

УДК 539.37

ЗАДАЧА О КРАЕВОЙ ДИСЛОКАЦИИ, БЕГУЩЕЙ СО СВЕРХСЕЙСМИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ

© 2025 В. М. Садовский^a, О. В. Садовская^b*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия*E-mails: ^asadov@icm.krasn.ru, ^bo_sadov@icm.krasn.ruПоступила в редакцию 16.12.2024 г.; после доработки 28.02.2025 г.;
принята к публикации 26.03.2025 г.

В качестве модели сдвигового разрыва в земной коре на глубинах сейсмической активности, растущего со сверхсейсмической скоростью, т. е. скоростью, превышающей скорость продольных волн, рассматривается краевая дислокация Вольтерра, движущаяся в безграничной изотропной упругой среде под действием предварительных касательных напряжений. В приближении плоской деформации уравнения стационарного движения среды вокруг дислокации приводятся к гиперболической системе уравнений для скоростей и напряжений, которая интегрируется методом характеристик. С помощью инвариантного J -интеграла получена оценка энергии, высвобождающейся по мере продвижения дислокации, в зависимости от скорости, величины касательного напряжения на бесконечности, длины веера, примыкающего к вершине, и от характера распределения вектора Бюргерса в веере.

Ключевые слова: сдвиговый разрыв, динамика, краевая дислокация, метод характеристик, инвариантный интеграл.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.105

ВВЕДЕНИЕ

Наряду с медленно растущими трещинами в земной коре, которые со временем приводят к формированию геологических разломов, в твёрдых горных породах на глубинах порядка десятка километров наблюдаются сдвиговые разрывы, распространяющиеся с аномально высокими скоростями, сравнимыми и даже превышающими скорости упругих волн. Такие разрывы были зарегистрированы в натуральных наблюдениях [1, 2, 3] и являются предметом исследований в лабораторных экспериментах [4, 5]. В недавних публикациях [6, 7] по результатам обработки данных разрушительного землетрясения магнитудой 7.8 баллов, произошедшего 6 февраля 2023 г. в районе города Кахраманмараш (Турецкая Республика), были зарегистрированы сейсмические события, которые распространялись в пространстве со скоростью, в полтора раза превышающей скорость поперечных упругих волн.

Для объяснения движения сдвиговых разрывов с сейсмическими скоростями Б. Г. Тарасов предложил оригинальный механизм [8, 9, 10]. По его представлениям, в вершине разрыва под действием бокового давления образуется веерная структура, состоящая из домино-пластин. Пластины поворачиваются при возникновении относительно небольших касательных напряжений в окружающем горном массиве и, что самое главное, сохраняют свою целостность при вращении. Так образуется веерная система, схематично изображённая на рис. 1. В отсутствие трения и внешних активных сил веерная система находится в положении безотносительного равновесия и может свободно перемещаться вдоль уже образовавшегося разлома. Силы трения, к которым относится сила сопротивления отрыву пластин в вершине веера, препятствуют

такому перемещению. Под действием предварительных касательных напряжений, обусловленных протекающими тектоническими процессами, веер выходит из равновесия и начинает двигаться как волна, развивая высокую скорость. Начало такого движения происходит при пороговом значении касательного напряжения, при котором движущая сила веера оказывается равной силе трения.

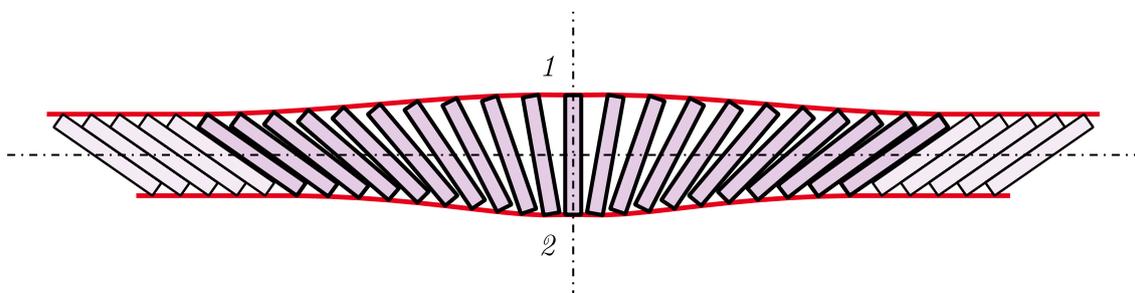


Рис. 1. Конфигурация самоуравновешенного веера (1 — зона растяжения, 2 — зона сжатия)

Лабораторная модель, имитирующая движение веерной системы, соответствующая ей математическая модель и результаты численного анализа представлены в работе [11]. Статическое напряжённо-деформированное состояние среды вокруг равновесного веера в приближении плоской деформации построено на основе метода суперпозиции дислокаций в [12]. Численное моделирование страгивания и последующего ускоренного движения веерной системы проводилось в рамках двумерных уравнений динамической теории упругости в [13]. Для этого был разработан специальный метод решения на основе неявной разностной схемы с контролируемой искусственной диссипацией энергии [14].

Учитывая, что моделирование динамики веерной системы на больших временах в полной постановке оказалось неподъёмной задачей даже для высокопроизводительных вычислений, к её решению была применена упрощённая математическая модель краевой дислокации, движущейся с постоянной скоростью. Такое движение является стационарным по аналогии с движением бегущей волны. Упрощение состоит в том, что динамика образования нового геологического разлома рассматривается в крупномасштабном приближении, на котором веер, имеющий конечную длину, превращается в точку — вершину дислокации. Решение задачи о бегущей дислокации для относительно низких скоростей, не превышающих скорость поперечных упругих волн, в такой постановке получено авторами на основе системы определяющих уравнений эллиптического типа с помощью разложения вектора перемещений на градиент скалярного и ротор векторного потенциалов [15]. Кроме того, задача решена в предположении о трансзвуковой скорости в диапазоне между скоростями поперечных и продольных волн. Система определяющих уравнений имеет в этом случае смешанный эллиптико-гиперболический тип. В настоящей статье рассматривается диапазон скоростей выше скорости продольных волн, который описывается гиперболической системой.

Заметим, что основы теории дислокаций для описания необратимой пластической деформации кристаллов были заложены в классических трудах В. Вольтерра, Л. Прандтля, О. Э. Лява, Дж. М. Бюргера (см. [16, 17]). Принципиальную важность независимого моделирования процессов, происходящих в вершине дислокации, подчёркивал Ю. Н. Работнов [18]. Современному развитию теории посвящены работы [19, 20] и многие другие.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В упругой плоскости рассматривается краевая дислокация, вершина которой движется в положительном направлении оси x_2 декартовой системы координат Ox_1x_2 с постоянной сверхсейсмической скоростью. В результате такого движения в полуплоскостях $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$ реализуется стационарное напряжённо-деформированное состояние. На границе полуплоскостей

за вершиной дислокации на некотором удалении от вершины скачок проекции вектора перемещения u_2 на горизонтальную ось равен постоянной b — модулю вектора Бюргерса. Проекция вектора перемещения u_1 на вертикальную ось непрерывна. Перед осью дислокации упругая среда находится в естественном ненапряженном состоянии, так как скорость вершины превосходит скорости упругих волн. На бесконечности в обеих полуплоскостях действует постоянное касательное напряжение τ , за счёт которого возникает стационарный режим движения. Схематично граничные условия задачи представлены на рис. 2. Чтобы избежать сингулярности решения, предположим далее, что при подходе к вершине дислокации скачок продольного перемещения точек среды на линии дислокации монотонно убывает в некоторой окрестности вершины от величины вектора Бюргерса до нулевого значения. Эта окрестность рассматривается в качестве прообраза верной системы.

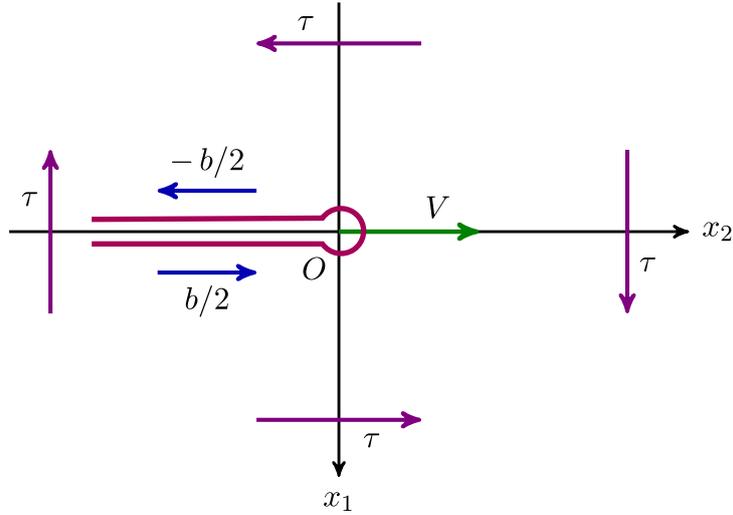


Рис. 2. Бегущая дислокация (b — вектор Бюргерса, V — скорость, τ — касательное напряжение)

В системе координат, движущейся с постоянной скоростью вместе с вершиной, состояние среды описывается уравнениями динамической теории упругости в приближении плоской деформации:

$$\begin{aligned} -\rho V \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2}, & -\rho V \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2}, \\ -V \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2}, & -V \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2} &= \mu \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \mu \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1}, \\ & & -V \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2} &= \lambda \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность среды, λ и μ — параметры Ламе, V — скорость вершины, v_i — проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат Ox_1x_2 , σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в этих же осях ($i, j = 1, 2$), $\xi_1 = x_1$ и $\xi_2 = x_2 - Vt$ — стационарные переменные, t — время.

С учётом обозначений для скоростей продольных волн $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и поперечных волн $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ уравнения (1) преобразуются к системе

$$\begin{aligned} \rho (V^2 - c_2^2) \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\mu v_2 - V \sigma_{11}), & \rho (V^2 - c_1^2) \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\lambda v_1 - V \sigma_{12}), \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\mu v_1 + V \sigma_{12}) &= -\mu \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\lambda v_2 + V \sigma_{11}) &= -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1}. \end{aligned}$$

Уравнение для σ_{22} , дополняющее эту систему до (1), целесообразно представить в виде уравнения на контактной характеристике $d\xi_1 = 0$: $dR^{(0)} = 0$ для инварианта Римана

$$R^{(0)} = (\lambda + 2\mu)V\sigma_{22} - \lambda V\sigma_{11} + 4\mu(\lambda + \mu)v_2.$$

Интегрирование позволяет получить равенство $R^{(0)} = f_0(\xi_1)$, которое служит для вычисления напряжения σ_{22} через остальные неизвестные функции с произволом в функцию f_0 .

Преобразованная система представима в матричной форме

$$A \frac{\partial U}{\partial \xi_2} = B \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \quad (2)$$

с матрицами-коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} \rho(V^2 - c_2^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(V^2 - c_1^2) & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & V \\ 0 & \lambda & V & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \mu & -V & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -V \\ 0 & -\mu & 0 & 0 \\ -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

Система (2) относится к гиперболическому типу, так как $V > c_1$, и приводится к уравнениям на характеристиках. Собственные значения системы — корни характеристического уравнения $\det(A - kB) = 0$, которое записывается в виде

$$(V^2 - k^2 c_1^2 - c_2^2)(V^2 - c_1^2 - k^2 c_2^2) = k^2(c_1^2 - c_2^2)^2,$$

равны $\pm k_1$ и $\pm k_2$, где

$$k_1 = \sqrt{\frac{V^2}{c_1^2} - 1}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{V^2}{c_2^2} - 1}.$$

Левые собственные векторы X : $X(A - kB) = 0$, соответствующие собственным значениям $k = k_1, -k_1, k_2$ и $-k_2$, оказываются равными

$$X^{(\pm 1)} = (1, \pm 1/k_1, -1, \mp k_1), \quad X^{(\pm 2)} = (\mp 1/k_2, 1, \mp k_2, 1).$$

Инварианты Римана $R^{(\pm j)} = Y_1^{(\pm j)}v_1 + Y_2^{(\pm j)}v_2 + Y_3^{(\pm j)}\sigma_{11} + Y_4^{(\pm j)}\sigma_{12}$ ($j = 1, 2$) выражаются через производящие векторы $Y = XA$, которые принимают следующий вид:

$$Y^{(\pm 1)} = (\mu(k_2^2 - 1), \pm 2\mu k_1, \mp k_1 V, -V), \quad Y^{(\pm 2)} = (\mp 2\mu k_2, \mu(k_2^2 - 1), V, \mp k_2 V).$$

Для инвариантов Римана выполняется система уравнений на характеристиках

$$k_1 d\xi_1 \pm d\xi_2 = 0 : dR^{(\pm 1)} = 0, \quad k_2 d\xi_1 \pm d\xi_2 = 0 : dR^{(\pm 2)} = 0.$$

После интегрирования из неё следует замкнутая система линейных алгебраических уравнений для общего решения системы (2), зависящего от четырёх произвольных функций $f_{\pm 1}$ и $f_{\pm 2}$:

$$\begin{aligned} \mu(k_2^2 - 1)v_1 + 2\mu k_1 v_2 - k_1 V\sigma_{11} - V\sigma_{12} &= 2k_1 f_{+1}(k_1 \xi_1 + \xi_2), \\ \mu(k_2^2 - 1)v_1 - 2\mu k_1 v_2 + k_1 V\sigma_{11} - V\sigma_{12} &= 2k_1 f_{-1}(-k_1 \xi_1 + \xi_2), \\ -2\mu k_2 v_1 + \mu(k_2^2 - 1)v_2 + V\sigma_{11} - k_2 V\sigma_{12} &= 2k_2 f_{+2}(k_2 \xi_1 + \xi_2), \\ 2\mu k_2 v_1 + \mu(k_2^2 - 1)v_2 + V\sigma_{11} + k_2 V\sigma_{12} &= 2k_2 f_{-2}(-k_2 \xi_1 + \xi_2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mu(k_2^2 - 1)v_1 - V\sigma_{12} &= k_1(f_{+1} + f_{-1}), & 2\mu v_2 - V\sigma_{11} &= f_{+1} - f_{-1}, \\ \mu(k_2^2 - 1)v_2 + V\sigma_{11} &= k_2(f_{+2} + f_{-2}), & 2\mu v_1 + V\sigma_{12} &= f_{-2} - f_{+2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее для краткости аргументы произвольных функций опущены.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть $h(\xi)$ — непрерывно-дифференцируемая функция, представляющая собой сглаженную на отрезке $[0, a]$ ступеньку Хевисайда, равная единице при $\xi > a$ и нулю при $\xi < 0$. В терминах этой функции граничные условия для перемещения u_2 и соответствующей скорости на горизонтальной оси записываются в виде

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \pm 0} u_2 = \pm \frac{b}{2} h(-\xi_2), \quad v_2 = -V \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \implies \lim_{\xi_1 \rightarrow \pm 0} v_2 = \pm \frac{bV}{2} h'(-\xi_2). \quad (4)$$

Кроме этих условий на оси ξ_2 выполняются условия непрерывности скорости v_1 , а также нормального и касательного напряжений σ_{11} и σ_{12} .

Так как вершина дислокации движется со сверхсейсмической скоростью, то в нижней полуплоскости $\xi_1 > 0$ функции f_{-1} и f_{-2} , входящие в общее решение, тождественно равны нулю. Из уравнений системы (3) следует, что

$$\begin{aligned} v_1 &= V(k_1 \tilde{f}_{+1} - \tilde{f}_{+2}), & v_2 &= V(\tilde{f}_{+1} + k_2 \tilde{f}_{+2}), \\ \sigma_{11} &= -\mu \left((k_2^2 - 1) \tilde{f}_{+1} - 2k_2 \tilde{f}_{+2} \right), & \sigma_{12} &= -\mu \left(2k_1 \tilde{f}_{+1} + (k_2^2 - 1) \tilde{f}_{+2} \right). \end{aligned}$$

В верхней полуплоскости $\xi_1 < 0$ равны нулю функции f_{+1} и f_{+2} . Поэтому

$$\begin{aligned} v_1 &= V(k_1 \tilde{f}_{-1} + \tilde{f}_{-2}), & v_2 &= -V(\tilde{f}_{-1} - k_2 \tilde{f}_{-2}), \\ \sigma_{11} &= \mu \left((k_2^2 - 1) \tilde{f}_{-1} + 2k_2 \tilde{f}_{-2} \right), & \sigma_{12} &= -\mu \left(2k_1 \tilde{f}_{-1} - (k_2^2 - 1) \tilde{f}_{-2} \right). \end{aligned}$$

Здесь и ниже для краткости используются вспомогательные обозначения $\tilde{f}_{\pm j} = f_{\pm j}/(\rho V^3)$.

Подстановка этих формул в граничные условия (4) и условия непрерывности напряжений приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{+1}(\xi_2) + k_2 \tilde{f}_{+2}(\xi_2) &= \frac{b}{2} h'(-\xi_2), & \tilde{f}_{-1}(\xi_2) - k_2 \tilde{f}_{-2}(\xi_2) &= \frac{b}{2} h'(-\xi_2), \\ (k_2^2 - 1) \left(\tilde{f}_{+1}(\xi_2) + \tilde{f}_{-1}(\xi_2) \right) - 2k_2 \left(\tilde{f}_{+2}(\xi_2) + \tilde{f}_{-2}(\xi_2) \right) &= 0, \\ 2k_2 \left(\tilde{f}_{+1}(\xi_2) + \tilde{f}_{-1}(\xi_2) \right) + (k_2^2 - 1) \left(\tilde{f}_{+2}(\xi_2) + \tilde{f}_{-2}(\xi_2) \right) &= 0, \end{aligned}$$

из которой следует, что

$$\tilde{f}_{+1}(\xi) = \tilde{f}_{-1}(\xi) = \frac{b}{k_2^2 + 1} h'(-\xi), \quad \tilde{f}_{+2}(\xi) = -\tilde{f}_{-2}(\xi) = \frac{b}{2k_2} \frac{k_2^2 - 1}{k_2^2 + 1} h'(-\xi).$$

Таким образом, решение задачи в нижней полуплоскости $\xi_1 > 0$ принимает вид

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{bV}{2k_2(k_2^2 + 1)} \left(2k_1k_2 h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) - (k_2^2 - 1) h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
v_2 &= \frac{bV}{2(k_2^2 + 1)} \left(2h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1) h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
\sigma_{11} &= -\mu b \frac{k_2^2 - 1}{k_2^2 + 1} \left(h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) - h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
\sigma_{12} &= -\frac{\mu b}{2k_2(k_2^2 + 1)} \left(4k_1k_2 h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1)^2 h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Для определения напряжения σ_{22} служит уравнение $R^{(0)} = f_0(\xi_1)$. Входящая в него функция f_0 тождественно равна нулю, поскольку в правой полуплоскости среда неподвижна и находится в ненапряжённом состоянии. С учётом выражения для инварианта Римана $R^{(0)}$ это уравнение даёт

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{11} - \frac{4\mu}{V} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} v_2 = \\
&= -\frac{\mu b}{k_2^2 + 1} \left(\frac{(k_2^2 + 3)\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1) h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right).
\end{aligned}$$

В верхней полуплоскости $\xi_1 < 0$ решение принимает вид

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{bV}{2k_2(k_2^2 + 1)} \left(2k_1k_2 h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) - (k_2^2 - 1) h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
v_2 &= -\frac{bV}{2(k_2^2 + 1)} \left(2h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1) h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
\sigma_{11} &= \mu b \frac{k_2^2 - 1}{k_2^2 + 1} \left(h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) - h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
\sigma_{12} &= -\frac{\mu b}{2k_2(k_2^2 + 1)} \left(4k_1k_2 h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1)^2 h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
\sigma_{22} &= \frac{\mu b}{k_2^2 + 1} \left(\frac{(k_2^2 + 3)\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1) h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Поля скоростей и напряжений (5), (6) представляют собой точное решение задачи о сверхсейсмическом стационарном движении дислокации в ненапряжённой упругой среде. При учёте сдвигов, обусловленных природными тектоническими процессами, в соответствии с принципом суперпозиции, к напряжению σ_{12} необходимо добавить предварительное касательное напряжение τ . Наличие такого напряжения служит триггерным механизмом, запускающим движение дислокации. Под его влиянием веерная система в вершине дислокации выходит из состояния равновесия и создаёт движущую силу. К нормальным напряжениям σ_{11} и σ_{22} также следует добавить постоянное гидростатическое напряжение $-p$, характерное для данной глубины.

3. ИНВАРИАНТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Движущая сила дислокации однозначно определяется действующими на бесконечности напряжениями и скоростью движения вершины. На то, что термин “движущая сила” в данном случае неудачен, так как в действительности сила в привычном для механики понимании

в вершине дислокации отсутствует, обратил внимание Ю. Н. Работнов [18]. Сила трактуется здесь в более широком смысле, как причина, вызывающая движение. На самом деле размерность силы имеет энергия, затрачиваемая на продвижение дислокации на единицу длины. Это часть запасённой упругой энергии предварительных напряжений, которая высвобождается из окружающей горной породы, представляя собой разрушительную энергию сейсмического процесса.

Формула для вычисления движущей силы J выводится, исходя из вариационного принципа возможных перемещений, записанного для произвольной односвязной области D , ограниченной контуром L :

$$\iint_D \delta W d\xi_1 d\xi_2 = - \iint_D \left(\rho V^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} \delta u_1 + \rho V^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} \delta u_2 \right) d\xi_1 d\xi_2 + \int_L \left(\sigma_{n1} \delta u_1 + \sigma_{n2} \delta u_2 \right) ds + J \delta \xi_2.$$

Здесь W — удельная потенциальная энергия:

$$2W = \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right),$$

σ_{n1} и σ_{n2} — компоненты вектора напряжений на контуре L :

$$\sigma_{n1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2, \quad \sigma_{n2} = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2,$$

n_1, n_2 — проекции вектора нормали к контуру, ds — элемент дуги.

В соответствии с принципом Даламбера силы инерции, входящие в подынтегральное выражение первого из интегралов в правой части, участвуют в качестве статических объёмных сил. Полагая

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \delta \xi_2, \quad \delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \delta \xi_2, \quad \delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \delta \xi_2,$$

после применения формулы Грина из вариационного принципа получим

$$J = - \int_P^Q \left(W + \frac{1}{2} \rho V^2 \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right|^2 \right) \right) d\xi_1 + \left(\sigma_{n1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \sigma_{n2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right) ds. \quad (7)$$

Интеграл берётся по произвольному контуру, охватывающему вершину дислокации, с концами в точках P и Q , расположенными друг над другом на разных берегах линии разрыва перемещения.

Интеграл (7) является обобщением на случай стационарного движения среды известного в механике разрушений инвариантного J -интеграла Черепанова—Райса. Свойство инвариантности, то есть независимости от контура интегрирования, вытекает из условия полного дифференциала подынтегрального выражения, которое с помощью геометрических формул $n_1 ds = d\xi_2$ и $n_2 ds = -d\xi_1$ приводится к дифференциальной форме $P d\xi_1 + Q d\xi_2$, где

$$P = W + \frac{1}{2} \rho V^2 \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right|^2 \right) - \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, \quad Q = \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}.$$

Условие полного дифференциала $\partial P / \partial \xi_2 = \partial Q / \partial \xi_1$ является следствием уравнений теории упругости (1), переписанных в терминах перемещений:

$$\begin{aligned} \rho V^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2}, & \rho V^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2}, \\ \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, & \sigma_{12} &= \mu \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}, & \sigma_{22} &= \lambda \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

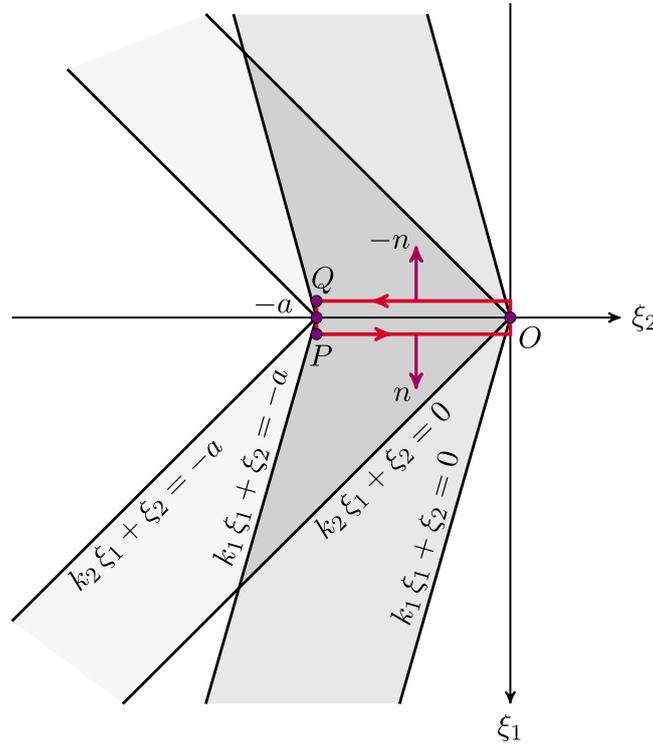


Рис. 3. Волновая картина и контур интегрирования

Инвариантный интеграл тождественно равен нулю, если внутри контура нет особенностей решения системы (8). Он имеет смысл при наличии особенностей типа разрывов перемещений в рассматриваемой задаче о бегущей дислокации.

При вычислении J -интеграла для дислокации в качестве контура интегрирования выберем вырожденный (бесконечно тонкий) прямоугольник, охватывающий отрезок $[-a, 0]$ на оси абсцисс (см. рис. 3). Учитывая, что на этом контуре $d\xi_1 = 0$, $n_2 = 0$ и $n_1 ds = d\xi_2$, получим

$$\begin{aligned} J &= - \int_P^Q \left((\sigma_{11} - p) \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + (\sigma_{12} + \tau) \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right) n_1 ds = \\ &= \frac{1}{V} \int_P^Q \left((\sigma_{11} - p) v_1 + (\sigma_{12} + \tau) v_2 \right) n_1 ds = \frac{2}{V} \int_{-a}^0 (\sigma_{12} + \tau) v_2 \Big|_{\xi_1=+0} d\xi_2. \end{aligned}$$

Преобразование интеграла после подстановки v_2 и σ_{12} из (5) приводит к следующей формуле:

$$J = - \frac{\mu b^2}{2k_2} \frac{4k_1 k_2 + (k_2^2 - 1)^2}{k_2^2 + 1} \int_{-a}^0 |h'(-\xi_2)|^2 d\xi_2 + b\tau. \quad (9)$$

Судя по формуле (9), значение J -интеграла не зависит от величины давления и существенно зависит от вида функции $h(\xi)$. Максимум по всем таким функциям при фиксированном a достигается, если h линейна на отрезке $[0, a]$. Для такой функции $h' = 1/a$ на отрезке и, следовательно,

$$J = - \frac{\mu b^2}{2a k_2} \frac{4k_1 k_2 + (k_2^2 - 1)^2}{k_2^2 + 1} + b\tau.$$

При стремлении a к нулю J -интеграл принимает отрицательные значения. Движение дислокации в этом случае физически неосуществимо, так как оно сопровождается не высвобождением, а накоплением потенциальной энергии. Надо ещё учесть, что определённая часть энергии поглощается силами трения, включая энергию, затрачиваемую на разрушение горной породы вблизи вершины трещины. Поэтому значение J -интеграла должно быть ограниченным от нуля. Типичные графики зависимости J -интеграла от скорости V представлены на рис. 4. В расчётах были приняты следующие значения параметров, характерные для сверх-хрупкой горной породы: $\rho = 2700$ кг/м³, $c_1 = 6000$, $c_2 = 3300$ м/с. Модуль вектора Бюргерса $b = 0.12$ м взят по результатам натурных наблюдений В. Д. Ортелеппа [1]. Величина касательного напряжения $\tau = 250$ МПа выбрана произвольно, учитывая, что в природе она может изменяться в широком диапазоне.

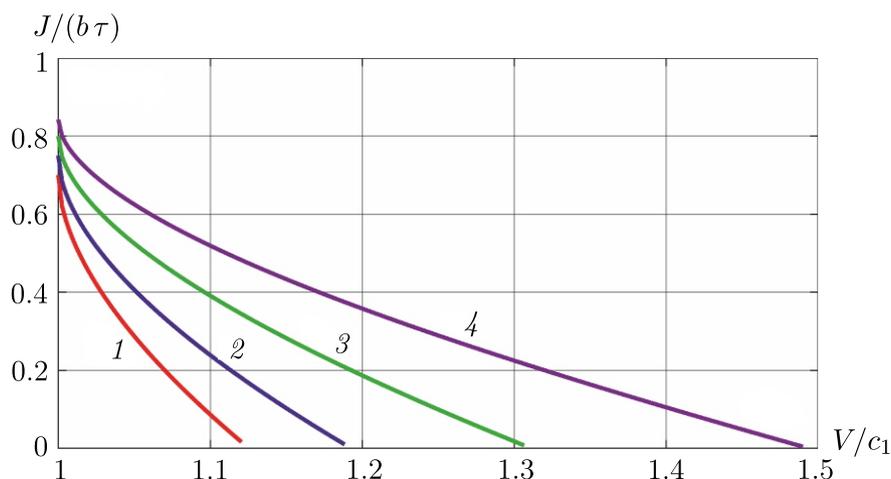


Рис. 4. Графики зависимости безразмерной величины $J/(b\tau)$ от V/c_1 для значений параметра a , равных 10, 12, 15 и 19 м (кривые 1–4 соответственно)

Чтобы дислокация двигалась с высокой скоростью, в её вершине должны происходить интенсивные деформационные процессы, источником которых служит потенциальная энергия предварительных напряжений в горной породе. Такие процессы в принципе описываются с помощью модельного представления о веерном механизме Б. Г. Тарасова. При этом в качестве параметра a участвует длина веера. Как показали расчёты [12, 13], длина веерной системы в основном определяется величиной гидростатического давления, и на глубинах порядка 10 км она на два порядка превышает величину вектора Бюргерса. Из этих соображений параметр a на приведённых графиках варьировался в пределах от 10 до 20 м.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено точное решение задачи о бегущей дислокации, моделирующее движение сдвигового разрыва в массиве горных пород с аномально высокой скоростью, превышающей скорость продольных упругих волн. С его помощью оценена величина энергии, которая высвобождается в процессе движения. Анализ показал, что при заданном преднапряжённом состоянии массива энергия бегущей дислокации тем меньше, чем больше скорость её вершины. Таким образом, разрывы, растущие с более высокими скоростями в сверхсейсмическом диапазоне, оказываются менее опасными по уровню высвобождаемой энергии. Полученное решение может быть полезным при исследовании вопроса о допустимом диапазоне скоростей роста трещин на глубинах сейсмической активности в земной коре и об уровне разрушительной энергии, связанной с такими трещинами. Оно применимо к анализу физических механизмов сверхбыстрого роста трещин, что в конечном итоге может быть использовано при разработке систем предупреждения и защиты населения и инфраструктуры городов от крупных сейсмических событий.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института вычислительного моделирования СО РАН (проект FWES-2024-0025) и при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2025-1606). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ortlepp W.D.* Rock fracture and rockbursts: An illustrative study. Monograph series M9. Johannesburg: South African Institute of Mining and Metallurgy, 1997.
2. *McGarr A.F., Simpson D., Seeber L.* Case histories of induced and triggered seismicity // *Int. Handb. Earthquake Eng. Seismol.* 2002. V. 81, N 40. P. 647–661; DOI: 10.1016/S0074-6142(02)80243-1
3. *Otsuki K., Dilov T.* Evolution of hierarchical self-similar geometry of experimental fault zones: Implications for seismic nucleation and earthquake size // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110, N B3. Article B03303; DOI: 10.1029/2004JB003359
4. *Rosakis A. J., Samudrala O., Coker D.* Cracks faster than the shear wave speed // *Science.* 1999. V. 284, N 5418. P. 1337–1340; DOI: 10.1126/science.284.5418.1337
5. *Gori M., Rubino V., Rosakis A.J., Lapusta N.* Pressure shock fronts formed by ultra-fast shear cracks in viscoelastic materials // *Nature Commun.* 2018. V. 9. Article 4754; DOI: 10.1038/s41467-018-07139-4
6. *Rosakis A.J., Abdelmeguid M., Elbanna A.* Evidence of early supershear transition in the Mw 7.8 Kahramanmaraş earthquake from near-field records // *arXiv.* 2023; DOI: 10.48550/arXiv.2302.07214
7. *Каракозова А.И., Кузнецов С.В., Мондрус В.Л.* Землетрясение Кахраманмарас 06.02.2023: математические модели, оценки и методы сейсмической защиты // *Изв. РАН. МТТ.* 2024. № 2. С. 90–102; DOI: 10.31857/S1026351924020034
8. *Tarasov B.G.* Hitherto unknown shear rupture mechanism as a source of instability in intact hard rocks at highly confined compression // *Tectonophysics.* 2014. V. 621. P. 69–84; DOI: 10.1016/j.tecto.2014.02.004
9. *Tarasov B.G., Randolph M.F.* Improved concept of lithospheric strength and earthquake activity at shallow depths based upon the fan-head dynamic shear rupture mechanism // *Tectonophysics.* 2016. V. 667. P. 124–143; DOI: 10.1016/j.tecto.2015.11.016
10. *Tarasov B.G.* New physics of supersonic ruptures // *Deep Undergr. Sci. Eng.* 2023. V. 2, N 3. P. 207–244; DOI: 10.1002/dug2.12050
11. *Тарасов Б.Г., Садовский В.М., Садовская О.В.* Анализ веерных волн в лабораторной модели, имитирующей распространение сдвиговых трещин в горных породах // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 1. С. 38–51; DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.1.4
12. *Tarasov B.G., Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Cassidy M.J., Randolph M.F.* Modelling the static stress-strain state around the fan-structure in the shear rupture head // *Appl. Math. Model.* 2018. V. 57. P. 268–279; DOI: 10.1016/j.apm.2018.01.020
13. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Supercomputing analysis of fan-shaped waves in the Earth's crust at the depths of seismic activity // *Mater. Phys. Mech.* 2019. V. 42, N 3. P. 330–339; DOI: 10.18720/MPM.4232019_8
14. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2018. V. 33, N 2. P. 111–121; DOI: 10.1515/rnam-2018-0010
15. *Садовский В.М., Садовская О.В.* Моделирование веерного механизма образования разломов в земной коре // *Программа и аннотации докладов конференции 053w: “Перспективы математического моделирования физических процессов в многомасштабных геологических средах”.* 2024. С. 11–12.

16. *Nabarro F.R.N.* Mathematical theory of stationary dislocations // *Adv. Phys.* 1952. V. 1, N 3. P. 269–394; DOI: 10.1080/00018735200101211
17. *Фридель Ж.* Дислокации. М.: Мир, 1967.
18. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988.
19. *Shima H., Umeno Y., Sumigawa T.* Analytic formulation of elastic field around edge dislocation adjacent to slanted free surface // *R. Soc. Open Sci.* 2022. V. 9. Article 220151; DOI: 10.1098/rsos.220151
20. *Markenscoff X.* Loss of pseudo-momentum, energy-release rate and the effective mass of a moving dislocation // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2023. V. 381. Article 20230232; DOI: 10.1098/rsta.2023.0232

UDC 539.37

**THE PROBLEM ON AN EDGE DISLOCATION RUNNING
AT SUPERSEISMIC VELOCITY**© 2025 V. M. Sadovskii^a, O. V. Sadovskaya^b*Institute of Computational Modeling of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia*E-mails: ^asadov@icm.krasn.ru, ^bo_sadov@icm.krasn.ru

Received 16.12.2024, revised 28.02.2025, accepted 26.03.2025

Abstract. As a model of shear rupture in the Earth's crust at the depths of seismic activity, which grows with a velocity exceeding the velocity of longitudinal waves, we consider a Volterra edge dislocation moving in an infinite isotropic elastic medium under the action of preliminary tangential stresses. In the plane strain approximation, the equations of stationary motion of the medium around the dislocation are reduced to a hyperbolic system of equations for velocities and stresses, which is integrated by the method of characteristics. Using the invariant J -integral, an estimate of the energy released during the motion of dislocation is obtained, depending on the velocity, the value of tangential stress at infinity, the length of the fan adjacent to the vertex of dislocation, and on the nature of the distribution of the Burgers vector in the fan.

Keywords: shear rupture, dynamics, edge dislocation, method of characteristics, invariant integral.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.105

REFERENCES

1. W. D. Ortlepp, *Rock Fracture and Rockbursts: An Illustrative Study*. Monograph Series M9 (South Afr. Inst. Min. Metall., Johannesburg, 1997).
2. A. F. McGarr, D. Simpson, and L. Seeber, "Case histories of induced and triggered seismicity," *Int. Handb. Earthquake Eng. Seismol.* **81** (40), 647–661 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0074-6142\(02\)80243-1](https://doi.org/10.1016/S0074-6142(02)80243-1)
3. K. Otsuki and T. Dilov, "Evolution of hierarchical self-similar geometry of experimental fault zones: Implications for seismic nucleation and earthquake size," *J. Geophys. Res.* **110** (B3), B03303 (2005). <https://doi.org/10.1029/2004JB003359>
4. A. J. Rosakis, O. Samudrala, and D. Coker, "Cracks faster than the shearwave speed," *Science* **284** (5418), 1337–1340 (1999). <https://doi.org/10.1126/science.284.5418.1337>
5. M. Gori, V. Rubino, A. J. Rosakis, and N. Lapusta, "Pressure shock fronts formed by ultra-fast shear cracks in viscoelastic materials," *Nature Commun.* **9**, 4754 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41467-018-07139-4>
6. A. J. Rosakis, M. Abdelmeguid, and A. Elbanna, "Evidence of early supershear transition in the Mw 7.8 Kahramanmaraş earthquake from near-field records," *arXiv:2302.07214* (2023).
7. A. I. Karakozova, S. V. Kuznetsov, and V. L. Mondrus, "Kahramanmaraş earthquake on February 6, 2023: Mathematical models, estimates and methods of seismic protection," *Izv. RAN. MTT* (2), 90–102 (2024) [in Russian]. <https://doi.org/10.31857/S1026351924020034>
8. B. G. Tarasov, "Hitherto unknown shear rupture mechanism as a source of instability in intact hard rocks at highly confined compression," *Tectonophysics* **621**, 69–84 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2014.02.004>

9. B. G. Tarasov and M. F. Randolph, “Improved concept of lithospheric strength and earthquake activity at shallow depths based upon the fan-head dynamic shear rupture mechanism,” *Tectonophysics* **667**, 124–143 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2015.11.016>
10. B. G. Tarasov, “New physics of supersonic ruptures,” *Deep Undergr. Sci. Eng.* **2** (3), 207–244 (2023). <https://doi.org/10.1002/dug2.12050>
11. B. G. Tarasov, V. M. Sadovskii, and O. V. Sadovskaya, “Analysis of fan waves in a laboratory model simulating the propagation of shear cracks in rocks,” *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred* **9** (1), 38–51 (2016) [in Russian]. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.1.4>
12. B. G. Tarasov, V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, M. J. Cassidy, and M. F. Randolph, “Modelling the static stress-strain state around the fan-structure in the shear rupture head,” *Appl. Math. Model.* **57**, 268–279 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.01.020>
13. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Supercomputing analysis of fan-shaped waves in the Earth’s crust at the depths of seismic activity,” *Mater. Phys. Mech.* **42** (3), 330–339 (2019). https://doi.org/10.18720/MPM.4232019_8
14. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **33** (2), 111–121 (2018). <https://doi.org/10.1515/rnam-2018-0010>
15. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Modeling of the fan mechanism of fault formation in the Earth’s crust,” *Progr. Annot. Dokl. Konf. 053w “Perspektivy matematicheskogo modelirovaniya fizicheskikh protsessov v mnogomasshtabnykh geologicheskikh sredakh”* (Progr. Abstr. Rep. Conf. 053w: Prospects for Mathematical Modeling of Physical Processes in Multiscale Geological Environments) (2024), pp. 11–12 [in Russian].
16. F. R. N. Nabarro, “Mathematical theory of stationary dislocations,” *Adv. Phys.* **1** (3), 269–394 (1952). <https://doi.org/10.1080/00018735200101211>
17. J. Friedel, *Dislocations* (Pergamon Press, Oxford, 1964; Mir, Moscow, 1967).
18. Yu. N. Rabotnov, *Mechanics of Deformable Solids* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
19. H. Shima, Y. Umeno, and T. Sumigawa, “Analytic formulation of elastic field around edge dislocation adjacent to slanted free surface,” *R. Soc. Open Sci.* **9**, 220151 (2022). <https://doi.org/10.1098/rsos.220151>
20. X. Markenscoff, “Loss of pseudo-momentum, energy-release rate and the effective mass of a moving dislocation,” *Phil. Trans. R. Soc. A* **381**, 20230232 (2023). <https://doi.org/10.1098/rsta.2023.0232>