

УДК 517.958

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 2025 Ж. Д. Тотиева^{1,2}

¹ Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
ул. Ватутина, 53, г. Владикавказ 362025, Россия,

² Северо-Кавказский центр математических исследований
Владикавказского научного центра РАН,
ул. Вильямса, 1, с. Михайловское 363110, Россия

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

Поступила в редакцию 11.08.2023 г.; после доработки 31.10.2024 г.;
принята к публикации 26.03.2025 г.

Рассматривается двумерная обратная задача определения ядра, входящего в интегро-дифференциальное уравнение вязкоупругости. Предполагается, что коэффициенты уравнений зависят только от одной пространственной переменной. Применяя принцип линеаризации, обратная задача сводится к эквивалентной линейной системе интегральных уравнений. К последней в пространстве непрерывных функций применяется обобщённый принцип сжатых отображений. Доказана теорема однозначной разрешимости и получена оценка устойчивости решения обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, интегро-дифференциальное уравнение, вязкоупругость, устойчивость, дельта-функция, ядро.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.106

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для (x, z, t) , $x \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $t \in \mathbb{R}$ рассматривается следующая система интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t h(x, t - \tau) \mu \frac{\partial u}{\partial x} d\tau \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ + \int_0^t h(x, t - \tau) \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial z} \right] d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \int_0^t h(x, t - \tau) \frac{\partial u}{\partial z} d\tau \right]_{z=+0} = -\frac{\delta(t)}{\lambda(0) + 2\mu(0)}, \quad (3)$$

где $u(x, z, t)$ — функция смещения, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, ρ — плотность среды, λ, μ — параметры Ламе. Функция $h(x, t)$, входящая в интеграл свёртки, описывает вязкие свойства среды и называется ядром памяти.

Предполагаем, что величины ρ, λ, μ известны и принадлежат классу Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda = \{ \rho(z), \mu(z), \lambda(z) \in C^2(\mathbb{R}_+), \rho(z) > 0, \mu(z) > 0, \lambda(z) > 0, \\ \lambda'(+0) = \mu'(+0) = \rho'(+0) = 0, \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \}. \end{aligned}$$

Определение 1. Задачу определения вектора смещения $u(x, z, t)$, удовлетворяющих (в обобщённом смысле) равенствам (1)–(3), при заданных функциях $h(x, t)$, $\rho(z)$, $\mu(z)$, $\lambda(z)$ будем называть *прямой задачей*.

Предполагаем, что ядро памяти $h(x, t)$ является малой величиной и, вводя формально параметр малости ε , его можно представить в виде

$$h(x, t) = \varepsilon h_1(x, t). \quad (4)$$

Решение прямой задачи (1)–(5) будем искать в виде ряда по степеням ε :

$$u(x, z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x, z, t). \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (1) и считая, что вклад слагаемых с членами при ε^j , $j = 2, 3, \dots$ пренебрежимо мал, приравниваем члены, стоящие при ε^j , $j = 0, 1$. В результате получаем две прямые задачи:

(i) *Задача определения $u_0(x, z, t)$ из равенств*

$$\rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_0}{\partial z} \right), \quad (6)$$

$$u_0|_{t < 0} \equiv 0, \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial z} \right]_{z=+0} = -\frac{\delta(t)}{\lambda(0) + 2\mu(0)}. \quad (8)$$

(ii) *Задача определения $u_1(x, z, t)$ из равенств*

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \int_0^t h_1(x, t - \tau) \left[\mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \right] d\tau, \quad (9)$$

$$u_1|_{t < 0} \equiv 0, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \int_0^t h_1(x, t - \tau) \frac{\partial u_0}{\partial z} d\tau \right) \Big|_{z=+0} = 0. \quad (11)$$

Обратная задача: найти ядро $h_1(x, t)$, $t > 0$, входящее в (9), (11), если известна дополнительная информация о решении прямой задачи (9)–(11)

$$u_1(x, z, t)|_{z=+0} = g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (12)$$

$g(x, t)$ — заданная функция.

Определение 2. Функция $h_1(x, t)$ из класса $C_t^1([0, \infty); L_2(\mathbb{R}))$ называется решением обратной задачи (9)–(12) если соответствующее ей решение прямой задачи (9)–(11) $u_1(x, z, t)$ из класса обобщённых функций $D'(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})$ удовлетворяет (12) для $g(x, t)$, принадлежащих классу обобщённых функций $D'(\mathbb{R}_+^2)$. Здесь $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Данное исследование представляет двумерную обратную задачу линейной динамической упругости с памятью. Искомой величиной в поставленной задаче является ядро интегрального оператора, моделирующего явление памяти (или последействия), которое имеет место при распространении волновых процессов в вязкоупругих средах.

Задачи определения ядер памяти в интегро-дифференциальных уравнениях — направление в теории обратных задач, возникшее в конце прошлого столетия [1–7]. Подробный анализ

источников по данному направлению представлен в монографии [8], которая является одной из последних фундаментальных работ в области исследования обратных задач для сред с последствием. В ней представлены результаты исследования корректности ряда постановок одномерных и многомерных обратных динамических задач для гиперболических интегродифференциальных уравнений, возникающих при описании внутренних характеристик сред с последствием по измерениям волнового поля в доступных областях.

Многомерные обратные задачи являются наименее изученными. Их решение представляет как математический интерес, так и интерес с точки зрения приложений. Задачи по определению ядер, когда искомая функция зависит от двух и более переменных, рассмотрены в работах [9–19]. В [9] для решения обратных задач в ограниченной области применяется метод разделения переменных, с помощью которого задачи сводятся к системе интегральных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных функций, зависящих от временной переменной. В работах [10–15] отличительной особенностью исследований по определению ядер (имеющих специальный вид) является использование сосредоточенного источника возмущения волн и сведение исходной задачи к решению задач интегральной геометрии. Решениями обратных задач являются коэффициенты уравнения и пространственные части ядер, носитель которых сосредоточен в некоторой компактной области пространства. В работе [16] на основе метода шкал банаховых пространств получена локальная однозначная разрешимость задачи определения ядра $k(x, t)$ для уравнения вязкоупругости в классе функций, аналитических по переменной x и гладких по переменной t . Позже [17] с помощью этого же метода в комбинации с методом весовых норм была исследована глобальная однозначная разрешимость задачи определения $k(x, t)$.

В работах [18, 19] применялся асимптотический подход к решению двумерных задач определения ядер и коэффициентов в слабо горизонтально-неоднородных упругих средах с памятью. Из результатов по численному исследованию обратных задач для интегродифференциальных уравнений упругости можно отметить работы [20–23].

Новизна представленной работы заключается в применении принципа линеаризации к исследованию многомерной обратной задачи определения функции памяти для системы вязкоупругости. Теоретическая значимость исследования — получение необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости двумерной обратной задачи (9)–(12) и оценки устойчивости её решения.

2. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

Прямая задача (6)–(8) изучена в монографии [24]. Показано, что в такой постановке при $(\rho, \lambda, \mu) \in \Lambda$ функция $u_0(x, z, t) \equiv u_0(z, t)$. Доказаны теоремы существования и единственности решения прямой задачи для $u_0(z, t)$ в классе $C^2(D_T)$, $D_T = \{(y, t) : y \leq t \leq T - y\}$, $T > 0$ фиксировано, $y = \phi(z) := \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}$, $c(z) := \sqrt{\frac{\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)}}$.

Далее будем полагать функцию $u_0(z, t)$ известной, удовлетворяющей условиям достаточной гладкости в области D_T .

В задаче (9)–(12) перейдём от функции $u_1(x, z, t)$ к её образу Фурье $\tilde{u}_1(\nu, z, t) := F_x[u_1](\nu, z, t)$, причём $\text{supp } \tilde{u}_1(\nu, z, t) \subset [-\omega, \omega]$, $j = 1, 2$, где ω — фиксированное положительное число.

Будем считать, что $\tilde{h}_1(\nu, t) = F_x[h_1](\nu, t) \in \tilde{\Lambda}_1(\omega, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu, t) \in C_t^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ и для любого фиксированного $t \in [0, T]$ $\text{supp } \tilde{h}_1(\nu, t) \subset [-\omega, \omega]$. Соответственно, $h_1(x, t) \in \Lambda_1(\omega, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu, t) = F_x[h_1](\nu, t) \in \tilde{\Lambda}_1(\omega, T)$.

Обратная задача (9)–(12) в терминах функции $\tilde{u}_1$ переписывается в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_1(\nu, z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} \right) - \nu^2 \mu \tilde{u}_1 + \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right] d\tau, \quad (13)$$

$$\tilde{u}_1|_{t<0} \equiv 0, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} + \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial u_0(z, \tau)}{\partial z} d\tau \right) \Big|_{z=+0} = 0, \quad (15)$$

$$\tilde{u}_1^1(\nu, 0, t) = F_x[g](\nu, t) =: \tilde{g}(\nu, t). \quad (16)$$

Пусть

$$V_1(\nu, y, t) := \frac{\tilde{u}_1(\nu, \phi^{-1}(y), t)}{s(y)}, \quad V_0(y, t) := \frac{u_0(\phi^{-1}(y), t)}{s(y)}, \quad s(y) := \sqrt{\frac{c(+0)\rho(+0)}{c(\phi^{-1}(y))\rho(\phi^{-1}(y))}}.$$

Тогда (13)–(16) для $y > 0$, $t \in \mathbb{R}$ примут вид

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \tilde{q}(\nu, y)V_1 + \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \left[\frac{\partial^2 V_0(y, \tau)}{\partial y^2} + q(y)V_0(y, \tau) \right] d\tau, \quad (17)$$

$$V_1|_{t<0} \equiv 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial V_0(y, \tau)}{\partial y} d\tau \right) \Big|_{y=+0} = 0, \quad (19)$$

$$V_1|_{y=0} = \tilde{g}(\nu, t), \quad (20)$$

где

$$\tilde{q}(y, \nu) := q(y) - \nu^2 \frac{\mu(\phi^{-1}(y))}{\rho(\phi^{-1}(y))}.$$

Имеем [24]

$$\begin{aligned} V_0(y, t) &= \theta(t - y) [a(0) + v(y, t)], \quad a(0) = [(\lambda(+0) + 2\mu(+0))\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}, \\ \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial V_0(y, \tau)}{\partial y} d\tau &= \frac{\partial}{\partial y} \int_y^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) (a(0) + v(y, \tau)) d\tau \\ &= -a(0)\tilde{h}_1(\nu, t - y) + \int_y^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial v}{\partial y}(y, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial^2 V_0(y, \tau)}{\partial y^2} d\tau &= a(0)\tilde{h}_1'(\nu, t - y) + \tilde{h}_1(\nu, t - y) \frac{\partial v}{\partial y}(y, y) \\ &\quad + \int_y^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь и далее, к примеру, $\tilde{h}_1'$, $\tilde{g}''$ означает операцию однократного и двукратного дифференцирования по переменной t соответствующих функций.

С учётом (21), (22) задача (17)–(20) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \tilde{q}(y, \nu)V_1 + a(0)\tilde{h}_1'(\nu, t - y) + \tilde{h}_1(\nu, t - y) \frac{\partial v}{\partial y}(y, y) \\ &\quad + \int_y^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) p(y, \tau) d\tau, \quad y > 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} \Big|_{y=+0} = a(0)\tilde{h}_1(\nu, t),$$

$$V_1|_{y=0} = \tilde{g}(\nu, t),$$

$$V_1|_{t=y} = 0, \quad (23)$$

где

$$p(y, t) := \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y, t) + q(y) \left(a(0) + v(y, t) \right).$$

С помощью формулы Даламбера получаем

$$\begin{aligned} V_1(\nu, y, t) = & \frac{1}{2} (\tilde{g}(\nu, t-y) + \tilde{g}(\nu, t+y)) + \frac{1}{2} \int_{t-y}^{t+y} a(0) \tilde{h}_1(\nu, \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{t-y+\xi}^{t+y-\xi} \left\{ a(0) \tilde{h}'_1(\nu, \tau - \xi) + \tilde{h}_1(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) + \tilde{q}(\nu, \xi) V_1(\nu, \xi, \tau) \right. \\ & \left. + \int_\xi^\tau \tilde{h}_1(\nu, \tau - \eta) p(\xi, \eta) d\eta \right\} d\tau d\xi =: W[V_1, h_1, h'_1]. \end{aligned} \quad (24)$$

Переходя в равенстве (24) к пределу $t \rightarrow y + 0$ с учётом (23) и $\tilde{g}(\nu, 0) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} -\tilde{g}(\nu, 2y) = & \int_0^{2y} a(0) \tilde{h}_1(\nu, \tau) d\tau \\ & + \int_0^y \int_\xi^{2y-\xi} \left\{ a(0) \tilde{h}'_1(\nu, \tau - \xi) + \tilde{h}_1(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) + \tilde{q}(\nu, \xi) V_1(\nu, \xi, \tau) \right. \\ & \left. + \int_\xi^\tau \tilde{h}_1(\nu, \tau - \eta) p(\xi, \eta) d\eta \right\} d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (25)$$

Заменяя $2y$ на t и дифференцируя (25) по t , получаем

$$\begin{aligned} -\tilde{g}'(\nu, t) = & a(0) \tilde{h}_1(\nu, t) + \int_0^{t/2} \left\{ a(0) \tilde{h}'_1(\nu, t - 2\xi) + \tilde{h}_1(\nu, t - 2\xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) \right. \\ & \left. + \tilde{q}(\nu, \xi) V_1(\nu, \xi, t - \xi) + \int_\xi^{t-\xi} \tilde{h}_1(\nu, t - \xi - \tau) p(\xi, \tau) d\tau \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (26)$$

Дифференцируя по t (26) (предварительно сделав замену переменной во втором интеграле $t - 2\xi = \tau$), получаем уравнение для $\tilde{h}'_1(\nu, t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{h}'_1(\nu, t) = & -\frac{2}{3a(0)} \tilde{g}''(\nu, t) - \frac{2}{3a} \int_0^{t/2} \left\{ \tilde{h}_1(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) + \tilde{q}(\nu, \xi) \frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, \xi, t - \xi) \right. \\ & \left. + \tilde{h}_1(\nu, 0) p(\xi, t - \xi) + \int_\xi^{t-\xi} \tilde{h}'_1(\nu, t - \xi - \tau) p(\xi, \tau) d\tau \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (27)$$

Для замыкания системы (24), (27) необходимо добавить уравнение для $\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t)$:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} W[V_1, h_1, h'_1], \quad (28)$$

и уравнение для $\tilde{h}_1(\nu, t)$:

$$\tilde{h}_1(\nu, t) = \tilde{h}_1(\nu, 0) + \int_0^t \tilde{h}'_1(\nu, \tau) d\tau. \quad (29)$$

Таким образом, получаем замкнутую линейную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода (24), (27)–(29) в области D_T относительно $V_1(\nu, y, t)$, $\tilde{h}'_1(\nu, t)$, $\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t)$, $\tilde{h}_1(\nu, t)$.

Так как в данную систему входит неизвестная величина $\tilde{h}_1(\nu, 0)$, то её можно найти из уравнения (26) при $t = 0$:

$$\tilde{h}_1(\nu, 0) = -\frac{1}{a(0)} \tilde{g}'(\nu, 0).$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основными результатами исследования являются следующие теоремы однозначной глобальной разрешимости и устойчивости обратной задачи определения $\tilde{h}_1(\nu, t)$.

Теорема 1. Пусть ω , T — фиксированные положительные числа, $(\rho, \lambda, \mu) \in \Lambda$. Для существования и единственности решения обратной задачи (9)–(12) $h_1(x, t) \in \Lambda_1(\omega, T)$ необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{g}(\nu, t) \in C_t^2(\mathbb{R} \times [0, T])$, $\tilde{g}(\nu, 0) = 0$, и для любого фиксированного $t \in [0, T]$ $\text{supp } \tilde{g}(\nu, t) \subset [-\omega, \omega]$.

Доказательство. Обратная задача (9)–(12) эквивалентна системе интегральных уравнений (24), (27)–(29). Данная система является замкнутой линейной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными свободными членами и ядрами относительно неизвестных функций в области D_T при $\nu \in \mathbb{R}$. Идея доказательства существования единственного решения данной системы состоит в применении обобщённого принципа сжатых отображений. Запишем систему (24), (27)–(29) в виде операторного уравнения

$$\psi = B\psi, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \psi &= [\psi_1(\nu, y, t), \psi_2(\nu, t), \psi_3(\nu, y, t), \psi_4(\nu, t)] : \\ &= [V_1(\nu, y, t), \tilde{h}'_1(\nu, t), \frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t) - \frac{a(0)}{2} y \tilde{h}'_1(\nu, t - y), \tilde{h}_1(\nu, t)]. \end{aligned}$$

Оператор $B = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ определён на множестве функций $\psi \in C(\mathbb{R} \times D_T)$, где

$$\begin{aligned} B_1\psi &= \psi_{01}(\nu, y, t) + \int_0^y a(0) \psi_4(\nu, 2\xi + t - y) d\xi \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^y \int_{t-y+\xi}^{t+y-\xi} \left\{ a(0) \psi_2(\nu, \tau - \xi) + \psi_4(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) \right. \\ &\left. + \tilde{q}(\nu, \xi) \psi_1(\nu, \xi, \tau) + \int_\xi^\tau \psi_4(\nu, \tau - \eta) p(\xi, \eta) d\eta \right\} d\tau d\xi, \\ B_2\psi &= \psi_{02}(\nu, t) - \frac{2}{3a(0)} \int_0^{t/2} \left\{ \psi_4(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) + \tilde{q}(\nu, \xi) \frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, \xi, t - \xi) \right. \\ &\left. + \psi_4(\nu, 0) p(\xi, t - \xi) + \int_\xi^{t-\xi} \psi_2(\nu, t - \xi - \tau) p(\xi, \tau) d\tau \right\} d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3\psi &= \psi_{03}(\nu, y, t) + \int_0^y a(0)\psi_2(\nu, 2\xi + t - y)d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^y \left\{ \frac{a}{2}\psi_2(\nu, t + y - 2\xi) + (\psi_4(\nu, t + y - 2\xi) - \psi_4(t - y)) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{q}(\nu, \xi) (\psi_1(\nu, \xi, t + y - \xi) - \psi_1(\nu, \xi, t - y + \xi)) \right. \\
&\quad \left. + \int_\xi^{t+y-\xi} \psi_4(\nu, t + y - \xi - \eta)p(\xi, \eta)d\eta - \int_\xi^{t-y+\xi} \psi_4(\nu, t - y + \xi - \eta)p(\xi, \eta)d\eta \right\} d\xi,
\end{aligned}$$

$$B_4\psi = \psi_{04}(\nu) + 2 \int_0^{t/2} (t - 2\xi)\psi_2(\nu, 2\xi)d\xi,$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t) &= \psi_3(\nu, y, t) + \frac{a(0)}{2}y\psi_2(\nu, t - y), \\
\psi_{01}(\nu, y, t) &= \frac{1}{2}(\tilde{g}(\nu, t - y) + \tilde{g}(\nu, t + y)), \quad \psi_{02}(\nu, t) = -\frac{2}{3a}\tilde{g}''(\nu, t), \\
\psi_{03}(\nu, y, t) &= \frac{1}{2}(\tilde{g}'(\nu, t - y) + \tilde{g}'(\nu, t + y)), \quad \psi_{04}(\nu) = \tilde{h}_1(\nu, 0).
\end{aligned}$$

Покажем теперь, что некоторая степень n (n — натуральное число) линейного отображения $B\psi$ является сжатием. Положим

$$\|\psi\|(\nu) = \max \left\{ \max_{(y,t) \in D_T} |\psi_{1,3}(\nu, y, t)|, \max_{t \in [0, T]} |\psi_{2,4}(\nu, t)| \right\}.$$

Пусть $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ — две непрерывные вектор-функции в $\mathbb{R} \times D_T$, удовлетворяющие линейной системе интегральных уравнений (30). Обозначим

$$\Delta(y, t) = \{(\xi, \tau) : 0 \leq \xi \leq y, t - y + \xi \leq \tau \leq t + y - \xi\}, \quad \Sigma(y, t, \xi) = \{\tau : (\xi, \tau) \in \Delta(y, t)\}.$$

Тогда для $(\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T$ имеем (в оценках используем факт, что в уравнении (27) $t = 2y$)

$$\begin{aligned}
&|B_1\psi^{(1)} - B_1\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \\
&\leq \mu_1 \int_0^y \max \left\{ \max_{\tau \in \Sigma(y, t, \xi)} |\psi_1^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - \psi_1^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
&\leq \mu_1 \int_0^y \max \left\{ \max_{(\xi, \tau) \in D_T} |\psi_1^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - \psi_1^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, \max_{\xi \in [0, T/2]} |\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
&\leq \mu_1 y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,
\end{aligned}$$

далее

$$\begin{aligned}
&|B_2\psi^{(1)} - B_2\psi^{(2)}|(2y) \\
&\leq \mu_2 \int_0^y \max \left\{ \max_{\xi \in [0, T/2]} |\psi_3^{(1)}(\xi, T - \xi, \nu) - \psi_3^{(2)}(\xi, T - \xi, \nu)|, \max_{\xi \in [0, T/2]} |\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
&\leq \mu_2 y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |B_3\psi^{(1)} - B_3\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \\
& \leq \mu_3 \int_0^y \max \left\{ \max_{\tau \in \Sigma(y, t, \xi)} |\psi_1^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - \psi_1^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
& \leq \mu_3 y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,
\end{aligned}$$

$$|B_4\psi^{(1)} - B_4\psi^{(2)}|(2y) \leq \mu_4 \int_0^y \max_{\xi \in [0, T/2]} |\psi_2^{(1)}(2\xi) - \psi_2^{(2)}(2\xi)| d\xi \leq \mu_4 y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,$$

где μ_j — константы, зависящие от величин, входящих в C (теорема 2).

Полагая $M = \max\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$, получаем, что

$$\max_{1 \leq j \leq 4} |B_j\psi^{(1)} - B_j\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \leq My \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T.$$

Далее

$$\begin{aligned}
& |B_1^2\psi^{(1)} - B_1^2\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \\
& \leq \mu_1 \int_0^y \max \left\{ \max_{\xi \in \Sigma(y, t, \tau)} |B_1\psi^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - B_1\psi^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |B_{2,4}\psi^{(1)}(2\xi) - B_{2,4}\psi^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
& \leq \mu_1 M \int_0^y \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| d\xi \leq \mu_1 M \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \\
& |B_2^2\psi^{(1)} - B_2^2\psi^{(2)}|(2y) \\
& \leq \mu_2 \int_0^y \max \left\{ \max_{\tau \in [\xi, 2y-\xi]} |B_3\psi^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - B_3\psi^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |B_{2,4}\psi^{(1)}(2\xi) - B_{2,4}\psi^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
& \leq \mu_2 M \int_0^y \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| d\xi \leq \mu_2 M \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \\
& |B_3^2\psi^{(1)} - B_3^2\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \\
& \leq \mu_3 \int_0^y \max \left\{ \max_{\tau \in \Sigma(y, t, \xi)} |B_1\psi^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - B_1\psi^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |B_{2,4}\psi^{(1)}(2\xi) - B_{2,4}\psi^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
& \leq \mu_3 M \int_0^y \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| d\xi \leq \mu_3 M \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \\
& |B_4^2\psi^{(1)} - B_4^2\psi^{(2)}|(2y) \leq \mu_4 \int_0^y \max |B_2\psi^{(1)}(2\xi) - B_2\psi^{(2)}(2\xi)| d\xi \\
& \leq \mu_4 M \int_0^y \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| d\xi \leq \mu_4 M \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\max_{1 \leq j \leq 3} |B_j^2\psi^{(1)} - B_j^2\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \leq M^2 \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T,$$

и, вообще,

$$\max_{1 \leq j \leq 4} |B_j^n\psi^{(1)} - B_j^n\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \leq M^n \frac{y^n}{n!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T,$$

$$\|B^n\psi^{(1)} - B^n\psi^{(2)}\| \leq M^n \frac{\left(\frac{T}{2}\right)^n}{n!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|.$$

При любом фиксированном T число n можно выбрать настолько большим, что

$$M^n \frac{\left(\frac{T}{2}\right)^n}{n!} < 1.$$

Тогда отображение B^n является сжатием. Согласно обобщению принципа сжимающих отображений уравнение $B\psi = \psi$ имеет одно и только одно решение, принадлежащее $C(\mathbb{R} \times D_T)$. Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений. $\square$

Теорема 2. Пусть $h_1^{(1)}(x, t), h_1^{(2)}(x, t) \in \Lambda_1(\omega, T)$ — решения обратной задачи (9)–(12), отвечающие информации $g^{(1)}(x, t), g^{(2)}(x, t)$ соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 1 имеет место оценка устойчивости

$$\int_R \|h_1^{(1)} - h_1^{(2)}\|_{C[0, T]}^2 dx \leq C \int_{-\omega}^{\omega} \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|_{C^2[0, T]}^2 d\nu, \quad (31)$$

где C — некоторая константа, зависящая от величин ω, T и значений функций $\mu(z), \lambda(z), \rho(z)$.

Доказательство. Пусть $\psi^{(j)}$ — вектор-функции, которые являются решениями (30), то есть справедливы уравнения $\psi^{(j)} = B\psi^{(j)}$.

Переходя в этом выражении к разностям $\psi^{(1)} - \psi^{(2)}, \tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}$, из рассуждений, проведённых при доказательстве теоремы 1, получим оценку

$$\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|(\nu) \leq \alpha \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|_{C^2[0, T]}(\nu) + \beta \int_0^y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|(\nu, \xi) d\xi, \quad (32)$$

где постоянные α, β зависят от величин, входящих в C . Из неравенства (32) следует, что

$$\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|(\nu) \leq C \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|_{C^2[0, T]}(\nu).$$

Неравенство (31) вытекает из следующего свойства изометричности оператора преобразования Фурье F_x :

$$\int_{-\omega}^{\omega} |\tilde{h}_1^{(1)}(\nu, t) - \tilde{h}_1^{(2)}(\nu, t)|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}} |h_1^{(1)}(x, t) - h_1^{(2)}(x, t)|^2 dx.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости последовательности решений некоторого семейства задач к искомому решению. Пусть существует решение $h_1(x, t) \in C_t^1([0, \infty); L_2(\mathbb{R}))$, отвечающее информации $\tilde{g}(\nu, t)$.

Определим множество функций $\tilde{g}_\omega(\nu, t)$ по правилу

$$\tilde{g}_\omega(\nu, t) := \theta(\omega - |\nu|) \tilde{g}(\nu, t).$$

Выделим семейство обратных задач: определить функцию $h_1^\omega(x, t) = F_\nu^{-1}[\tilde{h}^\omega(\nu, t)]$ по информации $\tilde{g}_\omega(\nu, t)$.

Теорема 3. Данное семейство является регуляризованным, то есть:

- 1) для каждого $\omega > 0$ обратная задача корректна;
- 2) если данные таковы, что решение исходной (корректной) задачи существует, то при $\omega \rightarrow \infty$ последовательность решений семейства задач с этими данными стремится к решению исходной (некорректной) задачи.

Доказательство. Теоремы 1 и 2, доказанные ранее, утверждают о корректности обратной задачи. Теперь покажем, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}} |h_1^\omega(x, t) - h_1(x, t)|^2 dx = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}} |h_1^\omega(x, t) - h_1(x, t)|^2 dx &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_{-\omega}^{\omega} |\tilde{h}_1^\omega(\nu, t) - \tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu + \right. \\ &\left. \int_{-\infty}^{-\omega} |\tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu + \int_{\omega}^{+\infty} |\tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu \right) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_{-\infty}^{-\omega} |\tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu + \int_{\omega}^{+\infty} |\tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu \right) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым теорема 3 доказана. $\square$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВЦ РАН при поддержке Минобрнауки России (соглашение 075-02-2025-1633). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lorenzi A., Sinestrari E. An inverse problem in the theory of materials with memory I // Nonlinear Anal. 1988. V. 12. P. 1217–1335.
2. Grasselli M., Kabanikhin S.I., Lorentsi A. An inverse problem for an integro-differential equation // Sib. Mat. J. 1992. V. 33, N 3. P. 58–68.
3. Дурдиев Д.К. Обратная задача для трёхмерного волнового уравнения в среде с памятью // Математический анализ и дискретная математика. 1989. С. 19–27.
4. Cavaterra C., Grasselli M. Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type // Math. Models Methods Appl. Sci. 1994. V. 4, N 6. P. 807–842.
5. Bukhgeym A.L. Inverse problems of memory reconstruction // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N 3. P. 193–206.
6. Дурдиев Д.К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 574–582.
7. Bukhgeim A.L., Dyatlov G.V. Inverse problems for equations with memory // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 1, N 2. P. 1–17.
8. Durdiev D.K., Totieva Z.D. Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations. Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2023.
9. Janno J., Von Wolfersdorf L. An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity // Inverse Probl. 2001. V. 17. P. 13–24.
10. Lorenzi A., Messina F., Romanov V.G. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // Appl. Anal. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
11. Romanov V.G., Yamamoto M. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Appl. Anal. 2010. V. 89, N 3. P. 377–390.

12. *Lorenzi A., Romanov V.G.* Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // *Inverse Probl. Imaging*. 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.
13. *Романов В.Г.* Двумерная обратная задача для уравнения вязкоупругости // *Сиб. матем. журн.* 2012. Т. 53, № 6. С. 1401–1412.
14. *Романов В.Г.* Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
15. *Romanov V.G.* Inverse problems for differential equations with memory // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2014. V. 2, N 4. P. 51–80.
16. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // *Владикавк. матем. журн.* 2015. Т. 17, № 4. С. 18–43.
17. *Totieva Z.D.* A global solvability of a two-dimensional kernel determination problem for a viscoelasticity equation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2022. V. 45, N 12. P. 7555–7575.
18. *Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р.* Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // *Дальневост. матем. журн.* 2013. Т. 13, № 2. С. 209–221.
19. *Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.* Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости со слабо горизонтальной неоднородностью // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2022. Т. 25, № 1. С. 14–38.
20. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2001. Т. 4, № 3. С. 259–269.
21. *Durdiev U.D.* Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2020. V. 17. С. 179–189.
22. *Bozorov Z.R.* Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2020. V. 8, N 2. С. 4–16.
23. *Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolic V., Rajendra L. M., Wohlmuth B.* Determining Kernels In Linear Viscoelasticity // *J. Comput. Phys.* 2022. V. 464. Article 111331.
24. *Яхно В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1988.

UDC 517.958

TWO-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM FOR A VISCOELASTICITY EQUATION IN A VERTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

© 2025 Zh. D. Totieva^{1,2}

¹*Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, 362027 Russia*

²*North Caucasus Center for Mathematical Research
of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
selo Mikhailovskoe, North Ossetia–Alania, 363110 Russia*

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

Received 11.08.2023, revised 31.10.2024, accepted 26.03.2025

Abstract. The two-dimensional inverse problem of determining the kernel of an elasticity equation of memory type is studied. It is assumed that the coefficients of the equations depend on only one spatial variable. Applying the linearization principle, the inverse problem is reduced to an equivalent linear system of integral equations. The generalized principle of compressed maps is applied to the latter in the space of continuous functions. The theorem of unique solvability is proved and an estimate of the stability of the solution to the inverse problem is obtained.

Keywords: inverse problem, integro-differential equation, viscoelasticity, stability, delta function, kernel.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.106

REFERENCES

1. A. Lorenzi and E. Sinestrari, “An inverse problem in the theory of materials with memory I,” *Nonlinear Anal.* **12**, 1217–1335 (1988).
2. M. Grasselli, S. I. Kabanikhin, and A. Lorentsi, “An inverse problem for an integro-differential equation,” *Sib. Math. J.* **33** (3), 58–68 (1992).
3. D. K. Durdiev, “Inverse problem for three-dimensional wave equation in a medium with memory,” in *Mathematical Analysis and Discrete Mathematics* (1989), pp. 19–27 [in Russian].
4. C. Cavaterra and M. Grasselli, “Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type,” *Math. Models Methods Appl. Sci.* **4** (6), 807–842 (1994).
5. A. L. Bukhgeym, “Inverse problems of memory reconstruction,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **1** (3), 193–206 (1993).
6. D. K. Durdiev, “A multidimensional inverse problem for an equation with memory,” *Sib. Math. J.* **35** (3), 514–521 (1994).
7. A. L. Bukhgeim and G. V. Dyatlov, “Inverse problems for equations with memory,” *SIAM J. Math. Anal.* **1** (2), 1–17 (1998).
8. D. K. Durdiev and Z. D. Totieva, *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations* (Springer Nature, Singapore, 2023).
9. J. Janno and L. Von Wolfersdorf, “An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity,” *Inverse Probl.* **17**, 13–24 (2001).

10. A. Lorenzi, F. Messina, and V. G. Romanov, "Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system," *Appl. Anal.* **86** (11), 1375–1395 (2007).
11. V. G. Romanov and M. Yamamoto, "Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement," *Appl. Anal.* **89** (3), 377–390 (2010).
12. A. Lorenzi and V. G. Romanov, "Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system," *Inverse Probl. Imaging* **5** (2), 431–464 (2011).
13. V. G. Romanov, "A two-dimensional inverse problem for the viscoelasticity equation," *Sib. Math. J.* **53** (6), 1128–1138 (2012).
14. V. G. Romanov, "Stability estimates for the solution to the problem of determining the kernel of a viscoelastic equation," *J. Appl. Ind. Math.* **6** (3), 360–370 (2012).
15. V. G. Romanov, "Inverse problems for differential equations with memory," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **2** (4), 51–80 (2014).
16. D. K. Durdiev and Zh. D. Totieva, "The problem of determining the multidimensional kernel of a viscoelasticity equation," *Vladikavkaz. Mat. Zh.* **17** (4), 18–43 (2015) [in Russian].
17. Z. D. Totieva, "A global solvability of a two-dimensional kernel determination problem for a viscoelasticity equation," *Math. Methods Appl. Sci.* **45** (12), 7555–7575 (2022).
18. D. K. Durdiev and Z. R. Bozorov, "The problem of determining the kernel of the integro-differential wave equation with weakly horizontal homogeneity," *Dal'nevostochn. Mat. Zh.* **13** (2), 209–221 (2013) [in Russian].
19. D. K. Durdiev and J. Sh. Safarov, "Problem of determining the two-dimensional kernel of the viscoelasticity equation with a weakly horizontal inhomogeneity," *J. Appl. Ind. Math.* **16** (1), 22–44 (2022).
20. A. L. Karchevskii and A. G. Fat'yanov, "Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system with aftereffect for a vertically inhomogeneous medium," *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* **4** (3), 259–269 (2001) [in Russian].
21. U. D. Durdiev, "Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory," *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **17**, 179–189 (2020).
22. Z. R. Bozorov, "Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **8** (2), 4–16 (2020).
23. B. Kaltenbacher, U. Khristenko, V. Nikolic, L. M. Rajendra, and B. Wohlmuth, "Determining kernels in linear viscoelasticity," *J. Comput. Phys.* **464**, 111331 (2022).
24. V. G. Yakhno, *Inverse Problems for Differential Equations of Elasticity* (Nauka, Novosibirsk, 1988) [in Russian].