УДК 517.958

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

© 2025 В. Г. Романов[1a], Т. В. Бугуева[1,2b]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,
[2]*Новосибирский государственный университет,*
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]romanov@math.nsc.ru, [b]bugueva@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 07.03.2025 г.; после доработки 06.06.2025 г.;
принята к публикации 06.06.2025 г.

Рассматривается обратная задача определения двух неизвестных функций $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$, входящих в коэффициент поглощения $\sigma(x,u) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)u$ в уравнении электродинамики. Получена априорная оценка решения прямой задачи, доказаны теоремы существования и единственности решений прямой и обратной задач.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, электродинамика, обратная задача, локальное существование.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.205

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Ниже будут рассмотрены две задачи: прямая и обратная.

Прямая задача. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{aligned} &u_{tt} + \sigma(x,u)u_t - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t \in (0,T], \\ &u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = -A, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

в которых T и A — заданные положительные числа, $\sigma(x,u) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)u$, а $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ — некоторые известные гладкие функции.

Уравнение (1) возникает при описания электромагнитных волн распространяющихся вдоль оси x в случае, когда сила тока нелинейно зависит от электрического напряжения (см. приложение).

Обратная задача. Пусть $\sigma(x,u) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)u$. Обозначим через $u_m(x,t)$ — решение прямой задачи, в которой роль числа A играет играет $A_m > 0$, $m = 1, 2$. Требуется найти функции $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ на отрезке $[0, T/2]$ по функциям

$$h_m(t) = u_m(0,t), \quad t \in [0,T], \quad m = 1, 2. \tag{2}$$

Насколько нам известно, обе постановки задач являются новыми, ранее они никем не рассматривались. В разд. 2 мы изучаем прямую задачу, получаем для её решения априорную оценку, затем доказываем существование её единственного решения. В разд. 3 проводится анализ обратной задачи, строится система нелинейных интегральных уравнений задачи, устанавливается теорема существования и единственности её локального решения в области

$\{(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant T_0 - x\}$ при достаточно малом $T_0 \in (0,T)$. При этом функции $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ находятся для $x \in [0, T_0/2]$. Конечно, можно было бы доказать теорему единственности решения обратной задачи на всём интервале $[0, T/2]$, но мы не стали этого делать в силу громоздкости системы уравнений и неизбежного из-за этого увеличении объёма статьи.

Обратные задачи об определении коэффициентов в нелинейных гиперболических уравнениях или системах интенсивно изучаются в последние годы (см. обзор ниже).

В работе [1] на лоренцевом многообразии рассмотрены нелинейные обратные задачи для волнового уравнения $\square_g u(x) + H(x, u(x)) = f(x)$ с оператором Лапласа—Бельтрами. Показано, что в заданном пространстве-времени (M, g) заданное отображение определяет некоторые коэффициенты разложения нелинейности H в ряд Тейлора по u. В [2] для полулинейного волнового уравнения $\square_g u + w(x, u, \nabla_g u) = 0$ на лоренцевых многообразиях изучена обратная задача определения фоновой лоренцевой метрики. В [3] рассмотрена обратная краевая задача для полулинейного волнового уравнения $\square u + H(x, u(x)) = 0$ на зависящем от времени лоренцевом многообразии $\mathcal{M}$ с времениподобной границей, в предположении, что $H(x,z) \sim \sum\limits_{k=2}^{\infty} h_k(x) z^k$, $h_k \in C^\infty(\mathcal{M})$. Установлено, что зависящие от времени коэффициенты при нелинейных членах могут быть восстановлены на основе отображения Неймана—Дирихле. В работе [4] изучена обратная задача восстановления нелинейности $f(x,u)$ в уравнении $\square u + f(x,u) = 0$. Показано, что можно восстановить нечётную по u функцию $f(x,u)$, а также, что можно восстановить функцию $\alpha(x)$, когда $f(x,u) = \alpha(x) u^{2m}$. В [5] рассмотрена геометрическая нелинейная обратная задача восстановления эрмитовой связи A «источник-решение» уравнения $\square_A u + \kappa |u|^2 u = f$, где $\kappa \neq 0$, $\square_A$ — волновой оператор связи в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1+3}$. В работе [6] показано, что оператор рассеяния для волновых уравнений вида $\square u + f(u) = 0$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f \sim u^5$, определяет функцию f. В [7] исследована обратная задача для уравнения $\square u + a u^m = 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, где $m \geqslant 2$ — целое число. Найдена оценка устойчивости по Гёльдеру для восстановления неизвестного потенциала $a(x,t)$ по отображению Дирихле—Неймана. В [8] в двумерном и трёхмерном пространствах рассмотрена обратная задача восстановления функции $\alpha(x) \geqslant 0$, $\alpha \in C_0^\infty$, входящей в уравнение $\square u + \alpha(x)|u|^2 u = 0$. Показано, что с помощью преобразования Радона можно восстановить неизвестный коэффициент. В [9] для нелинейного дифференциального уравнения $\square u = q(x) u^{\gamma+1}$, $\gamma > 0$, рассмотрена обратная задача об определении коэффициента $q(x)$. Предполагается, что искомый коэффициент представляет собой финитную в $\mathbb{R}^3$ функцию. Показано, что решения соответствующих прямых задач ограничены в некоторой окрестности фронта волны, найдено асимптотическое разложение решения в этой окрестности. Доказана теорема об однозначности решения обратной задачи. В работе [10] рассмотрена одномерная обратная задача определения коэффициента при степенной градиентной нелинейности в уравнении $\square u = q(x)(u_x)^m$, m — вещественное число, $m > 1$. Для обратной задачи установлена теорема о локальном существовании её решения и найдена оценка устойчивости решения.

В [11] исследуется вопрос о сингулярном возмущении для квазилинейных гиперболических систем в ограниченной области R^3, зависящий от малого параметра, оценивается скорость сходимости равномерно устойчивых решений полной системы к решению редуцированной системы при стремлении параметра к нулю. Затем этот результат применяется для изучения сходимости полных уравнений Максвелла к квазистационарным. В работе [12] изучаются основные свойства уравнений Максвелла для нелинейных неоднородных сред. Используя классическое представление нелинейной оптики для нелинейной поляризации в виде степенного ряда, показано, что решение системы уравнений существует и является единственным в соответствующем пространстве, если ток возбуждения не слишком велик. В [13] рассматриваются нелинейные уравнения Максвелла с мгновенной нелинейностью, предложена эффективная численная аппроксимация высокочастотных импульсов распространяющихся в нелинейных дисперсионных оптических средах. Для большого класса полулинейных систем описаны решения в терминах профилей. Эти профили являются решением сингулярного уравнения, включающего ещё одну переменную, описывающую фазу решения. В [14] с помощью вариационных методов рассматривается класс систем Клейна—Гордона—Максвелла с типом вогнуто–выпуклой нелинейности. Неизвестными в системе являются поле u, связанное с частицей, и электрический потенциал ϕ. Наличие нелинейного члена моделирует взаимодействие между многими частицами или внешние нелинейные возмущения. Исследован вопрос существования решения в зависимости от параметра, входящего в уравнение. В [15] излагается теория локальной корректности для квазилинейных уравнений Максвелла с поглощающими граничными условиями в H^m для $m \geqslant 3$. Уравнения Максвелла оснащены мгновенными нелинейными материальными законами, приводящими к квазилинейной симметричной гиперболической системе первого порядка. Рассматриваются как линейные, так и нелинейные граничные условия поглощения. Показано существование и единственность локального решения, доказана непрерывная зависимость от данных. В случае нелинейных граничных условий доказательство основано на априорных оценках и теории регулярности для соответствующей линейной задачи, которая рассматривается в работе. В [16] рассматривается абстрактная задача Коши для системы Максвелла, моделирующая электромагнитные поля при наличии границы раздела между оптическими средами. Электрическая поляризация, как правило, происходит с задержкой во времени и нелинейно, превращая макроскопические уравнения Максвелла в систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. В работе в рамках эволюционных уравнений доказывается корректность в функциональных пространствах, экспоненциально взвешенных во времени и имеющих различную пространственную регулярность. В работе [17] рассматривается гиперболическое уравнение с переменной главной частью и нелинейностью в младшем члене. Предполагается, что коэффициенты уравнения являются гладкими функциями точки трёхмерного пространства и постоянны вне некоторой компактной области. Из внешности этой области на неоднородность падает плоская волна с направлением ℓ. Решение соответствующей задачи Коши для исходного уравнения измеряется в точках границы области для временного интервала, включающего в себя момент прихода волны в эти точки. Предполагается, что единичный вектор ℓ может пробегать последовательно все возможные значения. На основе этой информации о решениях уравнения изучается обратная задача об определении коэффициента при нелинейности. Показывается, что решение обратной задачи сводится к некоторой задаче интегральной геометрии. Эта задача изучена и на её основе, установлена оценка устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи. В работе [18] для гиперболического уравнения второго порядка, содержащего два нелинейных члена, изучается обратная задача заключающаяся о определении коэффициентов при нелинейностях. Рассматривается задача Коши с источником, сосредоточенным в точке $\mathbf{y}$. Эта точка является параметром задачи и пробегает последовательно некоторую сферическую поверхность S. Предполагается, что искомые коэффициенты отличны от нуля только в области лежащей внутри S. Задаётся след решения задачи Коши на S для всевозможных значений $\mathbf{y}$ и для моментов времени близких к приходу волны от источника в точки поверхности S. Показывается, что задание такой информации о решении задачи Коши позволяет свести рассматриваемую обратную задачу к двум последовательно решаемым задачам интегральной геометрии. Для этих задач найдены оценки устойчивости решений.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Так как скорость распространения волн для уравнения (1) равна 1, то решение задачи (1) удовлетворяет условию $u(x,t) = 0$, $t \leqslant x$. Обозначим $G_T = \{(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant T - x\}$.

Введём функции

$$v(x,t) = u_t(x,t) + u_x(x,t), \quad w(x,t) = u_t(x,t) - u_x(x,t),$$
$$\varphi(x,t) = u_t(x,t) = \frac{v(x,t) + w(x,t)}{2}.$$

Тогда в области G_T выполняются соотношения

$$\begin{aligned} v_t - v_x + \sigma(x,u)\varphi = 0, \quad v|_{t=x} = 0, \\ w_t + w_x + \sigma(x,u)\varphi = 0, \quad w(0,t) = v(0,t) + 2A. \end{aligned} \tag{3}$$

Интегрируя первое уравнение (3) на плоскости переменных ξ, τ вдоль отрезка прямой линии $\tau + \xi = t + x$ от точки (x,t) до точки $((x+t)/2, (x+t)/2)$ и учитывая граничное условие при $\tau = \xi$, находим уравнение для функции $v(x,t)$:

$$v(x,t) = -\int\limits_{(x+t)/2}^{t} \sigma(\xi, u(\xi,\tau))\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t+x-\tau}\, d\tau, \quad (x,t) \in G_T. \tag{4}$$

Аналогично, интегрируя второе уравнение (3) вдоль отрезка прямой линии $\tau - \xi = t - x$ от точки $(0, t-x)$ до точки (x,t) и учитывая граничное условие при $\xi = 0$, находим уравнение для функции $w(x,t)$:

$$w(x,t) = v(0,t-x) + 2A - \int\limits_{t-x}^{t} \sigma(\xi, u(\xi,\tau))\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\, d\tau, \quad (x,t) \in G_T.$$

Исключим из этого уравнения член $v(0,t-x)$ с помощью уравнения (4). Тогда получим новое уравнение для $w(x,t)$:

$$\begin{aligned} w(x,t) = 2A - \int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \sigma(\xi, u(\xi,\tau))\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\, d\tau \\ - \int\limits_{t-x}^{t} \sigma(\xi, u(\xi,\tau))\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\, d\tau, \quad (x,t) \in G_T. \end{aligned} \tag{5}$$

Складывая уравнения (4) и (5) и деля результат на 2, получаем уравнение для функции $\varphi(x,t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x,t) = A - \frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \sigma(\xi, u(\xi,\tau))\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\, d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t} \sigma(\xi, u(\xi,\tau))\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\, d\tau \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t} \sigma(\xi, u(\xi,\tau))\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=t+x-\tau}\, d\tau, \quad (x,t) \in G_T. \end{aligned} \tag{6}$$

Добавим к этому уравнению уравнение для функции $u(x,t)$. Оно имеет вид

$$u(x,t) = \int\limits_{x}^{t} \varphi(x,\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in G_T. \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) образуют замкнутую систему уравнений для определения функций $\varphi(x,t)$ и $u(x,t)$ в области G_T. Используем теперь, что $\sigma(x,u) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)u$.

Для системы (6), (7) имеет место следующая лемма.

Лемма (Априорная оценка решения). *Пусть функции* $\sigma_0(x)$ *и* $\sigma_1(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{gathered}\sigma_0 \in C([0,T/2], \quad \sigma_1 \in C([0,T/2], \quad 0 < \eta_{00} \leqslant \sigma_0(x) \leqslant \eta_0, \quad |\sigma_1(x)| \leqslant \eta_1, \quad x \in [0,T/2], \\ \sigma_0(x) - |\sigma_1(x)| \geqslant 0, \quad x \in [0,T/2],\end{gathered} \tag{8}$$

в которых η_{00}, η_0 *и* η_1 *— некоторые положительные числа. Пусть, кроме того, выполнено условие*

$$A\Big(e^{(\eta_0+\eta_1)T} - 1\Big) \leqslant \eta_0 + \eta_1. \tag{9}$$

Тогда, если в области G_T *существует непрерывное решение уравнений* (6), (7), *то для него выполняются оценки*

$$\begin{gathered}|u(x,t)| \leqslant 1, \\ |u_t(x,t)| = |\varphi(x,t)| \leqslant A_0, \quad (x,t) \in G_T,\end{gathered} \tag{10}$$

в которых постоянная A_0 *определена равенством*

$$A_0 := A\exp\{(\eta_0+\eta_1)T\}.$$

Доказательство. Введём множества

$$\Sigma(t) = \{x|\, x \in [0, T/2 - |t - T/2|]\}, \quad t \in [0,T]$$

и функцию

$$\varphi^*(t) := \max_{x\in\Sigma(t)} |\varphi(x,t)|.$$

Из уравнений (6), (7) следуют неравенства

$$|u(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau =: J(t),$$

$$\varphi^*(t) \leqslant A + \int\limits_0^t \Bigg[\eta_0 + \eta_1 \int\limits_0^\tau \varphi^*(\tau_1)\, d\tau_1\Bigg]\varphi^*(\tau)\, d\tau \leqslant A + \eta_0 J(t) + \eta_1 J^2(t), \quad t \in [0,T].$$

Предположим, что $J(T) \leqslant 1$. Тогда

$$\begin{gathered}\varphi^*(t) \leqslant A + (\eta_0+\eta_1)J(t), \\ J'(t) = \varphi^*(t) \leqslant A + (\eta_0+\eta_1)J(t), \quad t \in [0,T], \quad J(0) = 0.\end{gathered}$$

Интегрируя неравенство для $J(t)$, получаем оценку

$$J(t) \leqslant \frac{A}{\eta_0+\eta_1}\left(e^{(\eta_0+\eta_1)t} - 1\right), \quad t \in [0,T].$$

Неравенство $J(T) \leqslant 1$ выполняется при условии

$$A\left(e^{(\eta_0+\eta_1)T} - 1\right) \leqslant \eta_0 + \eta_1,$$

которое совпадает с условием (9) леммы. Следовательно, сделанное выше предположение выполнено и полученное неравенство для $J(t)$ верно. Тогда для $\varphi^*(t)$ имеет место оценка

$$\varphi^*(t) \leqslant A\exp\big\{(\eta_0+\eta_1)t\big\} \leqslant A\exp\big\{(\eta_0+\eta_1)T\big\} = A_0, \quad t \in [0,T],$$

из которой вытекает вторая оценка (10). Первая оценка (10) является следствием неравенства $|u(x,t)| \leqslant J(T) \leqslant 1$. □

Замечание 1. Условие (9) можно рассматривать как условие на выбор числа A. Это условие заведомо выполняется, если постоянная A достаточно мала. При этом функция $u(x,t)$ не является равномерно малой в силу нелинейности задачи.

Замечание 2. Из условий (8) и оценки $|u(x,t)| \leqslant 1$ следует, что

$$0 \leqslant \sigma_0(x) - |\sigma_1(x)| \leqslant \sigma_0(x) - |\sigma_1(x)u| \leqslant \sigma(x,u) \leqslant \eta_0 + \eta_1, \quad x \in [0,T]. \tag{11}$$

Теорема 1 (единственности и существования решения). *Пусть функции $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ удовлетворяют условиям леммы. Тогда в области G_T существует единственное непрерывно-дифференцируемое решение прямой задачи. Кроме того, имеет место равенство*

$$\varphi(x,x) =: \alpha_1(x) = A\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x \sigma_0(\xi)\,d\xi\right), \quad x \in [0.T/2]. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим для системы уравнений (6) и (7) последовательные приближения

$$\varphi_0(x,t) = A, \quad (x,t) \in G_T,$$

$$\varphi_n(x,t) = A - \frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \sigma(\xi, u_{n-1}(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t} \sigma(\xi, u_{n-1}(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t} \sigma(\xi, u_{n-1}(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau,$$
$$n = 1,2,\ldots, \quad (x,t) \in G_T, \tag{13}$$

$$u_n(x,t) = \int\limits_x^t \varphi_n(x,\tau)\,d\tau, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,t) \in G_T. \tag{14}$$

Докажем, что все функции $u_n(x,t)$, $\varphi_n(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} |u_n(x,t) \leqslant 1, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,t) \in G_T, \\ |\varphi_n(x,t) \leqslant A\exp\big\{(\eta_0+\eta_1)t\big\} \leqslant A_0, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,t) \in G_T, \end{gathered} \tag{15}$$

аналогичным оценкам (10).

При $n = 0$ второе неравенство (15) очевидно:

$$|\varphi_0(x,t)| \leqslant A \leqslant A\exp\big\{(\eta_0+\eta_1)t\big\} \leqslant A_0, \quad (x,t) \in G_T.$$

Используя его и неравенство (9), для функции $u_0(x,t)$ получаем оценку

$$|u_0(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t |\varphi_0(x,\tau)|\,d\tau \leqslant \int\limits_0^t A\exp\big\{(\eta_0+\eta_1)\tau\big\}\,d\tau$$
$$= \frac{1}{\eta_0+\eta_1}A\big[\exp\big\{(\eta_0+\eta_1)t\big\} - 1\big] \leqslant \frac{\eta_0+\eta_1}{\eta_0+\eta_1} = 1, \quad (x,t) \in G_T.$$

Оценим функции $u_1(x,t)$, $\varphi_1(x,t)$. Из формулы (13), используя неравенство (11), находим

$$|\varphi_1(x,t)| \leqslant A + (\eta_0+\eta_1)\int\limits_0^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\varphi_0(\xi,\tau)|\,d\tau$$
$$\leqslant A + (\eta_0+\eta_1)A\int\limits_0^t \exp\big\{(\eta_0+\eta_1)\tau\big\}\,d\tau = A\exp\big\{(\eta_0+\eta_1)t\big\} \leqslant A_0, \quad (x,t)\in G_T.$$

Из формулы (14) следует первое неравенство (15) при $n=1$:

$$|u_1(x,t)| \leqslant \int\limits_x^t |\varphi_1(x,\tau)|\,d\tau \leqslant A\int\limits_0^t \exp\big\{(\eta_0+\eta_1)\tau\big\}\,d\tau = \frac{1}{\eta_0+\eta_1}A\big[\exp\big\{(\eta_0+\eta_1)t\big\}-1\big] \leqslant 1.$$

Используя для последующих приближений подобные вычисления, убеждаемся в справедливости неравенств (15) при любом n.

Докажем сходимость последовательных приближений. Введём разности

$$\overline{u}_n = u_{n+1}-u_n, \quad \overline{\varphi}_n = \varphi_{n+1}-\varphi_n, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

Используя уравнения (13), (14), находим соотношения

$$\overline{\varphi}_0(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} \sigma(\xi,u_0(\xi,\tau))\varphi_0(\xi,\tau)|_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t} \sigma(\xi,u_0(\xi,\tau))\varphi_0(\xi,\tau)|_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t} \sigma(\xi,u_0(\xi,\tau))\varphi_0(\xi,\tau)|_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau, \quad (x,t)\in G_T, \quad (16)$$

$$\overline{\varphi}_n(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} [\sigma(\xi,u_n(\xi,\tau))\varphi_n(\xi,\tau) - \sigma(\xi,u_{n-1}(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)]|_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t} [\sigma(\xi,u_n(\xi,\tau))\varphi_n(\xi,\tau) - \sigma(\xi,u_{n-1}(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)]|_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t} [\sigma(\xi,u_n(\xi,\tau))\varphi_n(\xi,\tau) - \sigma(\xi,u_{n-1}(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)]|_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau,$$
$$n=1,2,\ldots, \quad (x,t)\in G_T, \quad (17)$$

$$\overline{u}_n(x,t) = \int\limits_x^t \overline{\varphi}_n(x,\tau)\,d\tau, \quad n=0,1,2,\ldots \quad (x,t)\in G_T. \quad (18)$$

Из уравнений (16), (18) получаем, что

$$|\overline{\varphi}_0(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} \sigma(\xi,u_0(\xi,\tau))|\varphi_0(\xi,\tau)|\,d\tau \leqslant \int\limits_0^t (\eta_0+\eta_1)A_0\,d\tau = (\eta_0+\eta_1)A_0\frac{t}{1!},$$
$$|\overline{u}_0(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t |\max_{\xi\in\Sigma(t)}\varphi_0(\xi,\tau)|\,d\tau \leqslant (\eta_0+\eta_1)A_0T\frac{t}{1!}, \quad (x,t)\in G_T. \tag{19}$$

Чтобы оценить $|\overline{\varphi}_n(x,t)|$ для $n=1,2,\dots$, преобразуем равенство (17). Для этого запишем разность $\sigma(\xi,u_n(\xi,\tau))\varphi_n(\xi,\tau)-\sigma(\xi,u_{n-1}(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)$ сначала в виде

$$\sigma(\xi,u_n(\xi,\tau))\varphi_n(\xi,\tau)-\sigma(\xi,u_{n-1}(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)$$
$$= [\sigma(\xi,u_n(\xi,\tau))-\sigma(\xi,u_{n-1}(\xi,\tau))]\varphi_n(\xi,\tau)+\sigma(\xi,u_{n-1}(\xi,\tau))\overline{\varphi}_{n-1}(\xi,\tau),$$

а затем, используя представление $\sigma(x,u)=\sigma_0(x)+\sigma_1(x)u$, запишем множитель, стоящий перед $\varphi_n(\xi,\tau)$, в виде

$$\sigma(\xi,u_n(\xi,\tau))-\sigma(\xi,u_{n-1}(\xi,\tau))=\sigma_1(x)\overline{u}_{n-1}(\xi,\tau).$$

Так как

$$\sigma(\xi,u)\leqslant\eta_0+\eta_1, \quad |\sigma_1(\xi)|\leqslant\eta_1, \quad |\varphi_n(x,t)|\leqslant A_0,$$

то

$$|\sigma(\xi,u_n(\xi,\tau))\varphi_n(\xi,\tau)-\sigma(\xi,u_{n-1}(\xi,\tau))\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|\leqslant|\overline{u}_{n-1}(\xi,\tau)|A_0\eta_1+|\overline{\varphi}_{n-1}(\xi,\tau)|(\eta_0+\eta_1).$$

Поэтому из равенства (17) находим, что

$$|\overline{\varphi}_n(x,t)|\leqslant\int\limits_0^t\big[A_0\eta_1\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{u}_{n-1}(\xi,\tau)|+(\eta_0+\eta_1)\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{\varphi}_{n-1}(\xi,\tau)|\big]\,d\tau,$$
$$n=1,2,\dots,\quad (x,t)\in G_T.$$

Используя эту формулу и неравенства (18), (19), оценим функции $\overline{\varphi}_1(x,t)$, $\overline{u}_1(x,t)$:

$$|\overline{\varphi}_1(x,t)|\leqslant\int\limits_0^t\big[A_0\eta_1\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{u}_0(\xi,\tau)|+(\eta_0+\eta_1)\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{\varphi}_0(\xi,\tau)|\big]\,d\tau$$
$$\leqslant\int\limits_0^t\left[A_0\eta_1(\eta_0+\eta_1)A_0T\frac{\tau}{1!}+(\eta_0+\eta_1)A_0\frac{\tau}{1!}\right]d\tau=(\eta_0+\eta_1)A_0\big[\eta_1A_0T+1\big]\frac{t^2}{2!}=:B\frac{t^2}{2!},\quad (x,t)\in G_T,$$

$$|\overline{u}_1(x,t)|\leqslant\int\limits_x^t\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{\varphi}_1(x,\tau)|\,d\tau\leqslant BT\frac{t^2}{2!},\quad (x,t)\in G_T.$$

С помощью этих формул оценим последующее приближение. Проводя вычисления, получаем

$$|\overline{\varphi}_2(x,t)|\leqslant\int\limits_0^t\big[A_0\eta_1\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{u}_1(\xi,\tau)|+(\eta_0+\eta_1)\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{\varphi}_1(\xi,\tau)|\big]\,d\tau$$
$$\leqslant\int\limits_0^t\left[A_0\eta_1BT\frac{\tau^2}{2!}+(\eta_0+\eta_1)B\frac{\tau^2}{2!}\right]d\tau=B\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)\frac{t^3}{3!},$$

$$|\overline{u}_2(x,t)| \leqslant \int\limits_x^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_2(x,\tau)|\,d\tau \leqslant TB\big(TA_0\eta_1+\eta_0+\eta_1\big)\frac{t^3}{3!}, \quad (x,t)\in G_T,$$

$$|\overline{\varphi}_3(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \big[A_0\eta_1 \max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{u}_2(\xi,\tau)| + (\eta_0+\eta_1)\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{\varphi}_2(\xi,\tau)|\big]\,d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \left[A_0\eta_1 TB\big(TA_0\eta_1+\eta_0+\eta_1\big)\frac{\tau^3}{3!}+(\eta_0+\eta_1)B(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1)\frac{\tau^3}{3!}\right]d\tau = B\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^2\frac{t^4}{4!},$$

$$|\overline{u}_3(x,t)| \leqslant \int\limits_x^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_3(x,\tau)|\,d\tau \leqslant TB\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^2\frac{t^4}{4!}, \quad (x,t)\in G_T,$$

$$|\overline{\varphi}_4(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \big[A_0\eta_1 \max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{u}_3(\xi,\tau)| + (\eta_0+\eta_1)\max_{\xi\in\Sigma(t)}|\overline{\varphi}_3(\xi,\tau)|\big]\,d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \left[A_0\eta_1 TB\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^2\frac{\tau^4}{4!}+(\eta_0+\eta_1)B\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^2\frac{\tau^4}{4!}\right]d\tau$$

$$= B\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^3\frac{t^5}{5!},$$

$$|\overline{u}_3(x,t)| \leqslant \int\limits_x^t \max_{\xi\in\Sigma(t)} |\overline{\varphi}_3(x,\tau)|\,d\tau \leqslant TB\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^3\frac{t^5}{5!}, \quad (x,t)\in G_T.$$

Методом математической индукции проверяются общие неравенства:

$$|\overline{\varphi}_n(x,t)| \leqslant B\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^{n-1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant B\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^{n-1}\frac{T^{n+1}}{(n+1)!},$$
$$|\overline{u}_n(x,t)| \leqslant TB\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^{n-1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant TB\big(A_0\eta_1T+\eta_0+\eta_1\big)^{n-1}\frac{T^{n+1}}{(n+1)!},$$
$$(x,t)\in G_T, \quad n=3,4,\ldots,$$

из которых следует равномерная сходимость в области G_T последовательностей $u_n(x,t)$, $\varphi_n(x,t)$.

Так как эти последовательности непрерывны, то они сходятся к некоторым непрерывным функциям $u(x,t)$, $\varphi(x,t)=u_t(x,t)$. Из равенств (4), (5) вытекает непрерывность в G_T функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$, следовательно, и функции $u_x(x,t)$. Таким образом, $u\in C^1(G_T)$.

Докажем единственность решения прямой задачи. Пусть существуют два непрерывно-дифференцируемые решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, для каждого из которых выполнены неравенства (10). Обозначим

$$\widetilde{u}(x,t) := u_1(x,t)-u_2(x,t),$$
$$\widetilde{\varphi}(x,t) = \varphi_1(x,t)-\varphi_2(x,t), \quad \varphi_1(x,t) := \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t), \quad \varphi_2(x,t) := \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t).$$

Тогда разности $\widetilde{u}(x,t)$ и $\widetilde{\varphi}(x,t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\widetilde{u}(x,t) = \int\limits_x^t \widetilde{\varphi}(x,\tau)\,d\tau,\ \ (x,t) \in G_T, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} &\big[\sigma(u_1(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(u_2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)\big]_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau \\ &- \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t} \big[\sigma(u_1(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(u_2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)\big]_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t} &\big[\sigma(u_1(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(u_2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)\big]_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau, \quad (x,t) \in G_T.\end{aligned} \tag{21}$$

Запишем разность $\sigma(u_1(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(u_2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)$ сначала в виде

$$\sigma(u_1(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(u_2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau) = [\sigma(u_1(\xi,\tau)) - \sigma(u_2(\xi,\tau))]\varphi_1(\xi,\tau) + \sigma(u_2(\xi,\tau))\widetilde{\varphi}(\xi,\tau),$$

а затем член $\sigma(u_1(\xi,\tau)) - \sigma(u_2(\xi,\tau))$ представим следующей формулой:

$$\sigma(u_1(\xi,\tau)) - \sigma(u_2(\xi,\tau)) = \sigma_1(\xi)\widetilde{u}(\xi,\tau).$$

Тогда

$$|\sigma(u_1(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) - \sigma(u_2(\xi,\tau))\varphi_2(\xi,\tau)| \leqslant |\widetilde{u}(\xi,\tau)|A_0\eta_1 + |\widetilde{\varphi}(\xi,\tau)|(\eta_0+\eta_1).$$

Из равенства (21) находим, что

$$\begin{aligned}|\widetilde{\varphi}(x,t)| \leqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x} &\big[|\widetilde{u}(\xi,\tau)|A_0\eta_1 + |\widetilde{\varphi}(\xi,\tau)|(\eta_0+\eta_1)\big]_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau \\ &- \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t} \big[|\widetilde{u}(\xi,\tau)|A_0\eta_1 + |\widetilde{\varphi}(\xi,\tau)|(\eta_0+\eta_1)\big]_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau \\ &- \frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t} \big[|\widetilde{u}(\xi,\tau)|A_0\sigma_1 + |\widetilde{\varphi}(\xi,\tau)(\eta_0+\eta_1)\big]_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau, \quad (x,t) \in G_T.\end{aligned} \tag{22}$$

Обозначим

$$z(t) = \max\left(\max_{x\in\Sigma(t)}|\widetilde{u}(x,t)|, \max_{x\in\Sigma(t)}|\widetilde{\varphi}(x,t)|\right),$$

где $\Sigma(t)$ — сечение области G_T плоскостью $t = \text{const}$. Тогда из формулы (20) следует неравенство

$$|\widetilde{u}(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in G_T, \tag{23}$$

а из неравенства (22) следует оценка

$$|\widetilde{\varphi}(x,t)| \leqslant \int_0^t [A_0\eta_1 + \eta_0 + \eta_1] z(\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in G_T. \tag{24}$$

Результатом неравенств (23) и (24) является итоговое неравенство

$$z(t) \leqslant C \int_0^t z(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{25}$$

в котором постоянная C определяется равенством $C = \max[1, A_0\eta_1 + \eta_0 + \eta_1]$. Из неравенства (25) следует, что $z(t) \equiv 0$ для $t \in [0,T]$, отсюда следует равенство $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в G_T.

Чтобы доказать равенство (12), положим в уравнении (6) $t = x$. тогда для функции $\alpha_1(x) = \varphi(x,x)$ получим, что

$$\alpha_1(x) = A - \frac{1}{2}\int_0^x \sigma(\tau,0)\alpha_1(\tau)\, d\tau, \quad x \in [0, T/2].$$

Замечая, что $\sigma(\tau,0) = \sigma_0(\tau)$, из этого линейного интегрального уравнения находим формулу (12). $\square$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы и условие*

$$\sigma_0 \in C^1[0,T/2].$$

Тогда функция $\psi(x,t) := \varphi_t(x,t)$ *принадлежит пространству* $C(G_T)$ *и справедливо равенство*

$$\psi(x,x) =: \alpha_2(x) = -\frac{\alpha_1(x)}{8}\left(2\sigma_0(x) + 2\sigma_0(0) - \int_0^x [\sigma_0^2(\xi) - 4\sigma_1(\xi)\alpha_1(\xi)]\, d\xi\right), \quad x \in [0,T/2]. \tag{26}$$

Доказательство. В равенстве (6) от интегрирования по переменной τ перейдём к интегрированию по переменной ξ:

$$\varphi(x,t) = A - \frac{1}{2}\int_0^{(t-x)/2} \sigma\big(\xi, u(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)\big|_{\tau=t-x-\xi}\, d\xi - \frac{1}{2}\int_0^x \sigma\big(\xi, u(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)\big|_{\tau=t-x+\xi}\, d\xi$$
$$- \frac{1}{2}\int_x^{(x+t)/2} \sigma\big(\xi, (\xi)u(\xi,\tau)\big)\varphi(\xi,\tau)\big|_{\tau=t+x-\xi}\, d\xi, \quad (x,t) \in G_T.$$

Продифференцируем равенство (26) по переменной t, учитывая, что

$$\varphi(x,x) = \alpha_1(x), \quad \sigma\big(x, u(x,x)\big) = \sigma_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\sigma\big(x, u(x,t)\big) = \sigma_1(x)\varphi(x,t).$$

Обозначая $\psi(x,t) := \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)$, в результате получим

$$\begin{aligned}\psi(x,t) = &-\frac{1}{4}\sigma_0\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{t-x}{2}\Big) - \frac{1}{4}\sigma_0\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\\ &-\frac{1}{2}\int\limits_0^{(t-x)/2}\Big[\sigma_1(\xi)\varphi^2(\xi,\tau)+\sigma(\xi,u(\xi,\tau))\psi(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t-x-\xi}\,d\xi\\ &-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x}\Big[\sigma_1(\xi)\varphi^2(\xi,\tau)+\sigma\big(u(\xi,\tau)\big)\psi(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t-x+\xi}\,d\xi\\ &-\frac{1}{2}\int\limits_x^{(x+t)/2}\Big[\sigma_1(\xi)\varphi^2(\xi,\tau)+\sigma\big(u(\xi,\tau)\big)\psi(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t+x-\xi}\,d\xi,\quad (x,t)\in G_T. \qquad (27)\end{aligned}$$

Положим в уравнении (27) $t = x$. Тогда для функции $\alpha_2(x) := \psi(x,x)$ получим уравнение

$$\alpha_2(x) = -\frac{1}{4}\sigma_0(0)A - \frac{1}{4}\sigma_0(x)\alpha_1(x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big[\sigma_1(\xi)\alpha_1^2(\xi)+\sigma_0(\xi)\alpha_2(\xi)\Big]\,d\xi,\quad x\in[0,T/2]. \qquad (28)$$

Дифференцируя равенство (28) и используя равенство $\alpha_1'(x) = -\sigma_0(x)\alpha_1(x)/2$, получаем для $\alpha_2(x)$ линейное уравнение первого порядка с данными Коши при $x = 0$:

$$\frac{d}{dx}\alpha_2(x) = -\frac{1}{8}[2\sigma_0'(x)-\sigma_0^2(x)]\alpha_1(x) - \frac{1}{2}[\sigma_1(x)\alpha_1^2(x)+\sigma_0(x)\alpha_2(x)],\quad (x,t)\in G_T,$$
$$\alpha_2(0) = -\frac{1}{2}\sigma_0(0)A.$$

Деля обе части уравнения на $\alpha_1(x)$, запишем его в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right) = -\frac{1}{8}\big[2\sigma_0'(x)-\sigma_0^2(x)+4\sigma_1(x)\alpha_1(x)\big].$$

Интегрируя это уравнение с учётом начальных данных, находим формулу для вычисления $\alpha_2(x)$:

$$\alpha_2(x) = -\frac{1}{8}\left(2\sigma_0(x)+2\sigma_0(0)-\int\limits_0^x[\sigma_0^2(\xi)-4\sigma_1(\xi)\alpha_1(\xi)]\,d\xi\right)\alpha_1(x),\quad x\in[0,T/2],$$

которая совпадает с формулой (26).

Обозначим $\chi(x,t) := \dfrac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)$ и продифференцируем уравнение (27) по переменной t. Тогда получим уравнение для $\chi(x,t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = &-\frac{1}{8}\sigma_0'\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{t-x}{2}\Big) - \frac{1}{8}\sigma_0\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1'\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\\ &-\frac{1}{8}\sigma_0'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{x+t}{2}\Big) - \frac{1}{8}\sigma_0\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\alpha_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\\ &-\frac{1}{4}\Big[\sigma_1\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\varphi^2\Big(\frac{t-x}{2},\frac{t-x}{2}\Big)+\sigma_0\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\psi\Big(\frac{t-x}{2},\frac{t-x}{2}\Big)\Big]\\ &-\frac{1}{2}\int\limits_0^{(t-x)/2}\Big[2\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)+\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)+\sigma(\xi,u(\xi,\tau))\chi(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t-x-\xi}\,d\xi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^x \Big[2\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)+\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)+\sigma\big(u(\xi,\tau)\big)\chi(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t-x+\xi}d\xi\\
&\qquad-\frac{1}{4}\Big[\sigma_1\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\varphi^2\Big(\frac{x+t}{2},\frac{x+t}{2}\Big)+\sigma_0\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\psi\Big(\frac{x+t}{2},\frac{x+t}{2}\Big)\Big]\\
&-\frac{1}{2}\int_x^{(x+t)/2}\Big[2\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)+\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)+\sigma\big(u(\xi,\tau)\big)\chi(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t+x-\xi}d\xi,\\
&\hspace{30em}(x,t)\in G_T.
\end{aligned}
$$

Окончательно получим

$$
\begin{aligned}
\chi(x,t)=&-\frac{1}{8}\Big[\sigma_0'\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{t-x}{2}\Big)+\sigma_0\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1'\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\Big]\\
&-\frac{1}{8}\Big[\sigma_0'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{x+t}{2}\Big)+\sigma_0\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\alpha_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\Big]\\
&-\frac{1}{4}\Big[\sigma_1\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1^2\Big(\frac{t-x}{2}\Big)+\sigma_0\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_2\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\Big]\\
&-\frac{1}{4}\Big[\sigma_1\Big(\frac{t+x}{2}\Big)\alpha_1^2\Big(\frac{t+x}{2}\Big)+\sigma_0\Big(\frac{t+x}{2}\Big)\alpha_2\Big(\frac{t+x}{2}\Big)\Big]\\
&-\frac{1}{2}\int_0^{(t-x)/2}\Big[3\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)+\sigma(\xi,u(\xi,\tau))\chi(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t-x-\xi}d\xi\\
&-\frac{1}{2}\int_0^{x}\Big[3\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)+\sigma(\xi,u(\xi,\tau))\chi(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t-x+\xi}d\xi\\
&-\frac{1}{2}\int_x^{(x+t)/2}\Big[3\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)+\sigma(\xi,u(\xi,\tau))\chi(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t+x-\xi}d\xi,\quad (x,t)\in G_T.
\end{aligned}\tag{29}
$$

В уравнениях (27) и (29) от интегрирования по переменной ξ перейдём к интегрированию по переменной τ. Тогда эти уравнения примут вид

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t)=&-\frac{1}{4}\sigma_0\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{t-x}{2}\Big)-\frac{1}{4}\sigma_0\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\\
&-\frac{1}{2}\int_{(t-x)/2}^{t-x}\Big[\sigma_1(\xi)\varphi^2(\xi,\tau)+\sigma(\xi,u(\xi,\tau))\psi(\xi,\tau)\Big]_{\xi=t-x-\tau}d\tau\\
&-\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t}\Big[\sigma_1(\xi)\varphi^2(\xi,\tau)+\sigma\big(u(\xi,\tau)\big)\psi(\xi,\tau)\Big]_{\xi=x-t+\tau}d\tau\\
&-\frac{1}{2}\int_{(x+t)/2}^{t}\Big[\sigma_1(\xi)\varphi^2(\xi,\tau)+\sigma\big(u(\xi,\tau)\big)\psi(\xi,\tau)\Big]_{\xi=t+x-\tau}d\tau,\quad (x,t)\in G_T.
\end{aligned}\tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi(x,t) = -\frac{1}{8}\Big[\sigma_0'\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{t-x}{2}\Big) + \sigma_0\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1'\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\Big] \\
-\frac{1}{8}\Big[\sigma_0'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\alpha_1\Big(\frac{x+t}{2}\Big) + \sigma_0\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\alpha_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\Big] \\
-\frac{1}{4}\Big[\sigma_1\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_1^2\Big(\frac{t-x}{2}\Big) + \sigma_0\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\alpha_2\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\Big] \\
-\frac{1}{4}\Big[\sigma_1\Big(\frac{t+x}{2}\Big)\alpha_1^2\Big(\frac{t+x}{2}\Big) + \sigma_0\Big(\frac{t+x}{2}\Big)\alpha_2\Big(\frac{t+x}{2}\Big)\Big] \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{(t-x)/2}^{t-x}\Big[3\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau) + \sigma(\xi,u(\xi,\tau))\chi(\xi,\tau)\Big]_{\xi=t-x-\tau}\,d\tau \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t}\Big[3\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau) + \sigma(\xi,u(\xi,\tau))\chi(\xi,\tau)\Big]_{\xi=x-t+\tau}\,d\tau \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{(x+t)/2}^{t}\Big[3\sigma_1(\xi)\varphi(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau) + \sigma(\xi,u(\xi,\tau))\chi(\xi,\tau)\Big]_{\xi=t+x-\tau}\,d\tau, \quad (x,t)\in G_T. \quad (31)
\end{aligned}
$$

Уравнения (6), (7), (30), (31) образуют замкнутую систему уравнений для функций $u(x,t)$, $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$, $\chi(x,t)$. Применяя к ней подход, описанный при доказательстве теоремы 1, получим утверждение теоремы 2, а именно, что $\psi(x,t)\in C(G_T)$ и $\chi(x,t)\in C(G_T)$. □

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Определение. Будем говорить, что функции $h_m(t)\in\mathcal{H}$, $m=1,2$, если они удовлетворяют условиям

$$
h_m\in C^3[0,T], \quad h_m(0)=0, \quad h_m'(0)=A_m, \quad \frac{h_1''(0)}{A_1}=\frac{h_2''(0)}{A_2}\leqslant -\eta_{00}, \quad m=1,2. \qquad (32)
$$

В последнем условии η_{00} — некоторое положительное число.

Теорема 3. *Пусть задана информация* (2) *при* $A_1\neq A_2$, $A_1>0$, $A_2>0$, *и функции* $h_m(t)\in\mathcal{H}$, $m=1,2$. *Тогда существует положительное число* T_0 *и единственный набор функций* $\sigma_0\in C[0,T_0/2]$ *и* $\sigma_1\in C[0,T_0/2]$, *такой, что обобщённые решения* $u_m\in C^1(G_{T_0})$ *задачи* (1) *при* $A=A_m$, $m=1,2$, *удовлетворяют условию* (2) *для* $t\leqslant T_0$. *Кроме того,*

$$
\sigma_0(x)\geqslant\eta_{00}, \quad x\in[0,T/2].
$$

Доказательство. Из теорем 1 и 2 и уравнений (6), (7), (27) следует, что задаваемые функции $h_m(t)$, $m=1,2$, должны удовлетворять необходимым для разрешимости обратной задачи условиям (32) при некотором $\eta_{00}>0$.

Применим формулу Даламбера к задаче

$$
\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}=-\sigma(x,u_m)\frac{\partial u_m}{\partial t}, \quad x>0, \quad t\in(0,T],
$$
$$
u_m|_{x=0}=h_m(t), \quad \frac{\partial u_m}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-A_m, \quad t\in[0,T],
$$

где $m=1,2$.

В результате получим

$$u_m(x,t) = u_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\iint\limits_{D(x,t)} \big[\sigma(\xi, u_m(\xi,\tau))\varphi_m(\xi,\tau)\big]\,d\tau d\xi, \tag{33}$$

где $D(x,t) = \{(\xi,\tau) \mid 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant T/2,\ t-x+\xi \leqslant \tau \leqslant x+t-\xi\}$, $\varphi_m(\xi,\tau) = \dfrac{\partial u_m}{\partial t}(\xi,\tau)$,

$$u_m^0(x,t) = \frac{h_m(t+x)+h_m(t-x)}{2} - A_m x, \quad m = 1,2, \tag{34}$$

— известные функции.

Запишем уравнение (33) следующим образом:

$$u_m(x,t) = u_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \sigma(\xi, u_m(\xi,\tau))\varphi_m(\xi,\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in G_T, \quad m=1,2. \tag{35}$$

Продифференцируем уравнение (35) по переменной t. Тогда для функций

$$\varphi_m(x,t) := \frac{\partial u_m}{\partial t}(x,t), \quad \psi_m(x,t) := \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, \quad \chi_m(x,t) := \frac{\partial^3 u_m}{\partial t^3}(x,t)$$

получим уравнения

$$\varphi_m(x,t) = \varphi_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \big[\sigma(\xi, u_m(\xi, t+x-\xi))\varphi_m(\xi, t+x-\xi)$$
$$- \sigma(\xi, u_m(\xi, t-x+\xi))\varphi_m(\xi, t-x+\xi)\big]\big\}\,d\xi, \quad (x,t)\in G_T, \tag{36}$$

$$\psi_m(x,t) = \psi_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \big[\sigma_1(\xi)\varphi_m^2(\xi, t+x-\xi) + \sigma(\xi, u_m(\xi, t+x-\xi))\psi_m(\xi, t+x-\xi)$$
$$- \sigma_1(\xi)\varphi_m^2(\xi, t-x+\xi) - \sigma(\xi, u_m(\xi, t-x+\xi))\psi_m(\xi, t-x+\xi)\big]\big\}\,d\xi,$$
$$(x,t)\in G_T, \tag{37}$$

$$\chi_m(x,t) = \chi_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \big[3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi, t+x-\xi)\psi_m(\xi, t+x-\xi)$$
$$+ \sigma(\xi, u_m(\xi, t+x-\xi))\chi_m(\xi, t+x-\xi) - 3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi, t-x+\xi)\psi_m(\xi, t-x+\xi)$$
$$- \sigma(\xi, u_m(\xi, t-x+\xi))\chi_m(\xi, t-x+\xi)\big]\big\}\,d\xi,$$
$$(x,t)\in G_T, \tag{38}$$

в которых

$$\varphi_m^0(x,t) = \frac{h_m'(t+x)+h_m'(t-x)}{2}, \quad \psi_m^0(x,t) = \frac{h_m''(t+x)+h_m''(t-x)}{2},$$
$$\chi_m^0(x,t) = \frac{h_m'''(t+x)+h_m'''(t-x)}{2}, \quad m=1,2. \tag{39}$$

Аналогично формулам (12), (26) можем написать соотношения для функций: α_{1m} и α_{2m}

$$\varphi_m(x,x) =: \alpha_{1m}(x) = A_m \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x \sigma_0(\xi)\,d\xi\right), \quad x \in [0, T/2], \tag{40}$$

$$\psi_m(x,x) =: \alpha_{2m}(x) = -\frac{1}{8}\left(2\sigma_0(x) + 2\sigma_0(0) - \int_0^x [\sigma_0^2(\xi) - 4\sigma_1(\xi)\alpha_{1m}(\xi)]\,d\xi\right)\alpha_{1m}(x),$$
$$x \in [0, T/2]. \tag{41}$$

Из равенств (2), (40), (41) при $x = 0$, $t = 0$ имеем

$$\alpha_{1m}(0) = A_m = h_m'(0), \quad \alpha_{2m}(0) = -\frac{1}{2}\sigma_0(0)A_m = h_m''(0), \quad m = 1, 2,$$

отсюда находим

$$\sigma_0^0 =: \sigma_0(0) = -\frac{2h_m''(0)}{A_m} \geqslant 2\eta_{00}, \quad m = 1, 2. \tag{42}$$

Рассмотрим уравнение (29) для функций $\chi_m(x,t)$, $m = 1, 2$, при $x = 0$. Учитывая, что $\alpha_{1m}'(x) = -\sigma_0(x)\alpha_{1m}(x)/2$, находим, что

$$\chi_m(0,t) = h_m'''(t) = -\frac{1}{8}\big[2\sigma_0'(t/2) - \sigma_0^2(t/2)\big]\alpha_{1m}(t/2) - \frac{1}{2}\big[\sigma_1(t/2)\alpha_{1m}^2(t/2) + \sigma_0(t/2)\alpha_{2m}(t/2)\big]$$
$$- \int_0^{t/2}\Big[3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi,\tau)\psi_m(\xi,\tau) + \sigma(\xi, u_m(\xi,\tau))\chi_m(\xi,\tau)\Big]_{\tau=t-\xi} d\xi, \quad (x,t) \in G_T.$$

Сделаем в этом уравнении замену переменной $t = 2x$ и воспользуемся для $\alpha_{2m}(x)$ формулой (41). Тогда в силу (42) получим равенства

$$h_m'''(2x) = -\frac{1}{8}\big[2\sigma_0'(x) - 2\sigma_0^2(x) - \sigma_0(x)\sigma_0^0\big]\alpha_{1m}(x) - \frac{1}{2}\sigma_1(x)\alpha_{1m}^2(x)$$
$$- \frac{1}{16}\sigma_0(x)\alpha_{1m}(x)\int_0^x [\sigma_0^2(\xi) - 4\sigma_{1m}(\xi)\alpha_{1m}(\xi)]\,d\xi,$$
$$- \int_0^x \Big[3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi,\tau)\psi_m(\xi,\tau) + \sigma(\xi, u_m(\xi,\tau))\chi_m(\xi,\tau)\Big]_{\tau=2x-\xi} d\xi, \quad m = 1, 2, \quad (x,t) \in G_T.$$

Разделим эти равенства на $\alpha_{1m}(x)/8$. Тогда получим систему линейных уравнений относительно функций $2\sigma_0'(x) - 2\sigma_0^2(x) - \sigma_0(x)\sigma_0^0$ и $\sigma_1(x)$:

$$2\sigma_0'(x) - 2\sigma_0^2(x) - \sigma_0(x)\sigma_0^0 + 4\alpha_{1m}(x)\sigma_1(x) = \Phi_m(x) - 8\frac{h_m'''(2x)}{\alpha_{1m}(x)}, \quad m = 1, 2, \tag{43}$$

в которой

$$\Phi_m(x) := -\frac{1}{2}\sigma_0(x)\int_0^x [\sigma_0^2(\xi) - 4\sigma_1(\xi)\alpha_{1m}(\xi)]\,d\xi$$
$$- \frac{8}{\alpha_{1m}(x)}\int_0^x \Big[3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi,\tau)\psi_m(\xi,\tau) + \sigma(\xi, u_m(\xi,\tau))\chi_m(\xi,\tau)\Big]_{\tau=2x-\xi} d\xi, \quad m = 1, 2. \tag{44}$$

Используя равенства

$$\alpha_{1m}(x) = A_m \exp\biggl(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x \sigma_0(\xi)\,d\xi\biggr), \quad m = 1, 2,$$

из уравнений (43) находим, что

$$2\sigma_0'(x) - 2\sigma_0^2(x) - \sigma_0(x)\sigma_0^0 = \frac{1}{A_2 - A_1}\biggl\{A_2\Phi_1(x) - A_1\Phi_2(x) - \frac{8}{A_1A_2}\bigl[A_2^2 h_1'''(2x) - A_1^2 h_2'''(2x)\bigr]\exp\biggl(\frac{1}{2}\int\limits_0^x \sigma_0(\xi)\,d\xi\biggr)\biggr\}, \quad x \in [0, T/2], \quad (45)$$

$$\sigma_1(x) = \sigma_1^0(x) + \frac{1}{4(A_1 - A_2)}[\Phi_1(x) - \Phi_2(x)]\exp\biggl(\frac{1}{2}\int\limits_0^x \sigma_0(\xi)\,d\xi\biggr) + \sigma_1^0(x)\biggl[\exp\biggl(\frac{1}{2}\int\limits_0^x \sigma_0(\xi)\,d\xi\biggr) - 1\biggr], \quad x \in [0, T/2. \quad (46)$$

В формуле (46)

$$\sigma_1^0(x) = \frac{2}{A_1 - A_2}\biggl(\frac{h_2'''(2x)}{A_2} - \frac{h_1'''(2x)}{A_1}\biggr).$$

Интегрируя уравнение (45), получаем интегральное соотношение

$$\sigma_0(x) = \sigma_0^0 + \int\limits_0^x \biggl[\sigma_0^2(\xi) + \frac{\sigma_0^0}{2}\sigma_0(\xi)\biggr]d\xi + \frac{1}{2(A_2 - A_1)}\int\limits_0^x \biggl\{A_2\Phi_1(\xi) - A_1\Phi_2(\xi) - \frac{8}{A_1A_2}\bigl[A_2^2 h_1'''(2\xi) - A_1^2 h_2'''(2\xi)\bigr]\exp\biggl(\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi \sigma_0(\xi_1)\,d\xi_1\biggr)\biggr\}d\xi, \quad x \in [0, T/2]. \quad (47)$$

Уравнения (26), (35)–(38) при $m = 1, 2$, (46), (47), образуют замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений для решения обратной задачи.

Определим вектор-функции

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(x,t) &= \bigl(\sigma_0(x), \sigma_1(x), u_1(x,t), u_2(x,t), \varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t), \psi_1(x,t), \psi_2(x,t), \chi_1(x,t), \chi_2(x,t)\bigr),\\ \mathbf{g}^0(x,t) &= \bigl(\sigma_0^0, \sigma_1^0(x), u_1^0(x,t), u_2^0(x,t), \varphi_1^0(x,t), \varphi_2^0(x,t), \psi_1^0(x), \psi_2^0(x,t), \chi_1^0(x,t), \chi_2^0(x,t)\bigr).\end{aligned} \quad (48)$$

Пусть $\mathbf{C}(G_T)$ — пространство векторных функций $\mathbf{g}(x,t)$, в котором норма определяется как максимум норм компонент, и в нём шар

$$\|\mathbf{g} - \mathbf{g}^0\|_{\mathbf{C}(G_T)} \leqslant \|\mathbf{g}^0\|_{\mathbf{C}(G_T)}.$$

Рассмотрим на этом множестве равенство

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{g}) = \mathbf{g}, \quad (49)$$

в котором компоненты оператора $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{10})$ определены формулами

$$\Lambda_1\mathbf{g}(x) = \sigma_0^0 + \int_0^x \left[\sigma_0^2(\xi) + \frac{\sigma_0^0}{2}\sigma_0(\xi)\right] d\xi + \frac{1}{2(A_2 - A_1)} \int_0^x \Bigg\{ A_2\Phi_1(\xi) - A_1\Phi_2(\xi)$$
$$- \frac{8}{A_1 A_2}\left[A_2^2 h_1'''(2\xi) - A_1^2 h_2'''(2\xi)\right] \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\xi \sigma_0(\xi_1)\, d\xi_1\right)\Bigg\} d\xi, \quad x \in [0, T/2], \quad (50)$$

$$\Lambda_2\mathbf{g}(x) = \sigma_1^0(x) + \frac{1}{4(A_1 - A_2)}[\Phi_1(x) - \Phi_2(x)] \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x \sigma_0(\xi)\, d\xi\right)$$
$$+ \sigma_1^0(x)\left[\exp\left(\int_0^x \sigma_0(\xi)\, d\xi\right) - 1\right], \quad x \in [0, T/2, \quad (51)$$

$$\Lambda_{2+m}\mathbf{g}(x,t) = u_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \sigma(\xi, u_m(\xi,\tau))\varphi_m(\xi,\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in G_T, \quad m = 1, 2, \quad (52)$$

$$\Lambda_{4+m}\mathbf{g}(x,t) = \varphi_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int_0^x \big[\sigma(\xi, u_m(\xi, t+x-\xi))\varphi_m(\xi, t+x-\xi)$$
$$- \sigma(\xi, u_m(\xi, t-x+\xi))\varphi_m(\xi, t-x+\xi)\big]\, d\xi, \quad (x,t) \in G_T, \quad m = 1, 2, \quad (53)$$

$$\Lambda_{6+m}\mathbf{g}(x,t) = \psi_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int_0^x \big[\sigma_1(\xi)\varphi_m^2(\xi, t+x-\xi) + \sigma(\xi, u_m(\xi, t+x-\xi))\psi_m(\xi, t+x-\xi)$$
$$- \sigma_1(\xi)\varphi_m^2(\xi, t-x+\xi) - \sigma(\xi, u_m(\xi, t-x+\xi))\psi_m(\xi, t-x+\xi)\big]\, d\xi,$$
$$(x,t) \in G_T, \quad m = 1, 2, \quad (54)$$

$$\Lambda_{8+m}\mathbf{g}(x,t) = \chi_m^0(x,t) - \frac{1}{2}\int_0^x \big[3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi, t+x-\xi)\psi_m(\xi, t+x-\xi)$$
$$+ \sigma(\xi, u_m(\xi, t+x-\xi))\chi_m(\xi, t+x-\xi) - 3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi, t-x+\xi)\psi_m(\xi, t-x+\xi)$$
$$- \sigma(\xi, u_m(\xi, t-x+\xi))\chi_m(\xi, t-x+\xi)\big]\, d\xi, \quad (x,t) \in G_T, \quad m = 1, 2. \quad (55)$$

Обозначим $\mathbf{C}(G_T)$ — прямое произведение 10 экземпляров пространств $C(G_T)$, которое является банаховым пространством непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_T)} = \max_{1 \leqslant k \leqslant 10} \|g_k\|_{C(G_T)}.$$

Так как $\mathbf{g}^0 \in \mathbf{C}(G_T)$, то все вектор-функции, определённые в (48) являются элементами $\mathbf{C}(G_T)$. Рассмотрим в $\mathbf{C}(G_T)$ замкнутое множество

$$\mathbf{R}_T := \Big\{\mathbf{g} \in \mathbf{C}(G_T) \mid \big\|\mathbf{g} - \mathbf{g}^0\big\|_{\mathbf{C}(G_T)} \leqslant \big\|\mathbf{g}^0\big\|_{\mathbf{C}(G_T)}\Big\}.$$

На этом множестве справедливы оценки

$$\|g_k\|_{C(G_T)} \leqslant \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_T)} \leqslant 2\|\mathbf{g}^0\|_{\mathbf{C}(G_T)}, \quad k=\overline{1,10}. \tag{56}$$

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать обозначение $\|\mathbf{g}\|$ вместо $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_T)}$.

Положим

$$0 < a_* \leqslant A_m \leqslant A_*, \quad m=1,2, \quad |A_1 - A_2| \geqslant \delta > 0. \tag{57}$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$a_* \exp(-\|\mathbf{g}^0\|T/2) \leqslant \alpha_{1m}(x) \leqslant A_* \exp(\|\mathbf{g}^0\|T/2). \tag{58}$$

Используя это неравенство и (56), оценим функции Φ_m, $m=1,2$:

$$\begin{aligned}|\Phi_m(x)| &\leqslant \frac{|\sigma_0(x)|}{2}\int_0^x \big|\sigma_0^2(\xi) - 4\sigma_1(\xi)\alpha_{1m}(\xi)\big|\,d\xi \\ &\quad + \frac{8}{|\alpha_{1m}(x)|}\int_0^x \Big|3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi,\tau)\psi_m(\xi,\tau) + \sigma(\xi,u_m(\xi,\tau))\chi_m(\xi,\tau)\Big|_{\tau=2x-\xi}\,d\xi \\ &\leqslant \frac{\|\mathbf{g}^0\|}{2}\frac{T}{2}\Big[\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^2 + 8\|\mathbf{g}^0\|A_*\exp\big(\|\mathbf{g}^0\|T/2\big)\Big] + \frac{4T}{a_*}\exp\big(\|\mathbf{g}^0\|T/2\big)\Big[4\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^3 + \big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^2\Big] \\ &= T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_0, \quad m=1,2. \end{aligned} \tag{59}$$

Здесь

$$\varkappa_0 := \varkappa_0\big(\|\mathbf{g}^0\|,T\big) = \Big[\|\mathbf{g}^0\| + 2A_*\exp\big(\|\mathbf{g}^0\|T/2\big)\Big] + \frac{4}{a_*}\exp\big(\|\mathbf{g}^0\|T/2\big)\Big[8\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^2 + 4\|\mathbf{g}^0\|\Big].$$

Из условия

$$|\chi_m^0(x,t)| \leqslant \|\mathbf{g}^0\|, \quad (x,t)\in G_T$$

и формулы (39) следуют неравенства

$$|h'''(0)| \leqslant \|\mathbf{g}^0\|, \quad |h'''(t) + h'''(0)| \leqslant 2\|\mathbf{g}^0\|, \quad |h'''(t)| \leqslant 3\|\mathbf{g}^0\|, \quad t\in[0.T].$$

Используя последнее из них и формулы (47), (57)–(59), оценим разность

$$\begin{aligned}\big|\Lambda_1\mathbf{g} - g_1^0\big| &\leqslant \int_0^x \left|2\sigma_0^2(\xi) + \frac{\sigma_0^0}{2}\sigma_0(\xi)\right|d\xi + \frac{1}{2|A_2 - A_1|}\int_0^x \bigg\{\big|A_2\Phi_1(\xi) - A_1\Phi_2(\xi)\big| \\ &\quad + \frac{8}{A_1A_2}\big|A_2^2h_1'''(2\xi) - A_1^2h_2'''(2\xi)\big|\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\xi \sigma_0(\xi_1)\,d\xi_1\right)\bigg\}\,d\xi \\ &\leqslant \frac{9T}{2}\|\mathbf{g}^0\|^2 + \frac{T}{4\delta}\Big[2A_*T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_0 + \frac{48A_*}{a_*}\|\mathbf{g}^0\|\exp\big(T\|\mathbf{g}^0\|/2\big)\Big] = T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_1, \quad x\in[0,T/2]. \end{aligned} \tag{60}$$

Здесь

$$\varkappa_1 := \varkappa_1(\|\mathbf{g}^0\|,T) = \frac{9}{2}\|\mathbf{g}^0\| + \frac{1}{4\delta}\Big[2A_*T\varkappa_0 + \frac{48A_*}{a_*}\exp\big(T\|\mathbf{g}^0\|/2\big)\Big].$$

Воспользуемся неравенством

$$e^x - 1 \leqslant xe^x, \quad x \geqslant 0, \tag{61}$$

формулами (46), (57)–(59) и оценим

$$\begin{aligned}\big|\Lambda_2\mathbf{g}-g_2^0\big| &\leqslant \frac{1}{4|A_1-A_2|}|\Phi_1(x)-\Phi_2(x)|\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sigma_0(\xi)\,d\xi\right)+|\sigma_1^0(x)|\left|\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sigma_0(\xi)\,d\xi\right)-1\right|\\ &\leqslant \frac{T}{2\delta}\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_0\exp\big(T\|\mathbf{g}^0\|/2\big)+T\|\mathbf{g}^0\|^2\exp\big(T\|\mathbf{g}^0\|/2\big)\\ &= T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_2,\quad x\in[0,T/2].\end{aligned}\tag{62}$$

Здесь

$$\varkappa_2:=\varkappa_2\big(\|\mathbf{g}^0\|,T\big)=\left(\frac{\varkappa_0}{2\delta}+\|\mathbf{g}^0\|\right)\exp\big(T\|\mathbf{g}^0\|/2\big).$$

Аналогично, используя (33), (34), (57)–(59), получаем оценку

$$\begin{aligned}\big|\Lambda_{2+m}\mathbf{g}-g_{2+m}^0\big| &\leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{D(x,t)}\big|\sigma(\xi,u_m(\xi,\tau))\varphi_m(\xi,\tau)\big|\,d\tau d\xi\\ &\leqslant \frac{T^2}{2}\big(\|\mathbf{g}^0\|^2+2\|\mathbf{g}^0\|^3\big)=T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_3,\quad m=1,2,\quad x\in[0,T/2],\end{aligned}$$

в которой $\varkappa_3:=\varkappa_3(\|\mathbf{g}^0\|,T)=T\big(\|\mathbf{g}^0\|+2\|\mathbf{g}^0\|^2\big)/2$.

Используя (53)–(55), (56), запишем оценки для $|A_k\mathbf{g}-g_k{}^0|$, $k=\overline{5,10}$ в виде

$$\begin{aligned}\big|\Lambda_{4+m}\mathbf{g}(x,t)-g_{4+m}^0(x,t)\big| &\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^x\big|\sigma(\xi,u_m(\xi,t+x-\xi))\varphi_m(\xi,t+x-\xi)\\ &\qquad-\sigma(\xi,u_m(\xi,t-x+\xi))\varphi_m(\xi,t-x+\xi)\big|\,d\xi\\ &\leqslant \frac{T}{2}\Big(\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^2+\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^3\Big)=T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_4(\|\mathbf{g}^0\|),\quad m=1,2,\quad x\in[0,T/2],\end{aligned}$$

здесь $\varkappa_4:=\varkappa_4(\|\mathbf{g}^0\|)=2\|\mathbf{g}^0\|+4\|\mathbf{g}^0\|^2$,

$$\begin{aligned}\big|\Lambda_{6+m}\mathbf{g}(x,t)-g_{6+m}^0(x,t)\big| &\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^x\big|\sigma_1(\xi)\varphi_m^2(\xi,t+x-\xi)+\sigma(\xi,u_m(\xi,t+x-\xi))\psi_m(\xi,t+x-\xi)\\ &\quad-\sigma_1(\xi)\varphi_m^2(\xi,t-x+\xi)-\sigma(\xi,u_m(\xi,t-x+\xi))\psi_m(\xi,t-x+\xi)\big|\,d\xi\\ &\leqslant \frac{T}{2}\big[2\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^3+\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^2\big)\big]=:T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_5,\quad m=1,2,\quad x\in[0,T/2],\end{aligned}$$

здесь $\varkappa_5:=\varkappa_5(\|\mathbf{g}^0\|)=8\|\mathbf{g}^0\|^2+2\|\mathbf{g}^0\|$,

$$\begin{aligned}&\big|\Lambda_{8+m}\mathbf{g}(x,t)-g_{8+m}^0(x,t)\big|\\ &\quad\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^x\big|3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi,t+x-\xi)\psi_m(\xi,t+x-\xi)+\sigma(\xi,u_m(\xi,t+x-\xi))\chi_m(\xi,t+x-\xi)\\ &\quad-3\sigma_1(\xi)\varphi_m(\xi,t-x+\xi)\psi_m(\xi,t-x+\xi)-\sigma(\xi,u_m(\xi,t-x+\xi))\chi_m(\xi,t-x+\xi)\big|\,d\xi\\ &\quad\leqslant \frac{T}{2}\Big[4\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^3+\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^2\Big]=T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_6,\quad m=1,2,\quad x\in[0,T/2],\end{aligned}$$

здесь $\varkappa_6:=\varkappa_6\big(\|\mathbf{g}^0\|\big)=16\|\mathbf{g}^0\|^2+2\|\mathbf{g}^0\|$.

Оценим снизу функции $\sigma_0(x)$ и $\sigma(x, u_m(x,t))$, $m = 1, 2$. Напомним, что, согласно условию (32) и формуле (42) , $\sigma_0^0 \geqslant 2\eta_{00} > 0$. Отсюда в силу (60) следует

$$\sigma_0(x) \geqslant 2\sigma_0^0 - |\sigma_0(x) - \sigma_0^0| \geqslant 2\eta_{00} - T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_1 \geqslant \eta_{00},$$

если $T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_1 \leqslant \eta_{00}$.

Далее, из формул (39), (56) следует, что

$$|\varphi_m^0(x,t)| = \frac{1}{2}\big|h_m'(t+x) + h_m'(t-x)\big| \leqslant \|\mathbf{g}^0\|, \quad m = 1, 2, \quad (x,t) \in G_T.$$

Из этого неравенства вытекают оценки

$$|h_m'(0)| \leqslant \|\mathbf{g}^0\|, \quad |h_m'(t) + h_m'(0)| \leqslant 2\|\mathbf{g}^0\|, \quad |h_m'(t)| \leqslant 3\|\mathbf{g}^0\|, \quad t \in [0, T].$$

Используя условия $h_m(0) = 0$, $m = 1, 2$, получаем

$$|h_m(t)| \leqslant 3T\|\mathbf{g}^0\|, \quad m = 1, 2, \quad t \in [0, T].$$

Формула (34) приводит к оценке

$$\begin{aligned} |u_{2+m}^0(x,t)| &\leqslant \left|\frac{1}{2}[h_m(t+x) + h_m(t-x)] - A_m x\right| \\ &\leqslant T\left(3\|\mathbf{g}^0\| + \frac{1}{2}\max\{A_1, A_2\}\right), \quad m = 1, 2, \quad (x,t) \in G_T. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |u_{2+m}(x,t)| &\leqslant |u_{2+m}^0(x,t)| + |u_{2+m}(x,t) - u_{2+m}^0(x,t)| \\ &\leqslant T\left(3\|\mathbf{g}^0\| + \frac{1}{2}\max\{A_1, A_2\} + \|\mathbf{g}^0\|\varkappa_3\right), \quad m = 1, 2, \quad (x,t) \in G_T. \end{aligned}$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \sigma(x, u_m(x,t)) &\geqslant \sigma_0(x) - |\sigma_1(x)|\,|u_m(x,t)| \\ &\geqslant 2\eta_{00} - T^2\|\mathbf{g}^0\|\left(3\|\mathbf{g}^0\| + \frac{1}{2}\max(A_1, A_2) + \|\mathbf{g}^0\|\varkappa_3\right)\varkappa_2 \geqslant 0, \quad m = 1, 2, \end{aligned}$$

если выполнен условие

$$T^2\|\mathbf{g}^0\|\left(3\|\mathbf{g}^0\| + \frac{1}{2}\max(A_1, A_2) + \|\mathbf{g}^0\|\varkappa_3\right)\varkappa_2 \leqslant 2\eta_{00}.$$

Выберем число T_0' так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{gathered} T_0'\varkappa_k \leqslant 1, \quad k = \overline{1,6}, \quad T_0'\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_1 \leqslant \eta_{00}, \\ (T')^2\|\mathbf{g}^0\|\left(3\|\mathbf{g}^0\| + \frac{1}{2}\max\{A_1, A_2\} + \|\mathbf{g}^0\|\varkappa_3\right)\varkappa_2 \leqslant 2\eta_{00}. \end{gathered}$$

Тогда оператор Λ отображает множество $\mathbf{R}_{T_0'}$ в себя и на этом множестве выполнены соотношения

$$\sigma_0(x) \geqslant \eta_{00}, \quad \sigma(x, u_m(x,t)) \geqslant 0.$$

Покажем, что оператор $\mathbf{\Lambda}$, определённый равенствами (49)–(54), является сжимающим при достаточно малом положительном $T \leqslant T_0'$.

Пусть

$$\mathbf{g}^1(x,t){=}\big(\sigma_0^1(x),\sigma_1^1(x),u_1^1(x,t),u_2^1(x,t),\varphi_1^1(x,t),\varphi_2^1(x,t),\psi_1^1(x,t),\psi_2^1(x,t),\chi_1^1(x,t),\chi_2^1(x,t)\big),$$
$$\mathbf{g}^2(x,t){=}\big(\sigma_0^2(x),\sigma_1^2(x),u_1^2(x,t),u_2^2(x,t),\varphi_1^2(x,t),\varphi_2^2(x,t),\psi_1^2(x,t),\psi_2^2(x,t),\chi_1^2(x,t),\chi_2^2(x,t)\big).$$

Воспользуемся (40), (44) и рассмотрим разность $\Phi_m^1(\xi)-\Phi_m^2(\xi)$, $m=1,2$:

$$\begin{aligned}
\Phi_m^1(x)-\Phi_m^2(x) &= -\frac{1}{2}\big(\sigma_0^1(x)-\sigma_0^2(x)\big)\int\limits_0^x \left[\big(\sigma_0^1(\xi)\big)^2-4\sigma_1^1(\xi)A_m\exp\left(\int\limits_0^x \sigma_0^1(\xi)\,d\xi\right)\right]d\xi \\
&- \frac{1}{2}\sigma_0^2(x)\int\limits_0^x\Bigg\{\big(\sigma_0^1(\xi)-\sigma_0^2(\xi)\big)\big(\sigma_0^1(\xi)+\sigma_0^2(\xi)\big)-4A_m\big(\sigma_1^1(\xi)-\sigma_1^2(\xi)\big)\exp\left(\int\limits_0^x\sigma_0^1(\xi)\,d\xi\right) \\
&\qquad - 4A_m\sigma_1^2(\xi)\exp\left(\int\limits_0^x\sigma_0^2(\xi)\,d\xi\right)\left[\exp\left(\int\limits_0^x\big(\sigma_0^1(\xi)-\sigma_0^2(\xi)\big)\,d\xi\right)-1\right]\Bigg\}d\xi \\
&\qquad - \frac{8}{\alpha_{1m}^1(x)\alpha_{1m}^2(x)}A_m\exp\left(\int\limits_0^x\sigma_0^1(\xi)\,d\xi\right)\left[\exp\left(\int\limits_0^x\big(\sigma_0^2(\xi)-\sigma_0^1(\xi)\big)\,d\xi\right)-1\right] \\
&\qquad \times\int\limits_0^x\Big[3\sigma_1^1(\xi)\varphi_m^1(\xi,\tau)\psi_m^1(\xi,\tau)+\sigma(\xi,u_m^1(\xi,\tau))\chi_m^1(\xi,\tau)\Big]_{\tau=2x-\xi}d\xi \\
&+\frac{8}{\alpha_{1m}^2(x)}\int\limits_0^x\Big[3\big(\sigma_1^1(\xi)-\sigma_1^2(\xi)\big)\varphi_m^1(\xi,\tau)\psi_m^1(\xi,\tau)+3\sigma_1^2(\xi)\big(\varphi_m^1(\xi,\tau)-\varphi_m^2(\xi,\tau)\big)\psi_m^1(\xi,\tau) \\
&\qquad +3\sigma_1^2(\xi)\varphi_m^2(\xi,\tau)\big(\psi_m^1(\xi,\tau)-\psi_m^2(\xi,\tau)\big) \\
&+\big(\sigma_0^1(\xi)-\sigma_0^2(\xi)\big)\chi_m^1(\xi,\tau)+\sigma_0^2(\xi)\big(\chi_m^1(\xi,\tau)-\chi_m^2(\xi,\tau)\big)+\big(\sigma_1^1(\xi)-\sigma_1^2(\xi)\big)u_m^1(\xi,\tau)\chi_m^1(\xi,\tau) \\
&\qquad +\sigma_1^2(\xi)\big(u_m^1(\xi,\tau)-u_m^2(\xi,\tau)\big)\chi_m^1(\xi,\tau)+\sigma_1^2(\xi)u_m^2(\xi,\tau)\big(\chi_m^1(\xi,\tau)-\chi_m^2(\xi,\tau)\big)\Big]_{\tau=2x-\xi}d\xi.
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу (58), (61) получим оценку для разности $\Phi_m^1(\xi)-\Phi_m^2(\xi)$, $m=1,2$:

$$\begin{aligned}
\big|\Phi_m^1(x)-\Phi_m^2(x)\big| &\leqslant \Bigg\{\|\mathbf{g}^0\|^2+\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)A_m\exp\big(T\big\|\mathbf{g}^0\big\|/2\big) \\
&+\big\|\mathbf{g}^0\big\|^2\Big(\big\|\mathbf{g}^0\big\|+A_m\exp\big(T\big\|\mathbf{g}^0\big\|/2\big)+A_m\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)\exp\big(T\big\|\mathbf{g}^0\big\|/2\big)\exp\big(2T\big\|\mathbf{g}^0\big\|\big)\Big) \\
&+\frac{8}{a_*^2}\exp\big(T\big\|\mathbf{g}^0\big\|\big)A_m\exp\big(T\big\|\mathbf{g}^0\big\|/2\big)\frac{1}{2}\exp\big(2T\big\|\mathbf{g}^0\big\|\big)\frac{T}{2}\Big[4\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^3+\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^2\Big] \\
&+\frac{4}{a_*}\exp\big(T\big\|\mathbf{g}^0\big\|/2\big)\Big[12\big(2\big\|\mathbf{g}^0\big\|\big)^3+2\big(2\big\|\mathbf{g}^0\big\|\big)^2\Big]\Bigg\}T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\| \\
&=: C_0\big(T,\big\|\mathbf{g}^0\big\|\big)T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|,\quad m=1,2,\quad (x,t)\in G_T. \qquad (63)
\end{aligned}$$

Опираясь на равенства (50)–(55), (63) оценим разности $\Lambda_k\mathbf{g}^1(x)-\Lambda_k\mathbf{g}^2(x)$, $k=1,10$.

$$\big|\Lambda_1\mathbf{g}^1(x)-\Lambda_1\mathbf{g}^2(x)\big| \leqslant \int\limits_0^x\left|\big(\sigma_0^1(\xi)-\sigma_0^2(\xi)\big)\big(\sigma_0^1(\xi)+\sigma_0^2(\xi)\big)+\frac{\sigma_0^0}{2}\big(\sigma_0^1(\xi)-\sigma_0^2(\xi)\big)\right|d\xi$$

$$+\frac{1}{2|A_2-A_1|}\int\limits_0^x\Big|A_2\big(\Phi_1^1(\xi)-\Phi_1^2(\xi)\big)-A_1\big(\Phi_2^1(\xi)-\Phi_2^2(\xi)\big)$$

$$-\frac{8}{A_1A_2}\big[(A_2)^2h_1'''(2\xi)-(A_1)^2h_2'''(2\xi)\big]\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi\sigma_0^2(\xi_1)\,d\xi_1\right)$$

$$\times\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi\big[\sigma_0^1(\xi_1)-\sigma_0^2(\xi_1)\big]\,d\xi_1\right)-1\right]\Bigg|\,d\xi$$

$$\leqslant\left\{2\|\mathbf{g}^0\|+\frac{1}{2}\|\mathbf{g}^0\|+\frac{1}{2\delta}\left[A_*C_0+\frac{48A_*}{a_*}\|\mathbf{g}^0\|\exp\big(T\|\mathbf{g}^0\|/2\big)\frac{1}{4}\exp\big(2T\|\mathbf{g}^0\|\big)\right]\right\}\frac{T}{2}\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|_{\mathbf{C}(G_T)}$$

$$=:C_1\big(T,\|\mathbf{g}^0\|\big)T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|,\quad (x,t)\in G_T,$$

$$\big|\Lambda_2\mathbf{g}^1(x)-\Lambda_2\mathbf{g}^2(x)\big|\leqslant\frac{1}{4|A_1-A_2|}\big|\big(\Phi_1^1(x)-\Phi_1^2(x)\big)-\big(\Phi_2^1(x)-\Phi_2^2(x)\big)\big|\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sigma_0^1(\xi)\,d\xi\right)$$

$$+\big|\Phi_1^2(x)-\Phi_2^2(x)\big|\exp\left(\int\limits_0^x\sigma_0^2(\xi)\,d\xi\right)\left[\exp\left(\int\limits_0^x\big(\sigma_0^1(\xi)-\sigma_0^2(\xi)\big)\,d\xi\right)-1\right]$$

$$+\big|\sigma_1^0(x)\big|\exp\left(\int\limits_0^x\sigma_0^2(\xi)\,d\xi\right)\left[\exp\left(\int\limits_0^x\big(\sigma_0^1(\xi)-\sigma_0^2(\xi)\big)\,d\xi\right)-1\right]$$

$$\leqslant\Big\{\frac{1}{2\delta}C_0\exp\big(T\|\mathbf{g}^0\|/2\big)+T\|\mathbf{g}^0\|\varkappa_0\exp\big(T\|\mathbf{g}^0\|/2\big)\frac{1}{2}\exp\big(2T\|\mathbf{g}^0\|\big)$$

$$+\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)\exp\big(T\|\mathbf{g}^0\|\big)\frac{1}{2}\exp\big(2T\|\mathbf{g}^0\|\big)\Big\}T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|$$

$$=:C_2\big(T,\|\mathbf{g}^0\|\big)T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|,\quad (x,t)\in G_T.$$

Учитывая обозначения

$$\sigma^k(\xi,u_m^k(x,t)):=\sigma_0^k(x)+\sigma_1^k(x)u_m^k(x,t),\quad k=1,2,$$

оценим следующие разности:

$$\big|\Lambda_{2+m}\mathbf{g}^1(x,t)-\Lambda_{2+m}\mathbf{g}^2(x,t)\big|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\Big|\sigma^1(\xi,u_m^1(\xi,\tau))\varphi_m^1(\xi,\tau)-\sigma^2(\xi,u_m^2(\xi,\tau))\varphi_m^2(\xi,\tau)\Big|\,d\tau$$

$$\leqslant\left\{\frac{T}{8}\big[2\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)+3\big(2\|\mathbf{g}^0\|\big)^2\big]\right\}T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|=:C_3\big(T,\|\mathbf{g}^0\|\big)T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|,\quad (x,t)\in G_T,$$

$$\big|\Lambda_{4+m}\mathbf{g}^1(x,t)-\Lambda_{4+m}\mathbf{g}^2(x,t)\big|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\big|\sigma^1(\xi,u_m^1(\xi,t+x-\xi))\varphi_m^1(\xi,t+x-\xi)-\sigma^2(\xi,u_m^2(\xi,t+x-\xi))\varphi_m^2(\xi,t+x-\xi)\big|$$

$$+\left|\sigma^1(\xi,u_m^1(\xi,t-x+\xi))\varphi_m^1(\xi,t-x+\xi)-\sigma^2(\xi,u_m^2(\xi,t-x+\xi))\varphi_m^2(\xi,t-x+\xi)\right|\Big)\,d\xi$$
$$\leqslant\left\{\frac{1}{4}\left[4\left(2\|\mathbf{g}^0\|\right)+6\left(2\|\mathbf{g}^0\|\right)^2\right]\right\}T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|$$
$$=:C_4\left(T,\|\mathbf{g}^0\|\right)T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|,\quad (x,t)\in G_T,\quad m=1,2,$$

$$\left|\Lambda_{6+m}\mathbf{g}^1(x,t)-\Lambda_{6+m}\mathbf{g}^2(x,t)\right|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\left|\sigma_1^1(\xi)\left(\varphi_m^1\right)^2(\xi,t+x-\xi)-\sigma_1^2(\xi)\left(\varphi_m^2\right)^2(\xi,t+x-\xi)\right|$$
$$+\left|\sigma^1(\xi,u_m^1(\xi,t+x-\xi))\psi_m^1(\xi,t+x-\xi)-\sigma^2(\xi,u_m^2(\xi,t+x-\xi))\psi_m^2(\xi,t+x-\xi)\right|$$
$$+\left|\sigma_1^1(\xi)\left(\varphi_m^1\right)^2(\xi,t-x+\xi)-\sigma_1^2(\xi)\left(\varphi_m^2\right)^2(\xi,t-x+\xi)\right|$$
$$+\left|\sigma^1(\xi,u_m^1(\xi,t-x+\xi))\psi_m^1(\xi,t-x+\xi)-\sigma^2(\xi,u_m^2(\xi,t-x+\xi))\psi_m^2(\xi,t-x+\xi)\right|\Big)\,d\xi$$
$$\leqslant\left\{\frac{1}{4}\left[\left(2\|\mathbf{g}^0\|\right)^2+4\left(2\|\mathbf{g}^0\|\right)^2+6\left(2\|\mathbf{g}^0\|\right)^2\right]\right\}T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|$$
$$=:C_5\left(T,\|\mathbf{g}^0\|\right)T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|,\quad (x,t)\in G_T,\quad m=1,2,$$

$$\left|\Lambda_{8+m}\mathbf{g}^1(x,t)-\Lambda_{8+m}\mathbf{g}^2(x,t)\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(3\left|\sigma_1^1(\xi)\varphi_m^1(\xi,t+x-\xi)\psi_m^1(\xi,t+x-\xi)-\sigma_1^2(\xi)\varphi_m^2(\xi,t+x-\xi)\psi_m^2(\xi,t+x-\xi)\right|$$
$$+\left|\sigma^1(\xi,u_m^1(\xi,t+x-\xi))\chi_m^1(\xi,t+x-\xi)-\sigma^2(\xi,u_m^2(\xi,t+x-\xi))\chi_m^2(\xi,t+x-\xi)\right|$$
$$+3\left|\sigma_1^1(\xi)\varphi_m^1(\xi,t-x+\xi)\psi_m^1(\xi,t-x+\xi)-\sigma_1^2(\xi)\varphi_m^2(\xi,t-x+\xi)\psi_m^2(\xi,t-x+\xi)\right|$$
$$+\left|\sigma^1(\xi,u_m^1(\xi,t-x+\xi))\chi_m^1(\xi,t-x+\xi)-\sigma^2(\xi,u_m^2(\xi,t-x+\xi))\chi_m^2(\xi,t-x+\xi)\right|\Big)\,d\xi$$
$$\leqslant\left\{\frac{1}{4}\left[4\left(2\|\mathbf{g}^0\|\right)+24\left(2\|\mathbf{g}^0\|\right)^2\right]\right\}T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|$$
$$=:C_6\left(T,\|\mathbf{g}^0\|\right)T\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|,\quad (x,t)\in G_T,\quad m=1,2.$$

Пусть $\rho\in(0,1)$. Выберем T_0 из условия

$$T_0=\min\left\{T_0',\ \frac{\rho}{C_k},\ k=\overline{1,6}\right\},$$

тогда

$$\|\mathbf{\Lambda}\mathbf{g}^1-\mathbf{\Lambda}\mathbf{g}^2\|_{\mathbf{C}(G(T_0))}\leqslant\rho\,\|\mathbf{g}^1-\mathbf{g}^2\|_{\mathbf{C}(G(T_0''))}.$$

Таким образом, $\mathbf{\Lambda}$ является сжимающим отображением на множестве $\mathbf{R}_{T_0}$. В силу принципа сжимающих отображений на $\mathbf{R}_{T_0}$ существует единственное решение операторного уравнения (49). Теорема 3 доказана. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В случае, когда сила тока нелинейно зависит от электрического напряжения, систему уравнений Максвелла удаётся свести к нелинейному волновому уравнению. Для данного уравнения поставлены прямая и обратная задачи. Проведено исследование прямой задачи, получена априорная оценка, доказаны теоремы существования и единственности решения. Рассмотрена обратная задача определения двух неизвестных функций $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$, входящих в коэффициент поглощения $\sigma(x,u)=\sigma_0(x)+\sigma_1(x)u$. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Все полученные результаты являются новыми.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выведем здесь уравнение (1). Рассмотрим уравнения электродинамики

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{E}), \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4, \tag{64}$$

где $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ — векторы магнитной и электрической напряжённостей поля, $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ — сила электрического тока, ε и μ — положительные постоянные, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Примем, что сила тока определяется следующей формулой:

$$\mathbf{j}(\mathbf{E}) = \left(a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{3} a_i(\mathbf{x}) E_i(\mathbf{x}, t) \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t).$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{H} = (0, H_2, 0), \mathbf{E} = (E_1, 0, 0)$ и компоненты H_2 и E_1 зависят только от одной пространственной переменной x_3. Тогда система уравнений (64) сводится к системе из двух скалярных уравнений

$$-\frac{\partial H_2}{\partial x_3} = \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} + j_1(x_3, E_1), \qquad \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = -\mu \frac{\partial H_2}{\partial t}, \tag{65}$$

в которой $j_1(x_3, E_1) = a_0(x_3)E_1 + a_1(x_3)E_1^2$. Исключая из (65) функцию H_2, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x_3^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \mu\big(a_0(x_3) + 2a_1(x_3)E_1\big) \frac{\partial E_1}{\partial t}.$$

Обозначая

$$x_3 = x, \quad u(x,t) = E_1(x, t\sqrt{\varepsilon\mu}),$$
$$\sigma_0(x) = a_0(x)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \sigma_1(x) = 2a_1(x)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \sigma(x,u) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)u,$$

приходим к уравнению (1).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // Comm. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609.
2. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equ. 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.
3. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // Internat. Math. Res. Notices. 2022. V. 17. P. 13181–3211.
4. *Barreto A. S., Stefanov P.* Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation // arXiv. 2021; DOI: 10.48550/arXiv.2107.08513

5. *Chen X., Lassas M., Oksanen L., Paternain G. P.* Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity // J. Eur. Math. Soc. 2022. V. 24, N 7. P. 2191–2232.

6. *Barreto A. S., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse scattering for critical semilinear wave equations // Pure Appl. Anal. 2022. V. 4, N 2. P. 191–223.

7. *Lassas M., Liimatainen T., Potenciano-Machado L., Tyni T.* Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation // J. Differ. Equ. 2020. V. 337. P. 395–435.

8. *Barreto A. S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53.

9. *Романов В. Г., Бугуева Т. В.* Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 3. С. 154–169; DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.313

10. *Романов В. Г., Бугуева Т. В.* Задача об определении коэффициента при степенной градиентной нелинейности в полулинейном волновом уравнении // Сиб. журн. индустр. матем. 2023. Т. 26, № 2. С. 113–129; DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.210

11. *Milani A.* Singular limits of quasi-linear hyperbolic systems in a bounded domain of $\mathbb{R}^3$ with applications to Maxwell's equations // Pacific J. Math. 1985. V. 116, N 1. P. 111–129; DOI: 10.2140/pjm.1985.116.111

12. *Babin A., Figotin A.* Nonlinear Maxwell Equations in Inhomogeneous Media // Commun. Math. Phys. 2003. V. 241. P. 519–581; DOI: 10.1007/s00220-003-0939-9

13. *Colin T., Nkonga B.* Multiscale numerical method for nonlinear Maxwell equations // Discrete Contin. Dyn. Syst. B. 2005. V. 5, N 3. P. 631–658; DOI: 10.3934/dcdsb.2005.5.631

14. *Wei C., Li A.* Nonexistence and existence of nontrivial solutions for Klein—Gordon—Maxwell systems with competing nonlinearities // Bound. Value Probl. 2019. V. 31; DOI: 10.1186/s13661-019-1146-8

15. *Schnaubelt R., Spitz M.* Local wellposedness of quasilinear Maxwell equations with absorbing boundary conditions // Evol. Equ. Control Theory. 2021. V. 10, N. 1. P. 155–198; DOI: 10.3934/eect.2020061

16. *Dohnal T., Ionescu-Tira M., Waurick M.* Well-posedness and exponential stability of nonlinear Maxwell Equations for dispersive materials with interface // J. Differ. Equ. 2024. V. 383. P. 24–77; DOI: 10.1016/j.jde.2023.11.005

17. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче для нелинейного гиперболического уравнения // Сиб. матем. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 560–576; DOI: 10.33048/smzh.2024.65.310

18. *Романов В. Г.* Обратная задача для волнового уравнения с двумя нелинейными членами // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 4. С 508–520; DOI: 10.31857/S0374064124040061

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.958

AN INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF ELECTRODYNAMICS WITH NONLINEAR ABSORPTION

V. G. Romanov[1a], **T. V. Bugueva**[1,2b]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,*
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,
[2]*Novosibirsk State University,*
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]romanov@math.nsc.ru, [b]bugueva@math.nsc.ru

Received 07.03.2025, revised 06.06.2025, accepted 06.06.2025

Abstract. The inverse problem of determining two unknown functions $\sigma_0(x)$ and $\sigma_1(x)$ included in the absorption coefficient $\sigma(x,u) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)u$ in the equation of electrodynamics is considered. An a priori estimate of the solution of the direct problem is obtained, and the existence and uniqueness theorems of solutions to direct and inverse problems are proved.

Keywords: nonlinear equation, electrodynamics, inverse problem, local existence.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.205

REFERENCES

1. Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 2018, Vol. 360, pp. 555–609.
2. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations. *Comm. PDE.*, 2019, Vol. 44, No. 11, pp. 1140–1158.
3. Hintz P., Uhlmann G., Zhai J. An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, 2022, Vol. 17, pp. 13181–3211.
4. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation. *Analysis of PDEs*, 2021; DOI: 10.48550/arXiv.2107.08513
5. Chen X., Lassas M., Oksanen L., Paternain G.P. Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity. *J. Eur. Math. Soc.*, 2022, Vol. 24, No. 7, pp. 2191–2232.
6. Barreto A.S., Uhlmann G., Wang Y. Inverse scattering for critical semilinear wave equations. *Pure Appl. Anal.*, 2022, Vol. 4, N0. 2, pp. 191–223.
7. Lassas M., Liimatainen T., Potenciano-Machado L., Tyni T. Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation. *J. Differ. Equ.*, 2020, Vol. 337, pp. 395–435.
8. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime. *Analysis of PDEs*, 2022, Vol. 392, pp. 25–53.
9. Romanov V.G., Bugueva T.V. The problem of determining the coefficient of the nonlinear term in a quasilinear wave equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2022, Vol. 16, No. 3, pp. 550–562; DOI: 10.1134/S1990478922030188
10. Romanov V.G., Bugueva T.V. The problem of determining the coefficient multiplying a power-law gradient nonlinearity in a semilinear wave equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 370–384; DOI: 10.1134/S1990478923020151

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2025, Vol. 19, No. 2.

11. Milani A. Singular limits of quasi-linear hyperbolic systems in a bounded domain of $\mathbb{R}^3$ with applications to Maxwell's equations. *Pacific J. Math.*, 1985, Vol. 116, No. 1, pp. 111–129; DOI: 10.2140/pjm.1985.116.111
12. Babin A., Figotin A. Nonlinear Maxwell equations in inhomogeneous media. *Commun. Math. Phys.*, 2003, Vol. 241, pp. 519–581; DOI:10.1007/s00220-003-0939-9
13. Colin T., Nkonga B. Multiscale numerical method for nonlinear Maxwell equations. *Discrete and Continuous Dynamical Syst. - Series B (DCDS-B)*, 2005, Vol. 5, No. 3, pp. 631–658; DOI: 10.3934/dcdsb.2005.5.631
14. Wei C., Li A. Nonexistence and existence of nontrivial solutions for Klein—Gordon—Maxwell systems with competing nonlinearities. *Bound. Value Probl.*, 2019, Vol. 31; DOI: 10.1186/s13661-019-1146-8
15. Schnaubelt R., Spitz M. Local wellposedness of quasilinear Maxwell equations with absorbing boundary conditions. *Evolution Equations and Control Theory (EECT)*, 2021, Vol. 10, No. 1, pp. 155–198; DOI: 10.3934/eect.2020061
16. Dohnal T., Ionescu-Tira M., Waurick M. Well-posedness and exponential stability of nonlinear Maxwell Equations for dispersive materials with interface. *Analysis of PDEs*; DOI: 10.1016/j.jde.2023.11.005
17. Romanov V.G. A stability estimate for a solution to an inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation. *Sib. Math. J.*, 2024, Vol. 65, No. 3, pp. 611–626.
18. Romanov V.G. An inverse problem for the wave equation with two nonlinear terms. *Dif. Equ.*, 2024, Vol. 60, No. 4, pp. 479–491.