)\chi(t)$, $\chi(t) = 0$ при $t < 0$. Доказана локальная теорема существования, получена оценка устойчивости решения задачи. В работе [9] рассматривается задача Коши для уравнения $\square u + \omega u_t + k * u_{tt} = \delta(x - x_0, t)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, $n = 2\nu + 1$, $\nu = 1, 2, \dots$. Предполагается что поглощение $\omega(x)$ и память $k(x, t)$ локализованы в некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Рассматривается обратная задача определения $\omega(x)$ и $k(x, t)$ по данным рассеяния. Основным результатом является теорема о единственности решения обратной задачи. В работе [10] исследуется обратная задача идентификации неизвестного пространственно-зависимого источника $f(x)$ в нелинейном волновом уравнении $u_{tt} + g(u_t) - \nabla \cdot (a \nabla u_t) + cu + K * u = f + F$, где $K = K(t)$, а функции u , a , c , F зависят от (x, t) , $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Неизвестный коэффициент $f(x)$ восстанавливается по результатам финального временного наблюдения $u(x, T) = \Psi_T(x)$. Доказана единственность решения обратной задачи об источнике. В работе [11] рассматривается нелинейное волновое уравнение $\square u + K * u = f(x, t, u, u_t)$ с неизвестным ядром $K(t)$, которое восстанавливается по дополнительному (пространственному) интегральному измерению. Исследованы глобальное по времени существование, единственность и регулярность решения обратной задачи. В работе [12] рассматривается волновое уравнение $\square u = k * u$, где $u(x, y, t)$, $(x, y, t) \in \mathbb{R}_+^3$. Исследуется обратная задача определения ядра $k(y, t)$ в интегральном члене этого уравнения. Предполагается, что неизвестное ядро представляет собой тригонометрический многочлен по пространственным переменным с коэффициентами, непрерывными по временной переменной. Доказана теорема о локальном существовании решения, получена оценка устойчивости решения обратной задачи. В работе [13] рассматривается интегродифференциальное уравнение $\square u - qu = k * u$, где $q(x, z)$ — коэффициент, характеризующий свойства среды, в которой распространяется волновой процесс, k — ядро, описывающее память среды, функция u зависит от переменных (x, z, t) . Исследуется обратная задача последовательного определения двух функций: коэффициента $q(x, z)$, характеризующего свойства среды со слабо горизонтальной неоднородностью, и ядра $k(x)$ интегрального оператора, описывающего память среды. Доказаны теоремы однозначной локальной разрешимости поставленных обратных задач. В работе [14] для уравнения $\square u = k * u$, где $u = u(x, z, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in (0, l)$, $t > 0$, рассматривается задача определения ядра $k(x, t)$. Доказывается локальная однозначная разрешимость поставленной задачи в классе функций, непрерывных по одной из переменных и аналитических по другой.

Отметим также цикл работ, связанных с задачами от определения памяти в интегродифференциальных уравнениях вязкоупругости. В работах [15–27] и книге [28] рассматриваются различные постановки одномерных и многомерных обратных задач и исследуются вопросы единственности и устойчивости их решений. Так в работе [15] исследуется обратная задача последовательного нахождения двух неизвестных (одномерного ядра интегрального оператора и двумерной скорости распространения волны) для уравнения вязкоупругости с памятью. В [16] рассматриваются задачи линейной и нелинейной идентификации, связанные с параболическими и гиперболическими интегродифференциальными уравнениями. Приведены результаты существования и единственности «в малом» и некоторые (условные) результаты единственности и устойчивости «в большом». В [17] изучается эволюция смещения u и тем-

пературы θ в трёхмерном линейном термовязкоупругом материале типа Больцмана определяется системой двух связанных интегродифференциальных уравнений Вольтерра. Механизм демпфирования характеризуется некоторыми зависящими от времени ядрами памяти, которые априори неизвестны. Эти ядра идентифицируются с помощью измерений граничных напряжений и локализованных температур, при условии, что пара (u, θ) решает подходящую начальную и граничную задачи для эволюционной системы. В [18] рассматривается обратная задача определения ядра памяти в режиме вязкоупругости, где ядро представлено конечной суммой произведений известных пространственно-зависимых функций и неизвестных функций, зависящих от времени. С помощью метода преобразования Лапласа доказана теорема существования и единственности ядра памяти. В [19] исследуется задача определения ядра Ламе в вязкоупругой системе, связанной с цилиндрической областью, с помощью поперечных измерений. Предполагается, что ядро имеет форму произведения известной функции, зависящей от времени, и неизвестной функции, зависящей от пространства. Доказаны теоремы единственности и устойчивости. В доказательстве использовались оценки типа Карлемана. В [20] рассматривается уравнение вязкоупругости и задача восстановления пространственной части $p(x)$ ядра Лэмба, зависящей от двух пространственных переменных. Получена оценка устойчивости решения этой задачи. В [21] исследуется задача восстановления двух ядер Ламе в вязкоупругой системе. Интегродифференциальная система включает коэффициенты Ламе λ_0 и μ_0 и связанные с ними вязкоупругие коэффициенты λ_1 и μ_1 . Эти последние функции выражаются в терминах неизвестных функций p и q соответственно. Авторы разработали новый подход, требующий всего трёх наблюдений для оценки этих двух неизвестных функций p и q . Авторы доказали единственность пары функций p и q и непрерывную зависимость от граничных условий. В [22] изучается трёхмерная обратная задача вязкоупругости. Показано, что обратная задача сводится к двум задачам интегральной геометрии на семействах геодезических $yp(x, y)$ и $ys(xy)$, для которых было показано, что они имеют единственное устойчивое решение. В [23] исследуется двумерная обратная задача определения пространственной части ядра, входящей в интегральный член уравнения вязкоупругости. Предполагается, что носитель искомой функции принадлежит компактной области Ω . В качестве информации для решения этой обратной задачи используются следы решения прямой задачи Коши и её нормальной производной для некоторого конечного интервала времени на границе Ω . Важной особенностью в постановке задачи является тот факт, что решение прямой задачи соответствует нулевым исходным данным и импульсу силы во времени, локализованному на фиксированной прямой, не пересекающейся с Ω . Основным результатом статьи заключается в получении липшицевой оценки условной устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи. В [24] рассматриваются интегродифференциальные уравнения электродинамики с уравнениями дисперсии и вязкоупругости. Эти уравнения отличаются от обычных уравнений электродинамики и упругости слагаемыми свёртки, которые приводят к зависимости решений этих уравнений от предыстории процесса. Следовательно, они обладают особым типом «памяти». Затем возникают некоторые новые обратные задачи. В работе восстанавливаются ядра интегральных операторов. В [25] изучается интегродифференциальная система уравнений вязкоупругости с источником взрывчатого типа. Предполагается, что коэффициенты уравнений зависят только от одной пространственной переменной. Исследуется задача определения ядра, входящего в интегральные члены уравнений. Доказана теорема о глобальной однозначной разрешимости и получена оценка устойчивости решения обратных задач. В [26] исследуются интегродифференциальные уравнения вязкоупругой пористой среды. Прямая задача заключается в определении y -компонент векторов смещений упругого пористого тела и жидкости при решении начально-краевой задачи для этих уравнений. Предполагается, что ядро, входящее в интегральный член первого уравнения, зависит как от временной, так и от пространственной переменной x . Для его отыскания задаётся дополнительное условие относительно решения прямой задачи при $z = 0$. Обратная задача заменяется эквивалентной системой ин-

тегродифференциальных уравнений для неизвестных функций. К этой системе применяется метод шкал банаховых пространств аналитических функций. Доказана теорема однозначной локальной разрешимости обратной задачи в классе функций, аналитических по переменной x и непрерывных по t . В [27] изучается обратная задача определения функций ядра, которые наилучшим образом описывают механическое поведение сложной среды, моделируемой общим нелокальным вязкоупругим волновым уравнением. Проводится анализ корректности состояния и совместных задач и, используя эти результаты, в трёхмерной постановке проведены численные эксперименты, иллюстрирующие метод решения.

В настоящей работе рассматриваются прямая и обратная задачи для квазилинейного интегродифференциального гиперболического уравнения с постоянной главной частью, квадратичной нелинейностью в младшем члене и свёрточным ядром, представимым в виде произведения функций, зависящих от пространственной и временной переменных. Уравнение рассматривается в полуплоскости $x > 0$, на её границе задаётся условие Дирихле. В разд. 1 ставятся прямая и обратная задачи. В разд. 2 изучается краевая задача с нулевыми начальными данными, устанавливается условие её разрешимости, находится оценка устойчивости решения, устанавливается теорема существования решения. В разд. 3 исследуется обратная задача, выписывается система интегральных уравнений этой задачи, доказывается теорема о существовании локального решения обратной задачи. Все результаты статьи являются новыми. В методическом отношении для исследования обратной задачи выбран метод, сходный с использованным в работах авторов [29, 30].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Прямая задача. Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - q(x)u^2 - \int_0^t K(x, t-s)u(x, s) ds &= 0, \quad x > 0, \quad t \in (0, T], \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0, \\ u|_{x=0} &= f(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

в которых T — положительное число, $q(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $f \in C^3[0, T]$, ядро $K(x, t)$ представимо в виде

$$K(x, t) = p(x)K_0(t), \quad K_0(0) = 1. \quad (2)$$

Здесь $p(x)$ — непрерывная функция, $K_0 \in C^1[0, T]$.

Пусть $G_T = \{(x, t) | 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$. Обозначим решение задачи (1), отвечающее функции $f = f_k(t)$, через $u_k(x, t)$, $k = 1, 2$.

Обратная задача. Пусть задана функция $K_0(t)$ и заданы две функции

$$h_k(t) = \frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

соответствующие решениям задачи (1) при $f = f_k(t)$. Требуется найти функции $q(x)$ и $p(x)$ на отрезке $[0, T/2]$ по заданной информации.

Замечание 1. В дальнейшем будем предполагать, что $f_1(0) \neq f_2(0)$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Так как скорость распространения волн равна единице, то решение задачи (1) удовлетворяет условию

$$u(x, t) = 0, \quad t < x.$$

Обозначим $G_T = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$. Решение уравнения (1) эквивалентно решению интегрального уравнения

$$u(x, t) = f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) u(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau, \quad (x, t) \in G_T. \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть

$$\|q\|_{C[0, T/2]} \leq q_0, \quad \|p\|_{C[0, T/2]} \leq p_0, \quad \|K_0\|_{C[0, T]} \leq K_{00}, \quad \|f\|_{C[0, T]} \leq A, \quad (5)$$

выполнено условие

$$A \leq \frac{1}{e^{CT} - 1},$$

в котором

$$C = \frac{T}{4} \max\{q_0, p_0 K_{00} T\}, \quad (6)$$

и решение уравнения (4) непрерывно в области G_T (существование такого решения будет доказано ниже в теореме 1). Тогда это решение допускает оценку

$$|u(x, t)| \leq \frac{Ae^{Ct}}{1 + A - Ae^{Ct}} \leq \frac{Ae^{CT}}{1 + A - Ae^{CT}} =: \kappa, \quad (x, t) \in G_T. \quad (7)$$

Доказательство. Введём

$$z(t) = \max_{x \in [0, T/2 - |t - T/2|]} |u(x, t)|, \quad t \in [0, T]$$

и выпишем неравенство для $z(t)$. Используя (5), находим, что

$$z(t) \leq A + \frac{T}{4} \int_0^t \left[q_0 z^2(\tau) + p_0 K_{00} \int_0^{\tau} z(s) ds \right] d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Так как

$$\int_0^t \int_0^{\tau} z(s) ds d\tau = \int_0^t z(s)(t - s) ds \leq T \int_0^t z(\tau) d\tau,$$

то неравенство (8) можно продолжить следующим образом:

$$z(t) \leq A + \frac{T}{4} \int_0^t [q_0 z^2(\tau) + p_0 K_{00} T z(\tau)] d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Следовательно,

$$z(t) \leq A + C \int_0^t (z^2(\tau) + z(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

где постоянная C определена формулой (6).

Обозначим

$$J(t) = A + C \int_0^t (z^2(\tau) + z(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Тогда $z(t) \leq J(t)$ и

$$J'(t) = C(z^2(t) + z(t)) \leq C(J^2(t) + J(t)), \quad J(0) = A, \quad t \in [0, T].$$

Следовательно,

$$\frac{dJ}{J^2 + J} \leq C dt, \quad J(0) = A, \quad t \in [0, T].$$

Интегрируя это неравенство, получаем, что

$$\ln \frac{J(t)(1+A)}{(1+J(t))A} \leq Ct, \quad t \in [0, T].$$

Из этого неравенства находим оценку для $J(t)$:

$$J(t) \leq \frac{Ae^{Ct}}{1 + A - Ae^{Ct}}, \quad t \in [0, T].$$

Так как $z(t) \leq J(t)$, то отсюда следует оценка (7). Лемма 1 доказана. $\square$

Теорема 1. Пусть $q \in C[0, T/2]$, $p \in C[0, T/2]$, а ядро уравнения (1) представимо в виде (2), причём $K_0 \in C[0, T]$. Тогда в области G_T существует единственное непрерывное решение задачи (1).

Доказательство. Пусть $(x, t) \in G_T$, рассмотрим уравнение (4) и определим последовательные приближения $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ следующим образом:

$$u_0(x, t) = f(t - x),$$

$$u_n(x, t) = f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u_{n-1}^2(\xi, \tau) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) u_{n-1}(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau.$$

Очевидно, что все функции $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ являются непрерывными при $(x, t) \in G_T$. Оценим функции $u_n(x, t)$, вводя новую функцию

$$\omega_n(t) = \max_{x \in [0, T/2 - |t - T/2|]} |u_n(x, t)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T].$$

Используя метод математической индукции покажем, что оценка

$$\omega_n(t) \leq \frac{Ae^{Ct}}{1 + A - Ae^{Ct}} \leq \frac{Ae^{CT}}{1 + A - Ae^{CT}} =: \kappa, \quad t \in [0, T] \quad (9)$$

верна для любого $n = 0, 1, 2, \dots$.

Действительно, при $n = 0$ справедливо неравенство

$$\omega_0(t) \leq A \leq \frac{Ae^{Ct}}{1 - A(e^{Ct} - 1)} \leq \frac{Ae^{CT}}{1 - A(e^{CT} - 1)} = \kappa. \quad (10)$$

Оценим $w_1(t)$, используя (10):

$$\omega_1(t) \leq A + C \int_0^t \left[\left(\frac{Ae^{C\tau}}{1 + A - Ae^{C\tau}} \right)^2 + \frac{Ae^{C\tau}}{1 + A - Ae^{C\tau}} \right] d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной $z = e^{C\tau}$. В результате получим

$$\omega_1(t) \leq A + \int_1^{e^{Ct}} \left[\frac{A^2 z}{(1 + A - Az)^2} + \frac{Az}{1 + A - Az} \right] dz, \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{Ct}} \frac{A^2 z}{(1 + A - Az)^2} dz &= \int_1^{e^{Ct}} \frac{-Az d(1 + A - Az)}{(1 + A - Az)^2} = \int_1^{e^{Ct}} Az d\left(\frac{1}{1 + A - Az}\right) \\ &= \frac{Az}{1 + A - Az} \Big|_{z=1}^{z=e^{Ct}} - \int_1^{e^{Ct}} \frac{A dz}{1 + A - Az} = \frac{Ae^{C\tau}}{1 + A - Ae^{C\tau}} - A - \int_1^{e^{Ct}} \frac{A dz}{1 + A - Az}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$\omega_1(t) \leq A + \frac{Ae^{C\tau}}{1 + A - Ae^{C\tau}} - A - \int_1^{e^{Ct}} \frac{A dz}{1 + A - Az} + \int_1^{e^{Ct}} \frac{A dz}{1 + A - Az} = \frac{Ae^{Ct}}{1 + A - Ae^{Ct}}, \quad t \in [0, T].$$

Аналогичные вычисления доказывают справедливость неравенства (9) при любом n .

Покажем, что последовательность $\{u_n(x, t)\}$ сходится равномерно на множестве G_T . Для этого рассмотрим разности

$$\bar{u}_n(x, t) = u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)$$

и обозначим

$$\bar{\omega}_n(t) = \max_{0 \leq x \leq T/2 - |t - T/2|} |\bar{u}_n(x, t)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T].$$

Так как

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u_{n-1}^2(\xi, \tau) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) u_{n-1}(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau, \\ u_{n+1}(x, t) &= f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u_n^2(\xi, \tau) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) u_n(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau \end{aligned}$$

и справедливы равенство

$$u_{n+1}^2(x, t) - u_n^2(x, t) = (u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t))(u_{n+1}(x, t) + u_n(x, t)) = \bar{u}_n(x, t)(u_{n+1}(x, t) + u_n(x, t))$$

и оценка

$$|u_{n+1}^2(x, t) - u_n^2(x, t)| \leq |\bar{u}_n(x, t)|(|u_{n+1}(x, t)| + |u_n(x, t)|) \leq 2\kappa|\bar{u}_n(x, t)|,$$

можем написать

$$|\bar{u}_n(x, t)| \leq \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2-|\tau-(t+x)/2|} \left[2\kappa|q(\xi)||\bar{u}_{n-1}(\xi, \tau)| + \int_{\xi}^{\tau} |K(\tau-s)||\bar{u}_{n-1}(\xi, s)| ds \right] d\xi d\tau.$$

Переходя в этом неравенстве к функциям $\bar{w}_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, получим

$$\bar{w}_n(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t \bar{w}_{n-1}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (13)$$

Рассмотрим последовательные приближения

$$u_0(x, t) = f(t - x),$$

$$u_1(x, t) = f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2-|\tau-(t+x)/2|} \left[q(\xi)f^2(\tau - \xi) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s)f(\tau - s) ds \right] d\xi d\tau$$

и разность

$$\bar{u}_0(x, t) = u_1(x, t) - u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2-|\tau-(t+x)/2|} \left[q(\xi)f^2(\tau - \xi) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s)f(\tau - s) ds \right] d\xi d\tau.$$

Переходя к функции $\bar{w}_0(t)$ в силу условия (5), получаем оценку

$$\bar{w}_0(t) \leq C \int_0^t (A + A^2) d\tau \leq C(A + A^2)t. \quad (14)$$

Далее, в силу (13), (14) можем записать неравенства

$$\bar{w}_1(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t C(A + A^2)\tau d\tau = C^2(2\kappa + 1)(A + A^2)\frac{t^2}{2},$$

$$\bar{w}_2(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t C^2(2\kappa + 1)(A + A^2)\frac{\tau^2}{2} d\tau = C^3(2\kappa + 1)^2(A + A^2)\frac{t^3}{3!},$$

$$\bar{w}_3(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t C^3(2\kappa + 1)^2(A + A^2)\frac{\tau^3}{3!} d\tau = C^4(2\kappa + 1)^3(A + A^2)\frac{t^4}{4!}, \dots$$

Продолжая процесс вычислений, устанавливаем оценку

$$\bar{\omega}_n(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t C^3(2\kappa + 1)^2(A + A^2) \frac{\tau^3}{3!} d\tau = \frac{(Ct)^{n+1}}{(n+1)!} (2\kappa + 1)^n (A + A^2), \quad t \in [0, T],$$

справедливую для любых $n = 0, 1, 2, \dots$.

Эта оценка легко доказывается методом математической индукции. Из оценки (14) следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\omega}_n(t)$ при $[0, T]$, что доказывает равномерную сходимость последовательности $u_n(x, t)$ в области G_T . Так как все функции $u_n(x, t)$ непрерывны в области G_T , то предел этой последовательности определяет непрерывную функцию $u(x, t)$, которая является решением уравнения (4). Теорема 1 доказана. $\square$

Лемма 2. В области G_T уравнение (4) имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения уравнения $u_k(x, t)$, $k = 1, 2$, непрерывные и ограниченные в области G_T , ограниченные константой κ . Обозначим $\tilde{u}(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ и определим функцию

$$\varpi(t) = \max_{x \in [0, T/2 - |t - T/2|]} \tilde{u}(x, t), \quad t \in [0, T].$$

В терминах функции $\tilde{u}(x, t)$ уравнение (4) примет вид

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) \tilde{u}(\xi, \tau) (u_1(\xi, \tau) + u_2(\xi, \tau)) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) \tilde{u}(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau,$$

для него справедлива оценка

$$|\tilde{u}(x, t)| \leq \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[|q(\xi)| |\tilde{u}(\xi, \tau)| (|u_1(\xi, \tau)| + |u_2(\xi, \tau)|) + \int_{\xi}^{\tau} |K(\tau - s)| |\tilde{u}(\xi, s)| ds \right] d\xi d\tau.$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\varpi(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t \varpi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

Из неравенства (15) следует, что $\varpi(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ для всех $(x, t) \in G_T$. Лемма 2 доказана. $\square$

Теорема 2. Пусть $q \in C^1[0, T/2]$, $p \in C[0, T/2]$ и $K_0 \in C^1[0, T]$. Тогда $u \in C^2(G_T)$ и имеет в G_T непрерывную производную u_{xtt} .

Доказательство. Рассмотрим в уравнении (1) интеграл

$$\int_{\xi}^{\tau} K(\xi, \tau - s) u(\xi, s) ds.$$

Запишем его в виде

$$\int_{\xi}^{\tau} K(\xi, \tau - s) u(\xi, s) ds = \int_0^{\tau-\xi} K(\xi, s) u(\xi, \tau - s) ds = p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds.$$

Таким образом, уравнение (4) в области G_T принимает вид

$$u(x, t) = f(t-x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds \right] d\xi d\tau. \quad (16)$$

Запишем двойной интеграл в (16) виде суммы повторных интегралов:

$$\begin{aligned} u(x, t) = f(t-x) + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau. \quad (17) \end{aligned}$$

Из (17) имеем

$$u(x, x) = f(0) = f_0.$$

Продифференцируем (17) по переменной t . В результате получим

$$\begin{aligned} u_t(x, t) = f'(t-x) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[q(\xi) u^2(\xi, t-x+\xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\ - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi) u^2(\xi, t-x-\xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi) u^2(\xi, t+x-\xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi. \quad (18) \end{aligned}$$

Продифференцируем (17) по переменной x . В результате получим

$$u_x(x, t) = -f'(t-x) - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \left[q(\xi) u^2(\xi, t-x+\xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi) u^2(\xi, t-x-\xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi) u^2(\xi, t+x-\xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi, \quad (x, t) \in G_T. \quad (19)
\end{aligned}$$

Продифференцируем (18) по переменной t . В результате получим

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x, t) &= f''(t-x) + \frac{f_0^2}{4} \left[q\left(\frac{x+t}{2}\right) - q\left(\frac{t-x}{2}\right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi) u(\xi, t-x+\xi) u_t(\xi, t-x+\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_t(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
&- \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi) u(\xi, t-x-\xi) u_t(\xi, t-x-\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t-x-2\xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_t(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi) u(\xi, t+x-\xi) u_t(\xi, t+x-\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t+x-2\xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_t(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi. \quad (20)
\end{aligned}$$

Продифференцируем (18) по переменной x . В результате получим

$$\begin{aligned}
u_{xt}(x, t) &= -f''(t-x) + \frac{f_0^2}{4} \left[q\left(\frac{t-x}{2}\right) + q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right] \\
&- \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi) u(\xi, t-x+\xi) u_t(\xi, t-x+\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_t(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi) u(\xi, t-x-\xi) u_t(\xi, t-x-\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t-x-2\xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_t(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi) u(\xi, t+x-\xi) u_t(\xi, t+x-\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t+x-2\xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_t(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi. \quad (21)
\end{aligned}$$

Продифференцируем (20) по переменной x . Тогда получим

$$\begin{aligned}
u_{xtt}(x, t) = & -f'''(t-x) + \frac{f_0^2}{8} \left[q' \left(\frac{x+t}{2} \right) + q' \left(\frac{t-x}{2} \right) \right] + \frac{f_0}{4} \left[p \left(\frac{t-x}{2} \right) + p \left(\frac{t+x}{2} \right) \right] \\
& + \frac{f_0}{2} \left[q \left(\frac{t+x}{2} \right) u_t \left(\frac{t+x}{2}, \frac{t+x}{2} \right) + q \left(\frac{t-x}{2} \right) u_t \left(\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(u_t^2(\xi, t-x+\xi) + u(\xi, t-x+\xi) u_{tt}(\xi, t-x+\xi) \right) \right. \\
& \left. + f_0 p(\xi) K_0'(t-x) + p(\xi) K_0(t-x) u_t(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_{tt}(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi) \left(u_t^2(\xi, t-x-\xi) + u(\xi, t-x-\xi) u_{tt}(\xi, t-x-\xi) \right) \right. \\
& \left. + f_0 p(\xi) K_0'(t-x-2\xi) + p(\xi) K_0(t-x-2\xi) u_t(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_{tt}(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi) u_t^2(\xi, t+x-\xi) + 2q(\xi) u(\xi, t+x-\xi) u_{tt}(\xi, t+x-\xi) \right. \\
& \left. + f_0 p(\xi) K_0'(t+x-2\xi) + p(\xi) K_0(t+x-2\xi) u_t(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_{tt}(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi.
\end{aligned} \tag{22}$$

Так как $u \in C^2(G_T)$, то из (22) следует непрерывность в G_T функции $u_{xtt}(x, t)$. Теорема 2 доказана. $\square$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Напомним формулировку обратной задачи. Пусть T — заданное положительное число, $K_0(t)$, $h_k(t)$, $f_k(t)$, $k = 1, 2$ — заданные функции при $t \in [0, T]$. Требуется найти функции $q(x)$ и $p(x)$ по заданной информации (3) о решении прямой задачи (1).

Определение. Будем говорить, что функции $(f_k(t), h_k(t)) \in \mathcal{F}(F, H)$, если $f_k \in C^3[0, T]$, $h_k \in C^2[0, T]$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
\|f_k\|_{C^3[0, T]} \leq F, \quad \|h_k\|_{C^2[0, T]} \leq H, \quad f_k(0) \neq 0, \quad h_k(0) = -f_k'(0), \quad k = 1, 2; \\
f_{10} = f_1(0) \neq f_{20} = f_2(0), \quad \frac{h_1'(0) + f_1''(0)}{f_{10}^2} = \frac{h_2'(0) + f_2''(0)}{f_{20}^2}.
\end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $K_0 \in C^1[0, T]$, функции $(f_k(t), h_k(t)) \in \mathcal{F}(F, H)$, $k = 1, 2$. Тогда существует положительное число T_0 и единственные функции $q(x) \in C^1[0, T_0]$ и $p(x) \in C[0, T_0]$ такие, что решение задачи (1) удовлетворяет условию (3) для $t \leq T_0$.

Доказательство. Пусть функции $u_k(x, t)$, $k = 1, 2$ являются решениями задачи (1) при $f(t) = f_k(t)$. Для удобства записи введём обозначения

$$v_k(x, t) = \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t}, \quad w_k(x, t) = \frac{\partial^2 u_k(x, t)}{\partial t^2}, \quad u_{k0}(x, t) = f_k(t - x), \quad v_{k0}(x, t) = f'_k(t - x).$$

Тогда из уравнений (17), (18)–(22) следуют при $k = 1, 2$ соотношения

$$\begin{aligned} u_k(x, t) = & u_{k0}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} v_k(x, t) = & v_{k0}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t - x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t + x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right] d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u_{kx}(x, t) = & -f'_k(t - x) - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t - x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t + x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad (x, t) \in G_T. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
w_k(x, t) = & f_k''(t-x) + \frac{f_{k0}^2}{4} \left[q\left(\frac{x+t}{2}\right) - q\left(\frac{t-x}{2}\right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x+\xi)v_k(\xi, t-x+\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
& - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x-\xi)v_k(\xi, t-x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t+x-\xi)v_k(\xi, t+x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t+x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi. \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{kx}(x, t) = & -f_k''(t-x) + \frac{f_{k0}^2}{4} \left[q\left(\frac{t-x}{2}\right) + q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x+\xi)v_k(\xi, t-x+\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x-\xi)v_k(\xi, t-x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t+x-\xi)v_k(\xi, t+x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t+x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi. \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{kx}(x, t) = & -f_k'''(t-x) + \frac{f_{k0}^2}{8} \left[q'\left(\frac{x+t}{2}\right) + q'\left(\frac{t-x}{2}\right) \right] + \frac{f_{k0}}{4} \left[p\left(\frac{t-x}{2}\right) + p\left(\frac{t+x}{2}\right) \right] \\
& + \frac{f_{k0}}{2} \left[q\left(\frac{t+x}{2}\right)v_k\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t+x}{2}\right) + q\left(\frac{t-x}{2}\right)v_k\left(\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, t-x+\xi) + u_k(\xi, t-x+\xi) w_k(\xi, t-x+\xi) \right) \right. \\
& + f_{k0} p(\xi) K_0'(t-x) + p(\xi) K_0(t-x) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) w_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \left. \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, t-x-\xi) + u_k(\xi, t-x-\xi) w_k(\xi, t-x-\xi) \right) \right. \\
& + f_{k0} p(\xi) K_0'(t-x-2\xi) + p(\xi) K_0(t-x-2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \left. \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi) v_k^2(\xi, t+x-\xi) + 2q(\xi) u_k(\xi, t+x-\xi) w_k(\xi, t+x-\xi) \right. \\
& + f_{k0} p(\xi) K_0'(t+x-2\xi) + p(\xi) K_0(t+x-2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \left. \right] d\xi.
\end{aligned} \tag{28}$$

Из уравнений (25), (27) при $x = 0$, $t = 0$ получим

$$h_k(0) = -f'_k(0), \quad k = 1, 2,$$

$$q_0 = q(0) = \frac{2}{f_{10}^2} [h'_1(0) + f''_1(0)] = \frac{2}{f_{20}^2} [h'_2(0) + f''_2(0)],$$

а из уравнения (28) при $x = 0$ следуют равенства

$$\begin{aligned}
h''_k(t) &= -f'''_k(t) + \frac{f_{k0}^2}{4} q' \left(\frac{t}{2} \right) + \frac{f_{k0}}{2} p \left(\frac{t}{2} \right) + f_{k0} q \left(\frac{t}{2} \right) v_k \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right) \\
&+ \int_0^{t/2} \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, t-\xi) + u_k(\xi, t-\xi) w_k(\xi, t-\xi) \right) + f_{k0} p(\xi) K_0'(t-2\xi) + p(\xi) K_0(t-2\xi) v_k(\xi, \xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, t-\xi-s) ds \right] d\xi, \quad k = 1, 2. \tag{29}
\end{aligned}$$

Введём в рассмотрение функцию $\sigma(x) = q'(x)$. Тогда

$$q(x) = q_0 + \int_0^x \sigma(\xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2]. \tag{30}$$

Используя формулу (24), выпишем уравнение для определения $v_k(x, x)$. Замечая, что $v_{0k}(x, x) = f'_k(0)$, находим, что

$$v_k(x, x) = f_{k0} + \frac{1}{2} \int_0^x q(\xi) u_k^2(\xi, \xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2], \quad k = 1, 2. \tag{31}$$

Положим в равенстве (29) $t = 2x$ и во внеинтегральном члене заменим $q(x)$ на правую часть равенства (30), а $v_k(x, x)$ на правую часть равенства (31). Рассматривая полученные равенства как систему из двух уравнений найдём из неё уравнения для функций $\sigma(x)$ и $p(x)$. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma(x) = & \sigma_0(x) + \lambda_{10} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(\mu_{1k} + \nu_{1k} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi \right) \int_0^x q(\xi) u_k^2(\xi, \xi) d\xi \\ & + \sum_{k=1}^2 \lambda_{1k} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x - \xi) + u_k(\xi, 2x - \xi) w_k(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\ & \left. + f_{k0} p(\xi) K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi) K_0(2x - 2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) = & p_0(x) + \lambda_{20} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(\mu_{2k} + \nu_{2k} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi \right) \int_0^x q(\xi) u_k^2(\xi, \xi) d\xi \\ & + \sum_{k=1}^2 \lambda_{2k} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x - \xi) + u_k(\xi, 2x - \xi) w_k(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\ & \left. + f_{k0} p(\xi) K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi) K_0(2x - 2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad (33) \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} \sigma_0(x) &:= \frac{4}{f_{10} - f_{20}} \left[\frac{h_1''(2x) + f_1'''(2x)}{f_{10}} - \frac{h_2''(2x) + f_2'''(2x)}{f_{20}} \right] - 4q_0, \\ \lambda_{10} &:= -4, \quad \lambda_{11} := -\frac{4}{f_{10}(f_{10} - f_{20})}, \quad \lambda_{12} := \frac{4}{f_{20}(f_{10} - f_{20})}, \\ \mu_{11} &:= -\frac{2q_0}{f_{10} - f_{20}}, \quad \mu_{12} := \frac{2q_0}{f_{10} - f_{20}}, \quad \nu_{11} := -\frac{2}{f_{10} - f_{20}}, \quad \nu_{12} := \frac{2}{f_{10} - f_{20}}; \\ p_0(x) &:= \frac{2}{f_{10} - f_{20}} \left[\frac{f_{10}}{f_{20}} [h_2''(2x) + f_2'''(2x)] - \frac{f_{20}}{f_{10}} [h_1''(2x) + f_1'''(2x)] \right], \\ \lambda_{20} &:= 0, \quad \lambda_{21} := -\frac{2f_{10}}{f_{20}(f_{10} - f_{20})}, \quad \lambda_{22} := \frac{2f_{20}}{f_{10}(f_{10} - f_{20})}, \\ \mu_{21} &:= -\frac{q_0 f_{10}}{f_{10} - f_{20}}, \quad \mu_{22} := \frac{q_0 f_{20}}{f_{10} - f_{20}}, \quad \nu_{21} := -\frac{f_{10}}{f_{10} - f_{20}}, \quad \nu_{22} := \frac{f_{20}}{f_{10} - f_{20}}. \end{aligned}$$

Уравнения (23), (24), (26), (30), (32) и (33) образуют замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений обратной задачи. Для дальнейшего перепишем уравнение (26) в другой более удобной форме, используя для внеинтегральных членов связанных с функцией q , формулу (30). В результате получим уравнение

$$w_k(x, t) = w_{k0}(x, t) - \frac{f_{k0}^2}{4} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} \sigma(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x+\xi)v_k(\xi, t-x+\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
& - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x-\xi)v_k(\xi, t-x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t+x-\xi)v_k(\xi, t+x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t+x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi, \quad k = 1, 2, \quad (34)
\end{aligned}$$

в котором

$$w_{k0}(x, t) = f_k''(t - x).$$

Определим вектор-функции

$$\mathbf{g} = (q, \sigma, p, u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2), \quad \mathbf{g}^0 = (q_0, \sigma_0, p_0, u_1^0, u_2^0, v_1^0, v_2^0, w_1^0, w_2^0)$$

и запишем уравнения (23), (24), (30), (32), (33) и (34), в виде операторного уравнения

$$\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{g}, \quad (35)$$

где оператор $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9)$ определяется следующим образом:

$$A_1\mathbf{g}(x) = q_0 + \int_0^x \sigma(\xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2]. \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
A_2\mathbf{g}(x) = & \sigma_0(x) + \lambda_{10} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(\mu_{1k} + \nu_{1k} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi \right) \int_0^x q(\xi)u_k^2(\xi, \xi) d\xi \\
& + \sum_{k=1}^2 \lambda_{1k} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x-\xi) + u_k(\xi, 2x-\xi)w_k(\xi, 2x-\xi) \right) \right. \\
& \left. + f_{k0}p(\xi)K_0'(2x-2\xi) + p(\xi)K_0(2x-2\xi)v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s)w_k(\xi, 2x-\xi-s) ds \right] d\xi; \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3\mathbf{g}(x) = & p_0(x) + \lambda_{20} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(\mu_{2k} + \nu_{2k} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi \right) \int_0^x q(\xi)u_k^2(\xi, \xi) d\xi \\
& + \sum_{k=1}^2 \lambda_{2k} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x-\xi) + u_k(\xi, 2x-\xi)w_k(\xi, 2x-\xi) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$+ f_{k0}p(\xi)K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi)K_0(2x - 2\xi)v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s)w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \Big] d\xi; \quad (38)$$

$$\begin{aligned} A_{3+k}\mathbf{g}(x, t) = & u_{k0}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s)u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s)u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s)u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau, \quad k = 1, 2; \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{5+k}\mathbf{g}(x, t) = & v_{k0}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[q(\xi)u_k^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)u_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, t - x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)u_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, t + x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)u_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad k = 1, 2; \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{7+k}\mathbf{g}(x, t) = & w_{k0}(x, t) - \frac{f_{k0}^2}{4} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} \sigma(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi)u_k(\xi, t - x + \xi)v_k(\xi, t - x + \xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t - x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t - x - \xi)v_k(\xi, t - x - \xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t - x - 2\xi) \right. \\ & \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t + x - \xi)v_k(\xi, t + x - \xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t + x - 2\xi) \right. \\ & \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad k = 1, 2. \quad (41) \end{aligned}$$

Пусть при некотором $\gamma_0 > 0$ выполнены неравенства

$$\|g_k^0\|_{C[0, T/2]} \leq \gamma_0/2, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \|g_k^0\|_{C(G(T))} \leq \gamma_0/2, \quad k = \overline{4, 9}.$$

Обозначим через

$$\mathbf{C}(G(T)) = C[0, T/2] \times C[0, T/2] \times C[0, T/2] \times \\ \times C(G(T)) \times C(G(T)) \times C(G(T)) \times C(G(T)) \times C(G(T)) \times C(G(T))$$

банахово пространство непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G(T))} = \max \left\{ \max_{1 \leq k \leq 3} \|g_k\|_{C[0, T/2]}, \max_{4 \leq k \leq 9} \|g_k\|_{C(G(T))} \right\}.$$

Так как $\mathbf{g}^0 \in \mathbf{C}(G(T))$, то все вектор-функции, определённые в (35), являются элементами $\mathbf{C}(G(T))$. Рассмотрим в $\mathbf{C}(G(T))$ замкнутое множество

$$\mathbf{R}_T := \left\{ \mathbf{g} \in \mathbf{C}(G(T)) \mid \|g_k - g_k^0\|_{C[0, T/2]} \leq \frac{\gamma_0}{2}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \|g_k - g_k^0\|_{C(G(T))} \leq \frac{\gamma_0}{2}, \quad k = \overline{4, 9} \right\},$$

на этом множестве справедливы оценки

$$\|g_k\|_{C[0, T/2]} \leq \gamma_0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \|g_k\|_{C(G(T))} \leq \gamma_0, \quad k = \overline{4, 9}. \quad (42)$$

Положим

$$\|K_0\|_{C^1[0, T]} \leq \tilde{K}_0.$$

Из (36) запишем оценку для $|A_1 \mathbf{g} - g_1^0|$:

$$|A_1 \mathbf{g} - g_1^0| \leq \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi \leq \frac{T}{2} \gamma_0 = \frac{T}{2} \gamma_0 C_1(T), \quad x \in [0, T/2], \quad C_1(T) =: C_1 = 1. \quad (43)$$

Используя (37)–(41), выпишем оценки для $|A_k \mathbf{g} - g_k^0|$, $k = \overline{2, 9}$:

$$\begin{aligned} |A_2 \mathbf{g} - g_2^0| &\leq |\lambda_{10}| \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{1k}| + |\nu_{1k}| \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi \right) \int_0^x |q(\xi) u_k^2(\xi, \xi)| d\xi \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 |\lambda_{1k}| \int_0^x \left| 2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x - \xi) + u_k(\xi, 2x - \xi) w_k(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\ &\quad \left. + f_{k0} p(\xi) K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi) K_0(2x - 2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \right| d\xi \\ &\leq \frac{T}{2} \gamma_0 \left\{ \underbrace{|\lambda_{10}| + \sum_{k=1}^2 (|\mu_{1k}| + |\nu_{1k}|) \gamma_0^2 + \sum_{k=1}^2 |\lambda_{1k}| \left[4\gamma_0^2 + \tilde{K}_0(|f_{k0}| + \gamma_0 + T\gamma_0^2) \right]}_{=: C_2(T)} \right\}. \quad (44) \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}
|A_3 \mathbf{g} - g_3^0| &\leq |\lambda_{20}| \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{2k}| + |\nu_{2k}| \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi \right) \int_0^x |q(\xi) u_k^2(\xi, \xi)| d\xi \\
&\quad + \sum_{k=1}^2 |\lambda_{2k}| \int_0^x \left| 2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x - \xi) + u_k(\xi, 2x - \xi) w_k(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\
&\quad \left. + f_{k0} p(\xi) K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi) K_0(2x - 2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \right| d\xi \\
&\leq \underbrace{\frac{T}{2} \gamma_0 \left\{ |\lambda_{20}| + \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{2k}| + |\nu_{2k}| \frac{T}{2} \gamma_0 \right) \gamma_0^2 + \sum_{k=1}^2 |\lambda_{2k}| (4\gamma_0^2 + \tilde{K}_0 [f_{k0} \gamma_0^3 + T \gamma_0^2]) \right\}}_{=: C_3(T)}; \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{3+k} \mathbf{g} - g_{3+k}^0| &\leq \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right| d\tau \\
&\leq \frac{3T^2}{8} \gamma_0 \left[\gamma_0^2 + \frac{T}{2} \tilde{K}_0 \gamma_0 \right] = \frac{T}{2} \gamma_0 \underbrace{\left[\gamma_0^2 + \frac{T}{2} \tilde{K}_0 \gamma_0 \right] \frac{3T}{4}}_{=: C_{3+k}(T)}, \quad k = 1, 2; \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{5+k} \mathbf{g} - g_{5+k}^0| &\leq \frac{1}{2} \int_0^x \left| q(\xi) u_k^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right| d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, t - x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right| d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, t + x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right| d\xi \\
&\leq \frac{3T}{4} \left[\gamma_0^3 + \frac{T}{2} \tilde{K}_0 \gamma_0^2 \right] = \frac{T}{2} \gamma_0 \underbrace{\frac{3}{2} \left[\gamma_0^3 + \frac{T}{2} \tilde{K}_0 \gamma_0^2 \right]}_{=: C_{5+k}(T)}, \quad k = 1, 2; \quad (47)
\end{aligned}$$

$$|A_{7+k} \mathbf{g} - g_{7+k}^0| \leq \frac{f_{k0}^2}{4} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} |\sigma(\xi)| d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^x \left| 2q(\xi)u_k(\xi, t-x+\xi)v_k(\xi, t-x+\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \right| d\xi \\
& - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left| 2q(\xi)u_k(\xi, t-x-\xi)v_k(\xi, t-x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \right| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left| 2q(\xi)u_k(\xi, t+x-\xi)v_k(\xi, t+x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t+x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \right| d\xi \\
& \leq \frac{f_{k0}^2}{4} \frac{T}{2} \gamma_0 + \frac{3T}{2} \left[2\gamma_1^0 \gamma_0^3 + \tilde{K}_0 \left(|f_{k0}| \gamma_0 + \frac{T}{2} \gamma_0^2 \right) \right] \\
& = \frac{T}{2} \gamma_0 \underbrace{\left[\frac{f_{k0}^2}{4} + 3 \left[2\gamma_0^2 + \tilde{K}_0 \left(|f_{k0}| + \frac{T}{2} \gamma_0 \right) \right] \right]}_{=: C_{7+k}(T)}, \quad k = 1, 2. \quad (48)
\end{aligned}$$

Используя равенства (43)–(48), определим T'_0 следующим образом:

$$T'_0 = \min \left\{ 1, \frac{1}{C_k(1)}, \quad k = \overline{2, 9} \right\}.$$

Тогда выполняются неравенства

$$\|A_k \mathbf{g} - g_k^0\|_{C[0, T'_0/2]} \leq \frac{\gamma_0}{2}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \|A_k \mathbf{g} - g_k^0\|_{C(G(T'_0))} \leq \frac{\gamma_0}{2}, \quad k = \overline{4, 9}.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ отображает $\mathbf{R}_T$ в себя.

Покажем, что оператор $\hat{\mathbf{A}}$, определённый равенствами (36)–(41), является сжимающим при достаточно малом $T > 0$.

Пусть

$$\mathbf{g}^1 := (q^1, \sigma^1, p^1, u_{3+k}^1, v_{5+k}^1, w_{7+k}^1), \quad \mathbf{g}^2 := (q^2, \sigma^2, p^2, u_{3+k}^2, v_{5+k}^2, w_{7+k}^2), \quad k = 1, 2.$$

Заметим, что для разности $\varphi_1^2(x, t) - \varphi_2^2(x, t)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\varphi_1^2(x, t) - \varphi_2^2(x, t) &= (\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t)) R_2(\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)), \\
R_2(\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)) &= 2 \int_0^1 [\varphi_1(x, t) s' + \varphi_2(x, t) (1 - s')] ds', \quad (49)
\end{aligned}$$

поэтому в силу (42), (49) можем написать

$$\begin{aligned}
& |R_2(u_k^1(x, t), u_k^2(x, t))| \leq 2\gamma_0, \quad k = 1, 2, \\
& |R_2(v_k^1(x, t), v_k^2(x, t))| \leq 2\gamma_0, \quad k = 1, 2, \\
& |(u_k^1(x, t))^2 - (u_k^2(x, t))^2| \leq 2\gamma_0 |u_k^1(x, t) - u_k^2(x, t)|, \quad k = 1, 2, \\
& |(v_k^1(x, t))^2 - (v_k^2(x, t))^2| \leq 2\gamma_0 |v_k^1(x, t) - v_k^2(x, t)|, \quad k = 1, 2. \quad (50)
\end{aligned}$$

Воспользуемся равенствами (36)–(41), (49), (50) и оценим разности $|\hat{A}_k \mathbf{g}^1 - \hat{A}_k \mathbf{g}^2|$, $k = \overline{1, 9}$:

$$\begin{aligned}
|A_1 \mathbf{g}^1 - A_1 \mathbf{g}^2| &\leq \int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \\
&\leq \frac{T}{2} \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} = TC'_1(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}, \quad C'_1(T) =: C'_1 = 1/2. \\
|A_2 \mathbf{g}^1 - A_2 \mathbf{g}^2| &\leq |\lambda_{10}| \int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \\
&+ \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{1k}| \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \xi))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \xi) - u_k^2(\xi, \xi)) R_2(u_k^1(\xi, \xi), u_k^2(\xi, \xi)) \right| d\xi \right. \\
&\quad \left. + |\nu_{1k}| \left[\int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \int_0^x |q^1(\xi)| (u_k^1(\xi, \xi))^2 d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^x \sigma^2(\xi) d\xi \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \xi))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \xi) - u_k^2(\xi, \xi)) R_2(u_k^1(x, t), u_k^2(x, t)) \right| d\xi \right] \right. \\
&\quad \left. + |\lambda_{1k}| \int_0^x \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi)) \left((v_k^1(\xi, 2x - \xi))^2 + u_k^1(\xi, 2x - \xi) w_k^1(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2q^2(\xi) \left((v_k^1(\xi, 2x - \xi) - v_k^2(\xi, 2x - \xi)) R_2(v_k^1(\xi, 2x - \xi), v_k^2(\xi, 2x - \xi)) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (u_k^1(\xi, 2x - \xi) - u_k^2(\xi, 2x - \xi)) w_k^1(\xi, 2x - \xi) + u_k^2(\xi, 2x - \xi) (w_k^1(\xi, 2x - \xi) - w_k^2(\xi, 2x - \xi)) \right) \right. \\
&\quad \left. + f_{k0} K'_0(2x - 2\xi) (p^1(\xi) - p^2(\xi)) + K_0(2x - 2\xi) \left((p^1(\xi) - p^2(\xi)) v_k^1(\xi, \xi) + p^2(\xi) (v_k^1(\xi, \xi) - v_k^2(\xi, \xi)) \right) \right. \\
&\quad \left. + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k^1(\xi, 2x - \xi - s) ds \right. \\
&\quad \left. + p^2(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) (w_k^1(\xi, 2x - \xi - s) - w_k^2(\xi, 2x - \xi - s)) ds \right| d\xi \Bigg) \\
&\leq \frac{1}{2} \left\{ |\lambda_{10}| + \sum_{k=1}^2 \left[|\mu_{1k}| \gamma_0^3 + 2\gamma_0^2 \right] + |\nu_{1k}| (T\gamma_0^3 + 3\gamma_0^3) + |\lambda_{1k}| [5\gamma_0^2 + 2\gamma_0] \right. \\
&\quad \left. + \tilde{K}_0(|f_{k0}| + 2\gamma_0 + T\gamma_0) \right\} T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} = TC'_2(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}; \\
|A_3 \mathbf{g}^1 - A_3 \mathbf{g}^2| &\leq |\lambda_{20}| \int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \\
&+ \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{2k}| \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \xi))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \xi) - u_k^2(\xi, \xi)) R_2(u_k^1(\xi, \xi), u_k^2(\xi, \xi)) \right| d\xi \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |\nu_{2k}| \left[\int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \int_0^x |q^1(\xi)| (u_k^1(\xi, \xi))^2 d\xi \right. \\
& + \left. \int_0^x \sigma^2(\xi) d\xi \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \xi))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \xi) - u_k^2(\xi, \xi)) R_2(u_k^1(x, t), u_k^2(x, t)) \right| d\xi \right] \\
& + |\lambda_{2k}| \int_0^x \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi)) \left((v_k^1(\xi, 2x - \xi))^2 + u_k^1(\xi, 2x - \xi) w_k^1(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\
& + 2q^2(\xi) \left((v_k^1(\xi, 2x - \xi) - v_k^2(\xi, 2x - \xi)) R_2(v_k^1(\xi, 2x - \xi), v_k^2(\xi, 2x - \xi)) \right. \\
& + \left. (u_k^1(\xi, 2x - \xi) - u_k^2(\xi, 2x - \xi)) w_k^1(\xi, 2x - \xi) + u_k^2(\xi, 2x - \xi) (w_k^1(\xi, 2x - \xi) - w_k^2(\xi, 2x - \xi)) \right) \\
& + f_{k0} K_0'(2x - 2\xi) (p^1(\xi) - p^2(\xi)) + K_0(2x - 2\xi) \left((p^1(\xi) - p^2(\xi)) v_k^1(\xi, \xi) + p^2(\xi) (v_k^1(\xi, \xi) - v_k^2(\xi, \xi)) \right) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k^1(\xi, 2x - \xi - s) ds \\
& + \left. p^2(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) (w_k^1(\xi, 2x - \xi - s) - w_k^2(\xi, 2x - \xi - s)) ds \right| d\xi \Bigg) \\
& \leq \frac{1}{2} \left\{ |\lambda_{20}| + \sum_{k=1}^2 \left[|\mu_{2k}| 3\gamma_0^2 + |\nu_{2k}| 2T\gamma_0^3 + |\lambda_{2k}| [12\gamma_0^2 + \tilde{K}_0(f_{k0} + 2\gamma_0 + T\gamma_0)] \right] \right\} T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{\mathbf{C}(G(T))} \\
& = TC_3'(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{\mathbf{C}(G(T))};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{3+k}\mathbf{g}^1 - A_{3+k}\mathbf{g}^2| & \leq \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \tau))^2 \right. \\
& + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \tau) - u_k^2(\xi, \tau)) R_2(u_k^1(\xi, \tau), u_k^2(\xi, \tau)) + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, \tau - s) ds \\
& + \left. p^2(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, \tau - s) - u_k^2(\xi, \tau - s)) ds \right| d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \tau))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \tau) - u_k^2(\xi, \tau)) R_2(u_k^1(\xi, \tau), u_k^2(\xi, \tau)) \right. \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, \tau - s) ds + \left. p^2(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, \tau - s) - u_k^2(\xi, \tau - s)) ds \right| d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \tau))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \tau) - u_k^2(\xi, \tau)) R_2(u_k^1(\xi, \tau), u_k^2(\xi, \tau)) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, \tau - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, \tau - s) - u_k^2(\xi, \tau - s)) ds \Big| d\tau \\
& \leq \frac{3T}{8} (3\gamma_0^2 + \tilde{K}_0 T \gamma_0) T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} = TC'_{3+k}(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}, \quad k = 1, 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{5+k}\mathbf{g}^1 - A_{5+k}\mathbf{g}^2 v| & \leq \frac{1}{2} \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, t - x + \xi))^2 \right. \\
& + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, t - x + \xi) - u_k^2(\xi, t - x + \xi)) R_2(u_k^1(\xi, t - x + \xi), u_k^2(\xi, t - x + \xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t-x} K_0(s) u_k^1(\xi, t - x + \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) (u_k^1(\xi, t - x + \xi - s) - u_k^2(\xi, t - x + \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, t - x - \xi))^2 \right. \\
& + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, t - x - \xi) - u_k^2(\xi, t - x - \xi)) R_2(u_k^1(\xi, t - x - \xi), u_k^2(\xi, t - x - \xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, t - x - \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, t - x - \xi - s) - u_k^2(\xi, t - x - \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, t + x - \xi))^2 \right. \\
& + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, t + x - \xi) - u_k^2(\xi, t + x - \xi)) R_2(u_k^1(\xi, t + x - \xi), u_k^2(\xi, t + x - \xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, t + x - \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, t + x - \xi - s) - u_k^2(\xi, t + x - \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& \leq \frac{3}{4} (3\gamma_0^2 + \tilde{K}_0 T \gamma_0) T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} = TC'_{5+k}(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}, \quad k = 1, 2;
\end{aligned}$$

$$|A_{7+k}\mathbf{g}^1 - A_{7+k}\mathbf{g}^2| \leq \frac{f_{k0}^2}{4} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^x \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi))u_k^1(\xi, t - x + \xi)v_k^1(\xi, t - x + \xi) \right. \\
& + 2q^2(\xi)(u_k^1(\xi, t - x + \xi) - u_k^2(\xi, t - x + \xi))v_k^1(\xi, t - x + \xi) \\
& + 2q^2(\xi)u_k^2(\xi, t - x + \xi)(v_k^1(\xi, t - x + \xi) - v_k^2(\xi, t - x + \xi)) + f_{k0}K_0(t - x)(p^1(\xi) - p^2(\xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k^1(\xi, t - x + \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)(v_k^1(\xi, t - x + \xi - s) - v_k^2(\xi, t - x + \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi))u_k^1(\xi, t - x - \xi)v_k^1(\xi, t - x - \xi) \right. \\
& + 2q^2(\xi)(u_k^1(\xi, t - x - \xi) - u_k^2(\xi, t - x - \xi))v_k^1(\xi, t - x - \xi) \\
& + 2q^2(\xi)u_k^2(\xi, t - x - \xi)(v_k^1(\xi, t - x - \xi) - v_k^2(\xi, t - x - \xi)) + f_{k0}K_0(t - x - 2\xi)(p^1(\xi) - p^2(\xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k^1(\xi, t - x - \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)(v_k^1(\xi, t - x - \xi - s) - v_k^2(\xi, t - x - \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi))u_k^1(\xi, t + x - \xi)v_k^1(\xi, t + x - \xi) \right. \\
& + 2q^2(\xi)(u_k^1(\xi, t + x - \xi) - u_k^2(\xi, t + x - \xi))v_k^1(\xi, t + x - \xi) \\
& + 2q^2(\xi)u_k^2(\xi, t + x - \xi)(v_k^1(\xi, t + x - \xi) - v_k^2(\xi, t + x - \xi)) + f_{k0}K_0(t + x - 2\xi)(p^1(\xi) - p^2(\xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k^1(\xi, t + x - \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)(v_k^1(\xi, t + x - \xi - s) - v_k^2(\xi, t + x - \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& \leq \frac{1}{4} \left(\frac{f_{k0}^2}{2} + 6\gamma_0^2 + \tilde{K}_0(|f_{k0}| + T\gamma_0) \right) T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} \\
& = TC'_{7+k}(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Пусть $\rho \in (0, 1)$. Выберем T_0'' из условия

$$T_0'' = \min \left\{ T_0', \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{C'_k(1/2)} \quad \text{при} \quad k = \overline{2, 9} \right\},$$

тогда

$$\|\mathbf{A}\mathbf{g}^1 - \mathbf{A}\mathbf{g}^2\|_{C(G(T_0''))} \leq \rho \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T_0''))}.$$

Таким образом, $\mathbf{A}$ является сжимающим отображением на множестве $\mathbf{R}_{T_0}$, где

$T_0 = \min \{T'_0, T''_0\}$. В силу принципа сжимающих отображений на $\mathbf{R}_{T_0}$ существует единственное решение операторного уравнения (48). Теорема 3 доказана. $\square$

Замечание 2. Доказательство устойчивости обратной задачи проводится аналогично доказательству, приведённому в работе [30].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fino A.Z. Critical exponent for damped wave equations with nonlinear memory // Nonlinear Anal. 2011. V. 74, N 16. P. 5495–5505.
2. Liang F., Gao H. Global existence and blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with memory // J. Inequal. Appl. 2012. Article 33; DOI: 10.1186/1029-242X-2012-33
3. D'Abbicco M. A wave equation with structural damping and nonlinear memory // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2014. V. 21. P. 751–773; DOI: 10.1007/s00030-014-0265-2
4. D'Abbicco M., Lucente S. The beam equation with nonlinear memory // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, N 3. P. 1–18; DOI: 10.1007/s00033-016-0655-x
5. Raposo C.A., Cattai A.P., Ribeiro J.O. Global solution and asymptotic behaviour for a wave equation type p-Laplacian with memory // Open J. Math. Anal. 2018. V. 2, N 2. P. 156–171; DOI: 10.30538/psrp-oma2018.0025
6. Boulaaras S., Kamache F., Bouizem Y., Guefaia R. General decay and blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with memory and fractional boundary damping terms // Bound. Value Probl. 2020. Article 172; DOI: 10.1186/s13661-020-01470-w
7. Kirane M., Fino A. Z., Alsaedi A., Ahmad B. Global existence for time-dependent damped wave equations with nonlinear memory // Adv. Nonlinear Anal. 2023. V. 12. Article 20230111; DOI: 10.1515/anona-2023-0111
8. Романов В.Г. Обратная задача для интегродифференциального уравнения, содержащего параметр // Докл. АН. 1996. Т. 350, № 5. С. 592–594.
9. Bukhgeim A.L., Dyatlov G.V. Inverse problems for equations with memory // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 1, N 2. P. 1–17; DOI: 10.1201/9780429187841-2
10. Seliga L., Slodička M. An inverse source problem for a damped wave equation with memory // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 24, N 2; DOI: 10.1515/jiip-2014-0026
11. Slodička M., Seliga L. Determination of a time-dependent convolution kernel in a non-linear hyperbolic equation // Inverse Probl. Sci. Engrg. 2015. V. 24, N 6. P. 1–19; DOI: 10.1080/17415977.2015.1101762
12. Durdiev U.D. A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2019. V. 7, N 2. P. 4–19; DOI: 10.32523/2306-6172-2019-7-2-4-19
13. Ахматов З.А., Тотиева Ж.Д. Квазидвумерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью // Владикавказ. матем. журн. 2021. Т. 23, № 4. С. 15–27; DOI: 10.46698/14464-6098-4749-m
14. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Определение двумерного ядра релаксации интегродифференциального волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 2. С. 208–222; DOI: 10.31857/S0374064123020073

15. *Lorenzi A., Sinestrari E.* An inverse problem in the theory of materials with memory I // *Nonlinear Anal.* 1988. V. 12. P. 1217–1335.
16. *Lorenzi A.* Identification problems for integro-differential equations // *Ill-Posed problems in Natural Sciences.* 1992. P. 342–366.
17. *Cavaterra C., Grasselli M.* Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type // *Math. Model. Meth. Appl. Sci.* 1994. V. 4, N 6. P. 807–842.
18. *Janno J., von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.
19. *Lorenzi A., Messina F., Romanov V.G.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // *Appl. Anal.* 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
20. *Romanov V.G., Yamamoto M.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // *Appl. Anal.* 2010. V. 89, N 3. P. 377–390.
21. *Lorenzi A., Romanov V.G.* Recovering two Lamé Kernels in a Viscoelastic System // *Inverse Probl. Imaging.* 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.
22. *Романов В.Г.* Трёхмерная обратная задача вязкоупругости // *Докл. АН.* 2011. Т. 441, № 4. С. 452–455.
23. *Романов В.Г.* Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
24. *Романов В.Г.* Inverse problems for differential equations with memory // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2014. V. 2, N 4. P. 51–80.
25. *Durdiev D.K., Totieva Zh.D.* The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equation // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2018. V. 41, N 17. P. 8019–8032.
26. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80.
27. *Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolic V., Rajendran L.M., Wohlmuth B.* Determining kernels in linear viscoelasticity // *J. Comput. Phys.* 2022. V. 464. Article 111331.
28. *Durdiev D.K., Totieva Z.D.* Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations. Singapore: Springer-Verl, 2023.
29. *Romanov V.G., Bugueva T.V.* An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation // *Eurasian J. Math. Comp. Appl.* 2024. V. 12, N 2. P. 134–154.
30. *Romanov V.G., Bugueva T.V.* An one-dimensional inverse problem for the wave equation // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2024. V. 12, N. 3. P. 135–162.

UDC 517.956

THE INVERSE PROBLEM FOR A QUASILINEAR WAVE EQUATION WITH MEMORY

© 2025 V. G. Romanov¹, T. V. Bugueva^{1,2}¹*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, 630090 Russia*²*Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ru

Received 22.11.2024, revised 26.02.2025, accepted 10.03.2025

Abstract. The forward and inverse problems are investigated for the quasilinear wave equation $\square u - qu^2 - K * u = 0$ where the kernel $K(x, t)$ is represented in the form $K(x, t) = p(x)K_0(t)$ with $p(x)$ being a continuous function. The inverse problem is devoted to the determination of the compact functions $q(x)$ and $p(x)$. Traces of the derivative with respect to x of two solutions to the forward initial-boundary value problem related to two arbitrary boundary data are given for $x = 0$ on the finite segment $[0, T]$ as an additional information for the solution to the inverse problem. The conditions for the unique solvability of the forward problem

Keywords: nonlinear wave equation, integro-differential equation, equation with memory, forward problem, inverse problem, existence of solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.104

REFERENCES

1. A. Z. Fino, “Critical exponent for damped wave equations with nonlinear memory,” *Nonlinear Anal.* **74** (16), 5495–5505 (2011).
2. F. Liang and H. Gao, “Global existence and blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with memory,” *J. Inequal. Appl.* **33** (2012). <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-33>
3. M. D’Abbicco, “A wave equation with structural damping and nonlinear memory,” *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* **21**, 751–773 (2014). <https://doi.org/10.1007/s00030-014-0265-2>
4. M. D’Abbicco and S. Lucente, “The beam equation with nonlinear memory,” *Z. Angew. Math. Phys.* **67** (3), 1–18 (2016). <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0655-x>
5. C. A. Raposo, A. P. Cattai, and J. O. Ribeiro, “Global solution and asymptotic behaviour for a wave equation type p-Laplacian with memory,” *Open J. Math. Anal.* **2** (2), 156–171 (2018). <https://doi.org/10.30538/psrp-oma2018.0025>
6. S. Boulaaras, F. Kamache, Y. Bouizem, and R. Guefaifia, “General decay and blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with memory and fractional boundary damping terms,” *Bound. Value Probl.* **172** (2020). <https://doi.org/10.1186/s13661-020-01470-w>
7. M. Kirane, A. Z. Fino, A. Alsaedi, and B. Ahmad, “Global existence for time-dependent damped wave equations with nonlinear memory,” *Adv. Nonlinear Anal.* **12**, 20230111 (2023). <https://doi.org/10.1515/anona-2023-0111>
8. V. G. Romanov, “Inverse problem for an integro-differential equation containing a parameter,” *Dokl. Ross. Akad. Nauk* **350** (5), 592–594 (1996) [in Russian].

9. A. L. Bukhgeim and G. V. Dyatlov, "Inverse problems for equations with memory," *SIAM J. Math. Anal.* **1** (2), 1–17 (1998). <https://doi.org/10.1201/9780429187841-2>
10. L. Seliga and M. Slodička, "An inverse source problem for a damped wave equation with memory," *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **24** (2) (2015). <https://doi.org/10.1515/jiip-2014-0026>
11. M. Slodička and L. Seliga, "Determination of a time-dependent convolution kernel in a non-linear hyperbolic equation," *Inverse Probl. Sci. Engrg.* **24** (6), 1–19 (2015). <https://doi.org/10.1080/17415977.2015.1101762>
12. U. D. Durdiev, "A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **7** (2), 4–19 (2019). <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2019-7-2-4-19>
13. Z. A. Akhmatov and Zh. D. Totieva, "Quasi-two-dimensional coefficient inverse problem for the wave equation in a weakly horizontally inhomogeneous medium with memory," *Vladikavkaz. Mat. Zh.* **23** (4), 15–27 (2021) [in Russian]. <https://doi.org/10.46698/14464-6098-4749-m>
14. D. K. Durdiev and J. Sh. Safarov, "Finding the two-dimensional relaxation kernel of an integro-differential wave equation," *Differ. Equations* **59** (2), 214–229 (2023). <https://doi.org/10.1134/S0012266123020064>
15. A. Lorenzi and E. Sinestrari, "An inverse problem in the theory of materials with memory I," *Nonlinear Anal.* **12**, 1217–1335 (1988).
16. A. Lorenzi, "Identification problems for integro-differential equations," *Ill-Posed Probl. Nat. Sci.* 342–366 (1992).
17. C. Cavaterra and M. Grasselli, "Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type," *Math. Model. Meth. Appl. Sci.* **4** (6), 807–842 (1994).
18. J. Janno and L. von Wolfersdorf, "Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity," *Math. Meth. Appl. Sci.* **20** (4), 291–314 (1997).
19. A. Lorenzi, F. Messina, and V. G. Romanov, "Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system," *Appl. Anal.* **86** (11), 1375–1395 (2007).
20. V. G. Romanov and M. Yamamoto, "Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement," *Appl. Anal.* **89** (3), 377–390 (2010).
21. A. Lorenzi and V. G. Romanov, "Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system," *Inverse Probl. Imaging* **5** (2), 431–464 (2011).
22. V. G. Romanov, "A three-dimensional inverse problem of viscoelasticity," *Dokl. Math.* **84** (3), 833–836 (2011).
23. V. G. Romanov, "Stability estimates for the solution to the problem of determining the kernel of a viscoelastic equation," *J. Appl. Ind. Math.* **6** (3), 360–370 (2012). <https://doi.org/10.1134/S1990478912030118>
24. V. G. Romanov, "Inverse problems for differential equations with memory," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **2** (4), 51–80 (2014).
25. D. K. Durdiev and Zh. D. Totieva, "The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equation," *Math. Meth. Appl. Sci.* **41** (17), 8019–8032 (2018).
26. D. K. Durdiev and A. A. Rakhmonov, "The problem of determining the 2D kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium," *J. Appl. Ind. Math.* **14** (2), 281–295 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1990478920020076>
27. B. Kaltenbacher, U. Kristenko, V. Nikolic, L. M. Rajendran, and B. Wohlmuth, "Determining kernels in linear viscoelasticity," *J. Comput. Phys.* **464**, 111331 (2022).
28. D. K. Durdiev and Zh. D. Totieva, *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations* (Springer-Verlag, Singapore, 2023).
29. V. G. Romanov and T. V. Bugueva, "An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation," *Eurasian J. Math. Comp. Appl.* **12** (2), 134–154 (2024).
30. V. G. Romanov and T. V. Bugueva, "A one-dimensional inverse problem for the wave equation," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **12** (3), 135–162 (2024).