

УДК 519.61

О ВЛИЯНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ПОПРАВКИ В ПОДПРОСТРАНСТВЕ КРЫЛОВА© 2025 В. П. Ильин^{1а}, В. Н. Бабенко^{2б}¹Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,²Кубанский государственный технологический университет,
ул. Московская, 2, г. Краснодар 350072, РоссияE-mails: ^аilin@sscc.ru, ^бrnibvd@mail.ruПоступила в редакцию 26.10.2024 г.; после доработки 12.04.2025 г.;
принята к публикации 21.04.2025 г.

При осуществлении вычислений на ЭВМ неизбежно возникают погрешности округления. В настоящей работе исследуется вопрос о влиянии указанных погрешностей на точность вычисления поправки в подпространстве Крылова. Получена оценка точности вычисленной поправки, выраженная через возмущения исходных данных.

Ключевые слова: ортопроектор, подпространство Крылова, проекционный метод, ортогонализация Арнольди, СЛАУ большой размерности, погрешности округлений.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.101

ВВЕДЕНИЕ

Пусть задана СЛАУ

$$Ax = f, \quad (1)$$

где A — невырожденная эрмитова или же неэрмитова матрица порядка N .Если N велико, то обычно при осуществлении решения (1) прибегают к итерационным методам: для произвольного x^0 по формуле

$$x^n = x^{n-1} + y^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

вычисляется последовательность $\{x^n\}$, сходящаяся к точному решению $\bar{x}$ системы (1) (см. [1, 2], а также более современные источники [3, 4]). Поправка y^n определяется решением системы уравнений

$$B_n y^n = r^{n-1}, \quad (2)$$

где $r^{n-1} = f - Ax^{n-1}$ — невязка, порождаемая приближением x^{n-1} , B_n — некоторая невырожденная матрица.

При осуществлении машинных вычислений вследствие погрешностей округлений вместо решений y^n систем (2) мы будем иметь решения $\tilde{y}^n$ возмущённых систем

$$\tilde{B}_n \tilde{y}^n = \tilde{r}^{n-1}.$$

Вследствие этих причин мы получим иную последовательность

$$\tilde{x}^0 = x^0, \quad \tilde{x}^n = \tilde{x}^{n-1} + \tilde{y}^n = \tilde{x}^{n-1} + (y^n + \delta y^n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где δy^n — возмущение поправки y^n . Из последней формулы видно, что если $\tilde{x}^{n-1}$ уже близко к точному решению $\bar{x}$, то актуальным является вопрос о величине оценки возмущения δy^n . Именно по этой причине мы сосредоточили наши усилия на исследовании точности вычисления поправки, не выходя за рамки одной итерации, и поэтому в дальнейшем изложении мы опустим индекс, характеризующий номер итерации.

Переходя от эрмитова пространства к вещественному R^N , мы можем сказать, что если матрица A разреженная, то матрицу B определяют как результат воздействия на матрицу исходной системы ортопроекторами P_K и P_L :

$$B = P_K A P_L, \quad (3)$$

где K и L — выбранные каким-либо образом подпространства в R^N [5–7].

В настоящее время в качестве подпространства K широко применяется так называемое подпространство Крылова, определённое следующим образом. Пусть v — произвольный вектор. Векторы $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ называют последовательностью Крылова, соответственно, $K_m(A, v) = \text{span}(v | Av | \dots | A^{m-1}v)$ — подпространством Крылова, порождаемым матрицей A и вектором v .

Для построения ортонормированного базиса в $K_m(A, v)$ получили широкое применение методы Арнольди (если матрица A несимметрична) и Ланцоша (в противном случае). Пусть x — некоторое приближение точного решения $\bar{x}$ системы (1) и $r = f - Ax$ — соответствующая ему невязка. В выстраиваемой указанными методами ортонормированной системе векторов

$$\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \quad (4)$$

в качестве вектора v_1 принимают нормированный вектор r : $v_1 = \frac{1}{\|r\|}r$, $\|r\| = (r, r)^{1/2}$.

В точной арифметике процедуры этих методов генерируют ортонормированную систему (4) и Хессенбергову матрицу H (или трехдиагональную матрицу T в симметричном случае). Введя обозначение $V = [v_1 | v_2 | \dots | v_m]$, а также приняв $L = K_m(A, v_1)$ и $P_K = VV^+$, согласно (2) и (3) получим

$$VV^+AVV^+y \cong r, \quad (5)$$

где V^+ — псевдообратная матрица, V^+AV равна указанной выше матрице H (или T). Следует отметить, что в связи с тем, представленное в (5) произведение VV^+ представляет собой ортопроектор, рассматриваемый нами итерационный процесс относят к проекционным методам, интерес к которым не ослабевает уже долгие годы, что подтверждается неуклонно растущим потоком публикаций. Среди них, отметим недавние [8, 9].

Поскольку столбцы матрицы V суть ортонормированные векторы, выполняется равенство $V^+ = V^*$, где V^* — сопряжённая матрица (если элементы матрицы V берутся над полем вещественных чисел, то $V^* = V^T$, где V^T — транспонированная матрица).

Замечание. Далее для обозначения матрицы V^*AV мы будем использовать символ H , имея в виду, что если матрица A симметрична, то $H = T = T^*$. Согласно сказанному вместо (5) мы можем записать

$$VHV^*y \cong r. \quad (6)$$

Отсюда следует

$$\widehat{y} = VH^{-1}V^*r,$$

где $\widehat{y}$ — псевдорешение системы (6). Отметим, что по условию решаемой задачи матрица A системы (1) не вырождена, поэтому не вырождена и матрица $H = V^*AV$. Система уравнений (6) эквивалентна трём системам линейных уравнений

$$Vw \cong r, \quad Hz \cong w, \quad V^*y \cong z, \quad (7)$$

решения которых осуществляются последовательно друг за другом. Из этих трёх систем уравнений вытекают следующие формулы:

$$\widehat{w} = V^* r, \quad z = H^{-1} \widehat{w}, \quad \widehat{y} = Vz, \quad (8)$$

где $\widehat{w}$ — псевдорешение первой системы в (7). Таким образом, обращаясь к последним трём соотношениям, мы видим, что решение системы (6) можно свести к выполнению следующих трёх этапов: вычислению векторов $\widehat{w}$ и z , а также определению поправки $\widehat{y}$ по формулам, приведённым в (8).

При осуществлении вычислений на ЭВМ в результаты выполнения арифметических операций неизбежно вносятся погрешности округления. Вследствие этого вместо псевдорешения $\widehat{y}$ (см. (3)) системы (2) мы получим возмущённое псевдорешение $\widetilde{y}$. Цель нашей работы состоит в исследовании влияния указанных погрешностей на точность возмущённой поправки $\widetilde{y}$. Оно направлено на получение гарантированной оценки точности вычисленной поправки $\widetilde{y}$. Нашей работе ранее предшествовали подобные исследования в [10–12]. Следует также сказать, что исследования, посвящённые определению оценки возмущений матриц V и H , проводились ранее в работах [13–15].

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧАЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПОПРАВКИ

Согласно вышесказанному можно считать, что вместо систем (7) мы решаем системы

$$(V + X_{Vw}) \widetilde{w} \cong (r + \delta r), \quad (9)$$

$$(H + X_{Hz}) \widetilde{z} \cong (\widehat{w} + \delta \widehat{w}), \quad (10)$$

$$(V + X_{Vy})^* \widetilde{y} \cong (z + \delta \widetilde{z}). \quad (11)$$

Установим оценки близости псевдорешений рассматриваемых трёх пар исходных и возмущённых систем уравнений, взятых из (7) и (9)–(11). Для достижения этой цели мы будем пользоваться ниже следующей теоремой [16, 17], в которой усилены результаты, полученные ранее в [18, 19].

Рассмотрим исходную СЛАУ общего вида $Ax \cong y$ с матрицей размерности $m \times n$, а также систему $(A + B)u \cong y + v$, полученную из исходной системы возмущением её матрицы и правой части. При этом мы будем придерживаться следующих обозначений: $rk(A) = r$ — ранг матрицы A , $x = \bar{x} + \widetilde{x}$, $y = \bar{y} + \widetilde{y}$, где $\bar{x} \in R(A^*)$, $\widetilde{x} \in N(A)$, $\bar{y} \in R(A)$, $\widetilde{y} \in N(A^*)$, $R(A^*)$, $N(A)$, $R(A)$, $N(A^*)$ — образы и ядра соответствующих матриц.

Теорема 1. Пусть для систем линейных уравнений

$$Ax \cong y, \quad (A + B)u \cong y + v$$

выполнены соотношения

$$\|B\| \leq \alpha \|A\|, \quad \|v\| \leq \beta \|y\|, \quad 1 - c_r \alpha > 0.$$

Тогда для псевдорешений $\bar{x}$ и $\bar{u}$ исходной и возмущённой систем справедливы следующие утверждения.

1. Если

$$r < \min \{m, n\}, \quad rk(A + B) = r, \quad \|\widetilde{y}\| \leq \gamma \|\bar{y}\|, \quad (12)$$

то справедлива оценка

$$\delta = \frac{\|\bar{u} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \max \{M_1, M_2\},$$

где

$$M_1 = \left(\left(\max_{0 \leq \xi \leq 1 - c_r \alpha} \left(\frac{c_r \zeta_r \gamma \sqrt{1 - (\zeta_r + \xi)^2}}{\sqrt{(1 - \zeta_r^2 - 2\zeta_r \xi)^3}} + \frac{\mu_r}{1 - \zeta_r^2 - 2\zeta_r \xi} \right) \right)^2 + (c_{r-1} \alpha)^2 \right)^{1/2},$$

$$\zeta_r = c_r \alpha, \quad M_2 = \left((M_3 \kappa_r)^2 + (c_{r-2} \alpha)^2 \right)^{1/2},$$

$$\mu_r = c_r (\alpha + \beta \sqrt{1 + \gamma^2}), \quad M_3 = c_r c_{r-1} \alpha \gamma + \mu_r, \quad \kappa_r = (1 - c_r \alpha)^{-1}.$$

2. Если $r = m = n$, то

$$\delta \leq c_r (\alpha + \beta) \kappa_r.$$

3. Если выполнено неравенство (12) и $m > n = r$, то

$$\delta \leq \max \{M_4, M_5\}, \quad (13)$$

где

$$M_4 = \frac{c_r^2 \alpha \gamma + \mu_r}{\sqrt{1 - (c_r \alpha)^2}}, \quad (14)$$

$$M_5 = M_3 \kappa_r. \quad (15)$$

4. Если $\text{rk}(A + B) = r = m < n$, то

$$\delta \leq \left((c_r (\alpha + \beta) \kappa_r)^2 + (c_{r-1} \alpha)^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь $c_r = \sigma_1 / \sigma_r$, $c_{r-1} = \sigma_1 / \sigma_{r-1}$, $c_{r-2} = \sigma_1 / \sigma_{r-2}$, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ — сингулярный спектр матрицы A , причём $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{r-1} \geq \sigma_r > 0$.

С помощью обратного анализа погрешностей округлений, погрешности сводятся к эквивалентным возмущениям исходных данных. В нашем случае — это матрицы V и H , а также векторы r , $\hat{w}$ и z .

Приступая к исследованию процессов накопления погрешностей машинного решения систем уравнений (7), мы должны сделать ряд оговорок. Возмущения X_{Vw} , X_{Hz} , X_{Vy} (см. (9)–(11)) удовлетворяют равенствам

$$X_{Vw} = X_V + X_w, \quad (16)$$

$$X_{Hz} = X_H + X_z, \quad (17)$$

$$X_{Vy} = X_V + X_y, \quad (18)$$

где возмущения X_V и X_H моделируют погрешности, обусловленные неточностью предварительно вычисленных матриц V и H . Соответственно возмущения X_w , X_z и X_y моделируют погрешности, возникающие при непосредственном машинном решении систем уравнений (9)–(11).

Начнём с установления оценки близости псевдорешений первой системы уравнений из списка (7) и системы уравнений (9).

Лемма 1. Пусть в соотношениях (9) и (16) возмущения X_{Vw} , X_V , X_w и δr удовлетворяют неравенствам

$$\|X_{Vw}\| \leq \alpha_{V\widehat{w}}, \quad \|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_{\widehat{w}}\| \leq \alpha_{\widehat{w}}, \quad \|\delta r\| \leq \beta_{r+r\widehat{w}} \|r\|, \quad (19)$$

причём

$$\bar{\alpha}_{V\widehat{w}} = \alpha_V + \alpha_w, \quad 1 - \alpha_{Vw} > 0, \quad 1 - \bar{\alpha}_{V\widehat{w}} > 0, \quad \|\widetilde{r}\| \leq \gamma \|\widehat{r}\|, \quad (20)$$

где

$$\widehat{r} + \widetilde{r} = r, \quad \widehat{r} = VV^+r, \quad \widetilde{r} = (I - VV^+)r. \quad (21)$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\widetilde{w} - \widehat{w}\| / \|\widehat{w}\| \leq \gamma_{\widehat{w}}, \quad (22)$$

где

$$\gamma_{\widehat{w}} = \frac{\bar{\alpha}_{V\widehat{w}}\gamma + (\bar{\alpha}_{V\widehat{w}} + \beta_{r+r\widehat{w}}\sqrt{1+\gamma^2})}{1 - \bar{\alpha}_{V\widehat{w}}}.$$

Доказательство. Обращаясь к теореме 1, мы видим, что рассматриваемые в лемме системы уравнений первые в (7) и (9) отвечают условиям пункта 3 указанной теоремы. Следуя резольвтивной части пункта 3 (см. (13)–(15)) и учитывая при этом, что $\sigma_1(V) = \dots = \sigma_m(V) = 1$ и $\sqrt{1 - (c_r\alpha)^2} > 1 - c_r\alpha$, благодаря соотношениям: первому и четвёртому в (19), первому и третьему в (20), а также (21) — мы можем записать

$$\|\widetilde{w} - \widehat{w}\| / \|\widehat{w}\| \leq \gamma_{\widehat{w}}. \quad (23)$$

Используя второе и третье неравенства из списка (19) в равенстве (16), будем иметь

$$\|X_{Vw}\| = \|X_V + X_w\| \leq \|X_V\| + \|X_w\| \leq \alpha_V + \alpha_w.$$

Сопоставляя последнюю цепочку отношений с первым неравенством в (19), приходим к выводу

$$\alpha_{Vw} \leq \alpha_V + \alpha_w.$$

Учитывая первое и третье соотношения в (20), применим последнее неравенство в (23). В результате получим оценку (22). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть в соотношениях (10) и (17) возмущения X_{Hz} , X_H , X_z и $\delta\widetilde{w}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_{Hz}\| \leq \alpha_{Hz} \|H\|, \quad \|X_H\| \leq \alpha_H \|H\|, \quad \|X_z\| \leq \alpha_z \|H\|, \quad \|\delta\widetilde{w}\| \leq \beta_{\widehat{w}+\widehat{w}z} \|\widehat{w}\|,$$

причём

$$\bar{\alpha}_{Hz} = \alpha_H + \alpha_z, \quad 1 - c(H)\alpha_{Hz} > 0, \quad 1 - c(H)\bar{\alpha}_{Hz} > 0,$$

где $c(H)$ — число обусловленности матрицы H . Тогда справедлива оценка

$$\|\widetilde{z} - z\| / \|z\| \leq \frac{c(H) (\bar{\alpha}_{Hz} + \beta_{\widehat{w}+\widehat{w}z})}{1 - c(H)\bar{\alpha}_{Hz}}. \quad (24)$$

Лемма 3. Пусть в соотношениях (11) и (18) возмущения X_{Vy} , X_V , X_y и $\delta\tilde{z}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_{Vy}\| \leq \alpha_{Vy}, \quad \|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_y\| \leq \alpha_y, \quad \|\delta\tilde{z}\| \leq \beta_{zy} \|z\|,$$

причём $\bar{\alpha}_{Vy} = \alpha_V + \alpha_y$, $1 - \alpha_{Vy} > 0$ и $1 - \bar{\alpha}_{Vy} > 0$. Тогда

$$\frac{\|\tilde{y} - \hat{y}\|}{\|\hat{y}\|} \leq \left(\left(\frac{(\bar{\alpha}_{Vy} + \beta_{z+zy})}{1 - \bar{\alpha}_{Vy}} \right)^2 + \bar{\alpha}_{Vy}^2 \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Доказательства лемм 2 и 3 мы опустили по той причине, что они почти дословно повторяют доказательство леммы 1.

В системах уравнений (9)–(11) возмущения правых частей δr , $\delta\tilde{w}$ и $\delta\tilde{z}$ мы представим в виде суммы двух слагаемых: наследственного возмущения и возмущения, моделирующего погрешности округлений, возникающих непосредственно при выполнении машинного решения обозначенных систем линейных уравнений.

Согласно сказанному запишем

$$\delta r = \delta r_r + \delta r_{r\hat{w}}, \quad \delta\tilde{w} = \delta\tilde{w}_{\hat{w}} + \delta\tilde{w}_{\hat{w}z}, \quad \delta\tilde{z} = \delta\tilde{z}_z + \delta\tilde{z}_{zy}. \quad (26)$$

Предположим, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|\delta r_r\| &\leq \beta_r \|r\|, \quad \|\delta r_{r\hat{w}}\| \leq \beta_{r\hat{w}} \|r\|, \\ \|\delta\tilde{w}_{\hat{w}}\| &\leq \beta_{\hat{w}} \|\hat{w}\|, \quad \|\delta\tilde{w}_{\hat{w}z}\| \leq \beta_{\hat{w}z} \|\hat{w}\|, \\ \|\delta\tilde{z}_z\| &\leq \beta_z \|z\|, \quad \|\delta\tilde{z}_{zy}\| \leq \beta_{zy} \|z\|. \end{aligned} \quad (27)$$

Обращаясь к первому равенству в (26), благодаря первой паре неравенств в (27) запишем

$$\|\delta r\| \leq \|\delta r_r\| + \|\delta r_{r\hat{w}}\| \leq (\beta_r + \beta_{r\hat{w}}) \|r\|.$$

Сопоставляя последнюю цепочку неравенств с четвёртым неравенством в (19), мы приходим к неравенству

$$\beta_{r+r\hat{w}} \leq \beta_r + \beta_{r\hat{w}}. \quad (28)$$

Совершенно аналогично рассуждая, получаем неравенства

$$\beta_{\hat{w}+\hat{w}z} \leq \beta_{\hat{w}} + \beta_{\hat{w}z}, \quad (29)$$

$$\beta_{z+zy} \leq \beta_z + \beta_{zy}. \quad (30)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1–3, тогда справедлива оценка точности вычисления поправки $\hat{y}$

$$\frac{\|\tilde{y} - \hat{y}\|}{\|\hat{y}\|} \leq \left(\left(\frac{(\bar{\alpha}_{Vy} + \beta_z + \beta_{zy})}{1 - \bar{\alpha}_{Vy}} \right)^2 + \bar{\alpha}_{Vy}^2 \right)^{1/2}, \quad (31)$$

где

$$\beta_z = \frac{c(H)(\bar{\alpha}_{Hz} + \beta_{\hat{w}} + \beta_{\hat{w}z})}{1 - c(H)\bar{\alpha}_{Hz}}, \quad \beta_{\hat{w}} = \frac{\bar{\alpha}_{V\hat{w}}\gamma + (\bar{\alpha}_{V\hat{w}} + (\beta_r + \beta_{r\hat{w}})\sqrt{1+\gamma^2})}{1 - \bar{\alpha}_{V\hat{w}}}.$$

Доказательство. Обращаясь к лемме 1, мы видим, что из оценки (22) в силу неравенства (28) вытекает неравенство

$$\left\| \tilde{w} - \widehat{w} \right\| / \left\| \widehat{w} \right\| \leq \beta_{\widehat{w}}.$$

В соответствии с введёнными в (26) обозначениями (см. второе равенство) последнее неравенство мы можем записать в виде

$$\left\| \delta \tilde{w}_{\widehat{w}} \right\| = \left\| \tilde{w} - \widehat{w} \right\| \leq \beta_{\widehat{w}} \left\| \widehat{w} \right\|.$$

Обращаясь к оценке (24) леммы 2, благодаря неравенству (29) мы можем записать соотношение

$$\left\| \tilde{z} - z \right\| / \left\| z \right\| \leq \beta_z.$$

Аналогично в соответствии с введёнными в (26) обозначениями (см. третье равенство) последнее неравенство мы перепишем в виде

$$\left\| \delta \tilde{z}_z \right\| = \left\| \tilde{z} - z \right\| \leq \beta_z \left\| z \right\|.$$

Наконец, обращаясь к оценке (25) леммы 3, благодаря неравенству (30) приходим к неравенству (31). Теорема доказана. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Новизна и значение теоремы 2 состоят в следующем.

Доказанная в ней оценка (31) показывает, что более значимое влияние на погрешность машинного вычисления поправки $\widehat{y}$ оказывают неточности, допущенные при выполнении 1-го и 2-го этапов: при вычислении матриц V и H , векторов r , $\widehat{w}$ и z , а также погрешности, возникающие при осуществлении вычислений, непосредственно использующих указанные матрицы и векторы (они подвергаются усилению числом обусловленности $c(H)$ матрицы Хессенберга H). С погрешностями, допущенными на 3-ем этапе, такого усиления не происходит.

Используемые в нашей работе оценки (теорема 1) не являются завышенными. Они получены на основе исследования оценок, представленных в [18, 19]. В результате этих исследований и появились новые, указанные выше, уточнённые оценки, опубликованные в [16, 17]. Сказанным частично снимается вопрос о практической значимости оценки (31).

Практическая значимость оценки (31) состоит ещё и в том, что далее она будет применена для установления условий гарантированного уточнения приближения $\tilde{x}^{n-1}$ поправкой $\tilde{y}$. В свою очередь, эти условия затем предполагается использовать для прогноза количества требующихся итераций.

Благодаря полученным в теореме 2 результатам мы можем сформулировать вытекающие из них три важные задачи:

- 1) исследование названных источников погрешностей и поиски возможностей снижения их уровня;
- 2) установление условий гарантированного приближения результата очередной итерации к точному решению;
- 3) получение оценки точности вычисленного в результате выполненного итерационного процесса приближенного решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00402). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
2. Saad J. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Boston: PWS Publishing Co., 1996.
3. Olshanskii M.A., Tyrtyshnikov E.E. Iterative methods for linear systems: theory and applications. Philadelphia: SIAM, 2014.
4. Ильин В.П. Итерационные предобусловленные методы в подпространствах Крылова: тенденции XXI века // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61, № 11. С. 1786–1813; DOI: 10.31857/S0044466921110090
5. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.
6. Greenbaum A. Iterative Metuloids of Solving Linear Systems. Philadelphia: SIAM, 1997.
7. Greenbaum A., Trefethen L.N. GMRES/CR and Arnoldi/Lanczos as Matrix Approximation Problems // SIAM J. Sci. Comput. 2018. V. 15, N 2. P 359–368.
8. Ильин В.П. О проекционных методах в подпространствах Крылова // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т 472. С. 103–119.
9. Киреев И.В. Ортогональные проекторы и системы линейных алгебраических уравнений // Сиб. журн. вычисл. матем. 2020. Т. 23, № 3. С. 315–324.
10. Arioli M., Fassino C. Roundoff error analysis of algorithms based on Krylov subspace methods // BIT Numer. Math. 1996. V. 36, N 2. P. 189–206.
11. Arioli M. Generalized Golub—Kahan Bidiagonalization and Stopping Criteria // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2013. V. 34, N 2. P. 57–592.
12. Greenbaum A. Estimating the Attainable Accuracy of Recursively Computed Residual Methods // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1997. V. 18, N 3. P.535–551.
13. Capraux J.-F., Godunov S.K., Kuznetsov S.V. Condition number of the Krylov bases and subspaces // Linear Algebra Appl. 1996. V. 248, N 1–3. P. 136–160.
14. Kuznetsov S.V. Perturbation of the Krylov bases and associated Hessenberg Forms // Linear Algebra Appl. 1997. V. 265, N 1–3. P. 1–28.
15. Мальшев А.Н., Садкане М. Теория возмущений по первому приближению для симметричного алгоритма Ланцоша // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, № 3. С. 391–399.
16. Babenko V.N. On the Structure of Closeness Estimates for Pseudosolutions of Initial and Perturbed Systems of Linear Algebraic Equations // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59, N 9. P. 1399–1421; DOI: 10.1134/S0965542519090069
17. Бабенко В.Н. Аспекты машинного решения систем линейных уравнений: монография. Краснодар: Экоинвест, 2020.
18. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
19. Годунов С.К. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах: монография. Новосибирск: Наука, 1988.

UDC 519.61

**ON THE INFLUENCE OF DISTURBANCES ON THE ACCURACY
OF COMPUTING CORRECTIONS IN THE KRYLOV SUBSPACE**© 2025 V. P. Ilyin^{1a}, V. N. Babenko^{2b}¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*²*Kuban State Technological University, Krasnodar, 350072 Russia*E-mails: ^ailin@sscc.ru, ^brnibvd@mail.ru

Received 26.10.2024, revised 12.04.2025, accepted 21.04.2025

Abstract. Rounding errors inevitably occur when performing calculations on a computer. In this paper, we study the impact of these errors on the accuracy of calculating the correction in the Krylov subspace. An estimate of the accuracy of the calculated correction, expressed via perturbations of the original data, is obtained.

Keywords: orthoprojector, Krylov subspace, projection method, Arnoldi orthogonalization, highdimensional SLAE, rounding error.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.101

REFERENCES

1. G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations* (Johns Hopkins Univ., Baltimore, 1996; Moscow, Mir, 1999).
2. J. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (PWS, Boston, 1996).
3. M. A. Olshanskii and E. E. Tyrtshnikov, *Iterative Methods for Linear Systems: Theory and Applications* (SIAM, Philadelphia, 2014).
4. V. P. Il'in, "Iterative preconditioned methods in Krylov spaces: Trends of the 21st century," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **61** (11), pp. 1786–1813 (2021) [*Comput. Math. Math. Phys.* **61** (11), pp. 1750–1775 (2021)] <https://doi.org/10.1134/S0965542521110099>.
5. S. Pissanetsky, *Sparse Matrix Technology* (Academic Press, New York, 1984; Mir, Moscow, 1988).
6. A. Greenbaum, *Iterative Methods for Solving Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 1997).
7. A. Greenbaum and L. N. Trefethen, "GMRES/CR and Arnoldi/Lanczos as matrix approximation problems," *SIAM J. Sci. Comput.* **15** (2), pp. 359–368 (2018).
8. V. P. Ilyin, "On projection methods in Krylov subspaces," *Zap. Nauchn. Semin. POMI.* **472**, pp. 103–119 (2018) [in Russian].
9. I. V. Kireev, "Orthogonal projectors and systems of linear algebraic equations," *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* **23** (3), pp. 315–324 (2020) [*Numer. Anal. Appl.* **13** (3), pp. 262–270 (2020)].
10. M. Arioli and C. Fassino, "Roundoff error analysis of algorithms based on Krylov subspace methods," *BIT Numer. Math.* **36** (2), pp. 189–206 (1996).
11. M. Arioli, "Generalized Golub–Kahan bidiagonalization and stopping criteria," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **34** (2), pp. 57–592 (2013).
12. A. Greenbaum, "Estimating the attainable accuracy of recursively computed residual methods," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **18** (3), pp. 535–551 (1997).

13. J.-F. Capraux, S. K. Godunov, and S. V. Kuznetsov, “Condition number of the Krylov bases and subspaces,” *Linear Algebra Appl.* **248** (1–3), pp. 136–160 (1996).
14. S. V. Kuznetsov, “Perturbation of the Krylov bases and associated Hessenberg Forms,” *Linear Algebra Appl.* **265** (1–3), pp. 1–28 (1997).
15. A. N. Malyshev and M. Sadkane, “Perturbation theory to the first approximation for the symmetric Lanczos algorithm,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **45** (3), pp. 391–399 (2005) [*Comput. Math. Math. Phys.* **45** (3), pp. 374–382 ((2005))].
16. V. N. Babenko, “On the structure of closeness estimates for pseudosolutions of initial and perturbed systems of linear algebraic equations,” *Comput. Math. Math. Phys.* **59** (9), pp. 1399–1421 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0965542519090069>
17. V. N. Babenko, *Aspects of Machine Solution of Systems of Linear Equations: A Monograph* (Ekoinvest, Krasnodar, 2020) [in Russian].
18. C. L. Lawson and R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974; Nauka, Moscow, 1988).
19. S. K. Godunov, *Guaranteed Accuracy of Solutions of Systems of Linear Equations in Euclidean Spaces: A Monograph* (Nauka, Novosibirsk, 1988) [in Russian].