УДК 519.6:004.4

О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

© 2025 **Е. В. Антипина**[a], **С. А. Мустафина**[b], **А. Ф. Антипин**[c]

Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32, г. Уфа 450076, Россия

E-mails: [a]stepashinaev@ya.ru, [b]mustafinasa@mail.ru, [c]andrejantipin@ya.ru

Поступила в редакцию 29.09.2024 г.; после доработки 07.11.2025 г.;
принята к публикации 07.11.2025 г.

Предложен подход к поиску приближенного решения нелинейной задачи оптимального быстродействия на основе генетических алгоритмов. Применение генетических алгоритмов подразумевает конечномерную аппроксимацию исходной задачи и поиск управляющих параметров в классе кусочно-постоянных функций. Преимуществами предложенного подхода являются отсутствие необходимости применения дополнительных методов и преобразований задачи, возможность применения для решения многоэкстремальных задач, а также отсутствие требований к виду уравнений модели процесса. Для решения конечномерной задачи приведен модифицированный генетический алгоритм с вещественным кодированием. Работа алгоритма апробирована на примерах нелинейных задач оптимального быстродействия. Проведено сравнение полученных результатов решения задач с результатами применения других методов.

Ключевые слова: задача оптимального быстродействия, нелинейные управляемые системы, конечномерная аппроксимация, генетические алгоритмы, эволюционные методы.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.302

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач оптимального управления динамической системой, часто возникающей на практике, является задача оптимального быстродействия, заключающаяся в поиске управления, переводящего систему из начального состояния в заданное конечное состояние за минимальное время. Методам решения линейных задач быстродействия посвящено большое количество работ (например, [1]–[4]). Однако большинство сложных процессов управления (например, в робототехнике, химической технологии, навигации и др.) обладает свойством нелинейности [5].

Одним из подходов к решению нелинейных задач быстродействия является применение принципа максимума Понтрягина, обеспечивающего высокую точность вычислений [6, 7]. Недостатком использования данного метода при решении практических задач является определения начальных условий для решения сопряжённой системы, с помощью которой формулируются необходимые условия оптимальности, с учётом предметной области решаемой задачи.

В работе [8] представлен итерационный метод решения нелинейной задачи оптимального быстродействия с аддитивным управлением, основанный на построении последовательностей смежных симплексов с вершинами на границах областей достижимости. Метод применим для решения класса задач, в которых система дифференциальных уравнений, описывающая динамику процесса, линейна по управлению, а также разделена по состоянию и управлению. Применение метода для задач с нелинейным вхождением управления невозможно.

В работе [9] предложен метод определения оптимального по быстродействию управления для систем, в которых можно выделить линейное вхождение фазовых переменных и управления. Для систем с нелинейным управлением и нелинейным вхождением переменных состояния метод неприменим.

Исследование нелинейной задачи быстродействия приведено в статье [10], где доказываются достаточные условия существования оптимального управления и проанализированы его точки переключения. При этом управляемая система должна удовлетворять условию гладкости.

Рассмотренные методы решения нелинейных задач быстродействия применимы при дополнительных условиях, накладываемых на вид системы дифференциальных уравнений, описывающую динамику процесса (линейное вхождение управления, линейное вхождение переменных состояния процесса, условие гладкости и др.). В связи с этим актуальной является разработка методов и алгоритмов решения нелинейных задач быстродействия общего вида, без дополнительных ограничений, накладываемых на математическое описание процесса.

Оптимизация нелинейных динамических систем с помощью аналитических методов является трудоёмким процессом. Часто на практике достаточно получить приближённое решение задачи оптимального управления. Поэтому при исследовании нелинейных систем часто применяется метод конечномерной аппроксимации задачи управления, сводящей исходную задачу бесконечномерной оптимизации к задаче математического программирования.

При решении конечномерных задач большинство методов оптимизации эффективно отыскивают оптимум при удачно выбранном начальном приближении, а также применяются только для гладких и выпуклых задач (например, градиентные методы [11]). Нелинейная задача быстродействия может иметь невыпуклую область достижимости и, как следствие, локальные экстремумы, что создаёт дополнительные трудности в разработке процедуры поиска решения.

Одним из способов решения оптимизационных задач является применение методов эволюционного моделирования. К ним относятся генетические алгоритмы (ГА), широко применяющиеся для решения различных задач оптимизации, когда традиционные методы могут быть неэффективны [12, 13]. Преимуществами генетических алгоритмов являются отсутствие необходимости вычисления градиента целевой функции, применимость к негладким или невыпуклым областям поиска.

Исследования, посвящённые разработке генетических алгоритмов, направлены, в основном, для решения задач оптимизации в различных областях (например, [14]–[16]). Значительно меньше работ посвящено применению генетических алгоритмов для решения задач оптимального управления. В работе [17] приведён генетический алгоритм для решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории. В работе [18] рассматривается решение задачи оптимального управления для случая линейного вхождения управления на основе принципа максимума Понтрягина и генетического алгоритма. В статье [19] показано решение задачи оптимального управления с закреплённым правым концом траектории с помощью генетического алгоритма и метода штрафов. Однако применение сторонних методов требует дополнительных аналитических выводов (например, сопряжённой системы), либо введения новых параметров (например, параметр штрафа), значения которых необходимо подбирать для конкретной задачи.

Целью работы является разработка генетического алгоритма для определения приближённого решения нелинейной задачи оптимального быстродействия. Новизна предлагаемого авторами подхода заключается в следующем:

1) алгоритм не требует использования дополнительных методов и преобразований исходной задачи;

2) алгоритм не предъявляет требования к виду уравнений модели процесса и применим к процессам, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений общего вида.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемый процесс описывается нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — вектор фазового состояния, $u(t) \in R^s$ — вектор управляющих воздействий, компоненты которого удовлетворяют ограничениям

$$\underline{u}_j(t) \leqslant u_j(t) \leqslant \overline{u}_j(t), \quad j = \overline{1, s}, \tag{2}$$

$f(x(t), u(t), t)$ — вектор-функция, непрерывная вместе со своими частными производными.

Заданы начальное и конечное состояния управляемого процесса:

$$x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1.$$

Требуется найти допустимое управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, переводящее систему (1) из начального состояния x^0 в конечное состояние x^1 за минимальное время T^*, т. е. необходимо минимизировать целевой функционал:

$$J(u) = T \to \min. \tag{3}$$

Для перехода к конечномерной задаче разобьём отрезок $[0, T]$ на части точками $t_0, t_1, \ldots, t_r$ с шагом $h = \frac{T}{r}$ так, что $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = T$. В данных узлах будем искать значения управляющих функций $u_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, а для получения их промежуточных значений применим кусочно-постоянную аппроксимацию

$$u_j(t) = u_j(t_k) = u_{jk}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{0, r-1}.$$

Ограничения (2) преобразуются к виду

$$\underline{u}_{jk} \leqslant u_{jk} \leqslant \overline{u}_{jk}, \quad \underline{u}_{jk} = \underline{u}_j(t_k), \quad \overline{u}_{jk} = \overline{u}_j(t_k), \quad j = \overline{1, s}, \quad k = \overline{0, r-1}.$$

Целевой функционал примет вид:

$$J(u) = t_r \to \min.$$

Система дифференциальных уравнений (1) заменяется разностными уравнениями с помощью какого-либо численного метода (Эйлера, Рунге — Кутта и др.)

2. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Для решения конечномерной задачи оптимального быстродействия сформулируем генетический алгоритм с вещественным кодированием. Итерационная работа классического генетического алгоритма включает в себя процедуру смены поколений особей, которые являются потенциальными решениями оптимизационной задачи, и применения к ним операций отбора (селекции), скрещивания (кроссовера) и мутации. Функцией приспособленности, определяющей пригодность особи в качестве решения задачи, является целевая функция. В качестве критерия останова обычно рассматривается достижение максимального количества итераций.

Модифицируем генетический алгоритм с вещественным кодированием применительно для решения задачи оптимального быстродействия. Время T одновременно является управляющим параметром и входит в выражение целевого функционала. Будем рассматривать его только в качестве управления. Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots, p_s, p_{s+1})^{\mathrm{T}}$ — особь, являющаяся возможным решением задачи быстродействия, элементы которой соответствуют продолжительности функционирования системы (1) и значениям управляющих функций $u_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, в дискретные моменты времени

$$p_j = \begin{cases} (p_{j0}, p_{j1}, \ldots, p_{jr-1}) = (u_{j0}, u_{j1}, \ldots, u_{jr-1}), \quad j = \overline{1, s}, \\ T, \quad j = s + 1. \end{cases} \tag{4}$$

Набор из q таких особей P^l, $l = \overline{1, q}$, образует популяцию.

Обозначим за $\widetilde{x}^1$ вектор фазовых координат, вычисленный для особи P в конечный момент времени p_{s+1}. Функцию приспособленности зададим в виде расстояния между вектором $\widetilde{x}^1$ и заданным вектором конечного состояния процесса x^1:

$$G(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\widetilde{x}_i^1 - x_i^1)^2} \to \min. \tag{5}$$

Чем меньше значение $G(P)$, тем особь более приспособленная. Чтобы вычислить значение функции приспособленности (5) для особи P^l, необходимо найти численное решение системы дифференциальных уравнений (1) на промежутке времени $[0, p_{s+1}^l]$ для кусочно-постоянного управления с узлами $(p_{j0}^l, p_{j1}^l, \ldots, p_{jr-1}^l)$, $j = \overline{1, s}$.

В качестве условия окончания поиска примем не фиксированное количество итераций смены популяции, а выполнение неравенства

$$G(P) < \varepsilon, \tag{6}$$

где ε — заданный пользователем параметр.

Поскольку условие (6) может быть выполнено при разных наборах управляющих параметров, то будем запоминать возможные решения в специальный массив **best**. Возможные решения можно потерять на этапе мутации, поскольку в следующее поколение переходит одна из случайно выбранных особей-мутантов. Поэтому на этапе мутации дополнительно будем проводить проверку выполнения условия (6). В конце работы алгоритма из особей массива **best**, удовлетворяющих неравенству (6), в качестве решения выберем ту особь, у которой ген-время принимает наименьшее значение.

Генетический алгоритм для поиска приближённого решения задачи оптимального быстродействия состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задать параметры алгоритма: q — количество особей в популяции, r — количество точек разбиения временного интервала, $\overline{T}$ — максимальное значение времени процесса управления, ε — параметр окончания поиска.

Заменить систему дифференциальных уравнений (1) разностным аналогом с помощью одного из численных методов.

Шаг 2. Создать начальную популяцию управляющих параметров P^l, $l = \overline{1, q}$. Элементы p_{jk}^l для $j = \overline{1, s}$ вычислить по формуле

$$p_{jk}^l = \underline{u}_{jk} + \alpha_{jk}(\overline{u}_{jk} - \underline{u}_{jk}),$$

где $\alpha_{jk} \in [0, 1]$ — случайное число, $k = \overline{0, r-1}$.

Гену p_{s+1}^l присвоить случайное значение из отрезка $[0, \overline{T}]$.

Шаг 3. Для каждой особи начальной популяции P^l, $l = \overline{1, q}$, рассчитать шаг разбиения интервала времени $[0, p_{s+1}^l]$ по формуле $h = p_{s+1}^l / r$ и приспособленность $G(P^l)$. Особи, для которых выполнено условие (6), поместить в массив **best**.

Шаг 4. Выполнить операцию селекции. Из текущей популяции выбрать две особи P^a и P^b с помощью турнирного отбора: в первом турнире случайным образом выбираются две различные особи, из которых случайным образом во втором турнире отбирается одна особь.

Шаг 5. Выполнить операцию скрещивания. Сформировать две особи-потомка с помощью арифметического кроссовера:

$$\mathrm{Potomok}^1 = \lambda P^a + (1-\lambda)P^b, \quad \mathrm{Potomok}^2 = \lambda P^b + (1-\lambda)P^a,$$

где $\lambda \in (0,1)$ — случайное число.

Шаг 6. Выполнить операцию мутации. Случайным образом выбрать ген каждого из потомков. Если ген соответствует управлению u_{jk}, то заменить его случайным значением из промежутка $[\underline{u}_{jk}, \overline{u}_{jk}]$. Если ген соответствует значению времени T, то заменить его случайным значением из промежутка $[0, \overline{T}]$.

Шаг 7. Вычислить приспособленность каждой особи, полученной на этапе мутации.

Шаг 8. Для каждой особи-мутанта проверить условие (6). Если оно выполнено, то поместить особь-мутанта в массив **best**.

Шаг 9. Из текущей популяции выбрать наименее приспособленную особь и заменить её случайно выбранным мутантом.

Шаг 10. Проверить условие окончания расчётов. Если условие (6) выполнено, то перейти на шаг 11, иначе перейти на шаг 4.

Шаг 11. В массиве **best** найти особь, у которой ген p_{s+1} принимает наименьшее значение. Приближённым решением задачи оптимального быстродействия является значение p_{s+1}, которое соответствует наименьшему времени окончания процесса T^*, а остальные элементы особи соответствуют значениям управляющих функций $u_j(t)$ в дискретные моменты времени согласно формуле (4).

Таким образом, в классический генетический алгоритм с вещественным кодированием авторами внесены следующие модификации:

1) специальная структура особи, включающая в себя дискретные значения управляющих параметров и времени;

2) в качестве приспособленности особей рассматривается не целевой функционал в форме (3), а отклонение между заданным конечным состоянием процесса и вычисленным с помощью алгоритма;

3) введён специальный массив **best** для хранения решений, удовлетворяющих условию (6), из которых впоследствии выбирается решение с наименьшим значением времени;

4) условием окончания расчётов является не максимальное количество поколений популяции, а отклонение от терминального состояния управляемого процесса.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проведения численных экспериментов сформулированный алгоритм реализован в среде визуального программирования Delphi. Для решения системы дифференциальных уравнений применён метод Рунге — Кутта четвёртого порядка.

Задача оптимального быстродействия с невыпуклой областью достижимости

Рассмотрим задачу оптимального управления колебательным движением маятника, которая содержит локальные экстремумы ввиду невыпуклой области достижимости.

Математическая модель колебательного движения маятника представляется системой дифференциальных уравнений [20]:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= u - \sin(x_1). \end{aligned} \tag{7}$$

На управление $u(t)$ наложены ограничения

$$-1 \leqslant u(t) \leqslant 1, \quad t \in [0, T]. \tag{8}$$

Начальное и конечное состояния заданы значениями:

$$x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 0, \tag{9}$$

$$x_1(T) = 12, \quad x_2(T) = 1. \tag{10}$$

Целевой функционал задан в форме (3).

Требуется определить управление $u(t)$ из области допустимого управления, задаваемой неравенствами (8), которое переводит систему (7) из состояния (9) в состояние (10) за наименьшее время.

Генетический алгоритм применён со следующими параметрами: количество точек разбиения интервала времени $r = 50$, максимальное значение времени $\overline{T} = 10$, размер популяции $q = 50$, параметр окончания вычислений $\varepsilon = 10^{-2}$. В качестве значений параметров алгоритма выбран набор, при котором достигается наименьшее значение целевого функционала при наименьшем времени вычислений. Данный набор параметров был получен в результате проведения ряда вычислительных экспериментов, проводимых с использованием разработанного программного обеспечения. Фиксировался размер популяции, равный 20, 50 и 80 особей, точность 0,01 и 0,001, количество точек r, равное 50 и 100; изменение значения параметра $\overline{T}$ не оказывает существенное влияние на время расчётов.

Функция приспособленности имеет вид: $G(P) = \sqrt{(\widetilde{x}_1(T) - 12)^2 + (\widetilde{x}_2(T) - 1)^2)}$.

В результате получено управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2.5], \\ -1, & t \in (2.5, 4.99], \end{cases} \tag{11}$$

которому соответствуют значения фазовых переменных, показанных на рис. 1.

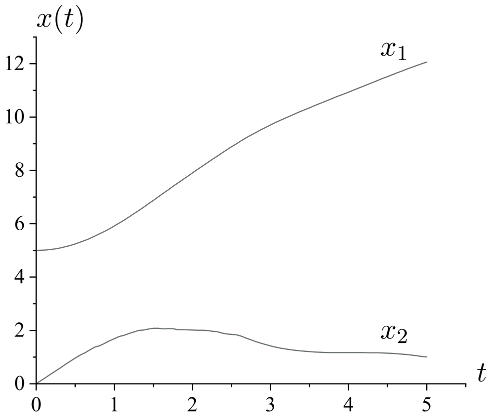

Рис. 1. Динамика фазовых переменных

Наименьшее время процесса управления составило $T^* = 4.99$, отклонение от терминальных условий равно 0.008.

Решение задачи (7)–(10) получено также с помощью метода вариаций в пространстве управлений. Для этого произведён поиск решения терминальных задач на отрезке $[0, \overline{T}]$, где $\overline{T}$ уточнялось методом дихотомии. Задача решена с шагом 0.1 по управлению, количеством точек разбиения интервала времени, равным 50, и начальным приближением $u^0(t) = 0$, $T^0 = 10$. Получено $T^* = 5$, а управление по структуре сопоставимо с (11).

Однако, при начальном приближении $u^0(t) = 1$, $T^0 = 1$ метод локальных вариаций попал в локальный оптимум. Наименьшее время процесса $T^* = 5.53$, при этом управляющая функция имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 3.2], \\ -1, & t \in (3.2, 5.53], \end{cases}$$

отклонение от терминальных условий равно 0.0094.

Работа генетического алгоритма протестирована для решения задачи (7)–(10) при разных начальных приближениях. На шаге 2 алгоритма значения оптимизируемых параметров заполнялась фиксированными значениями:

$$p_{1k}^l = u^0, \quad p_2^l = T^0, \quad l = \overline{1, q}, \quad k = \overline{0, r-1}.$$

В табл. 1 показано значение наименьшего времени T^* при различных начальных приближениях $u^0(t)$ и T^0. Из таблицы видно, что при разных начальных значениях искомых параметров происходит несущественное изменение наименьшего времени T^*, но количество итераций его поиска различно.

Таблица 1

Значения наименьшего времени в задаче (7)–(10) при разных начальных приближениях

$u^0(t)$	T^0	Количество итераций	T^*
1	1	2876	4,993
-1	1	2615	4,998
1	10	3263	5,011
-1	10	3377	4,991
0	10	3285	5,018
0	1	2922	4,997

Из приведенного примера видно, что генетический алгоритм эффективнее ищет решение задачи быстродействия с невыпуклой областью достижимости, по сравнению с методом вариаций в пространстве управлений.

Задача оптимального управления химическим процессом

Применим генетический алгоритм поиска решения задачи быстродействия для процесса получения фталевого ангидрида, математическая модель которого содержит экспоненциальную зависимость кинетических констант от управления.

Динамика состояния процесса получения фталевого ангидрида описывается системой дифференциальных уравнений [21]:

$$\begin{gathered} \dot{x_1} = -k_1(u)x_1 - k_3(u)x_1 - k_4(u)x_1, \\ \dot{x_2} = k_1(u)x_1 - k_2(u)x_2 - k_5(u)x_2, \\ \dot{x_3} = k_3(u)x_1 + k_5(u)x_2 - k_6(u)x_3, \\ \dot{x_3} = k_2(u)x_2 + k_4(u)x_1, \\ \dot{x_3} = k_6(u)x_3, \end{gathered} \tag{12}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_5)$ — вектор концентраций веществ (моль/л), $t \in [0, T]$ — время протекания реакции (ч), u — температура реакции (K), $k_j(u)$ — константа скорости j-й стадии (1/ч, $j = \overline{1,6}$), зависящая от температуры u, исходя из уравнения Аррениуса

$$k_j(u) = k_{0j} e^{-E_j/Ru},$$

где k_{0j} — предэкспоненциальный множитель (1/ч), E_j — энергии активации j-й стадии (Дж/моль), R — универсальная газовая постоянная (8.31 Дж/(моль·K)).

Численные значения кинетических параметров реакции синтеза фталевого ангидрида приведены в работе [21].

Начальные концентрации веществ заданы следующими значениями (моль/л):

$$x_1(0) = 1, \quad x_i(0) = 0, \quad i = \overline{2,5}. \tag{13}$$

На значения параметра управления наложены ограничения:

$$620\text{K} \leqslant u(t) \leqslant 644\text{K}, \quad t \in [0, T]. \tag{14}$$

Рассмотрим задачу быстродействия для процесса синтеза фталевого ангидрида, в которой задана концентрация промежуточного вещества x_2 в конце реакции, равная 0.28 моль/л:

$$x_2(T) = 0.28. \tag{15}$$

Параметры генетического алгоритма заданы значениями: $r = 50$, $\overline{T} = 5$, $q = 50$, $\varepsilon = 10^{-2}$. Приспособленность особей определяется по формуле

$$G(P) = \sqrt{(\widetilde{x}_2(T) - 0.28)^2}.$$

Наименьшее время протекания процесса составило 0.18 ч, при этом концентрация промежуточного вещества $x_2(T^*) = 0.277$ моль/л. Управление $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 620, & t \in [0, 0.08], \\ 1200t + 524, & t \in (0.08, 0.1], \\ 644, & t \in (0.1, 0.18]. \end{cases}$$

Изменение концентраций веществ во времени, соответствующее вычисленному управлению, показано на рис. 2.

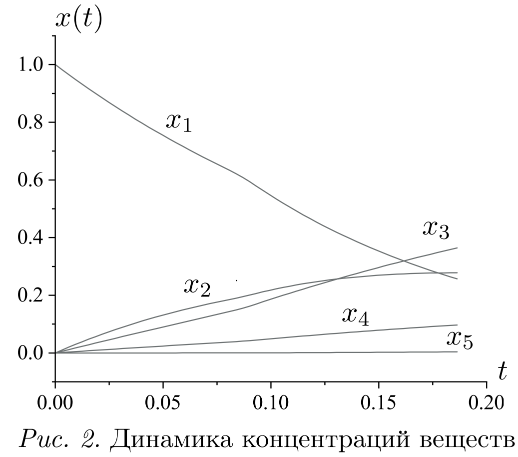

Рис. 2. Динамика концентраций веществ

Проведено сравнение разработанного генетического алгоритма с генетическим алгоритмом без модификации. Параметры алгоритма заданы теми же значениями, которые применялись при решении задачи модифицированным генетическим алгоритмом. Возможные решения на этапе мутации не запоминались, а первая особь, удовлетворяющее условию (6), принималась в качестве приближённого решения задачи (12)–(15). Оцениваемые показатели эффективности применения алгоритмов и их полученные значения приведены в табл. 2. Значения показателей оценивалось по результатам 20 запусков каждого их алгоритмов при разных значениях точности ε. Надёжность определялась как отношение количества успешных запусков алгоритма, в которых достигалось лучшее значение T^*, к общему количеству запусков.

Таблица 2

Результаты тестирования генетических алгоритмов

Алгоритм	Лучшее значение T^*	Среднее значение T^*	Надёжность	Число итераций
$\varepsilon = 10^{-1}$				
ГА без модификации	0.238	0.241	0.80	2028
Модифицированный ГА	0.188	0.190	0.85	2011
$\varepsilon = 10^{-2}$				
ГА без модификации	0.193	0.196	0.90	4193
hline Модифицированный ГА	0.180	0.182	0.95	3626
$\varepsilon = 10^{-3}$				
ГА без модификации	0.188	0.190	0.95	5482
Модифицированный ГА	0.180	0.181	0.95	4578

Из табл. 2 видно, что при низкой точности вычислений ($\varepsilon = 10^{-1}$) количество итераций, за которое найдено решение обоими алгоритмами, отличается незначительно при небольшой разнице в уровне надёжности. При этом значение T^*, рассчитанное с помощью модифицированного алгоритма меньше, по сравнению с алгоритмом без модификации. С увеличением значения параметра ε наименьшее время T^*, найденное обоими методами, практически сравнивается, однако увеличивается время вычисления решения с помощью алгоритма без модификации. Поэтому можно сделать вывод, что при небольшой точности вычислений время работы алгоритмов примерно одинаковое, но лучшее значение T^* вычисляет модифицированный алгоритм. Для получения более точного решения модифицированному алгоритму требуется меньше времени, по сравнению с алгоритмом без модификации.

Задача об ориентации летательного аппарата

Рассмотрим задачу управления положением летательного аппарата, описываемым системой дифференциальных уравнений [22]:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_3, \\ \dot{x_2} &= x_4, \\ \dot{x_3} &= -x_4 + u_1 \sin(u_2), \\ \dot{x_4} &= x_3 + u_1 \cos(u_2), \end{aligned} \tag{16}$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ — переменные, определяющие фазовое состояние объекта управления, $u_1(t)$, $u_2(t)$ — управляющие параметры, на которые наложены ограничения

$$0 \leqslant u_1(t) \leqslant 1, \quad -\pi \leqslant u_2(t) \leqslant \pi, \quad t \in [0, T]. \tag{17}$$

Пусть задано начальное и конечное положение летательного аппарата:

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = 10, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0, \tag{18}$$

$$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0, \quad x_3(T) = 0, \quad x_3(T) = 0. \tag{19}$$

Требуется найти значения управляющих параметров $u_1(t)$, $u_2(t)$, удовлетворяющие условиям (17) и переводящие летательный аппарат, описываемый системой (16), из положения (18) в положение (19) за минимальное время T^*.

Приближённое решение задачи (16)–(19) получено с функцией приспособленности

$$G(P) = \sqrt{\widetilde{x}_1^2(T) + \widetilde{x}_2^2(T) + \widetilde{x}_3^2(T) + \widetilde{x}_4^2(T)}$$

и со следующими параметрами алгоритма: $r = 50$, $q = 50$, $\overline{T} = 15$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

На рис. 3 приведены результаты расчётов с помощью генетического алгоритма.

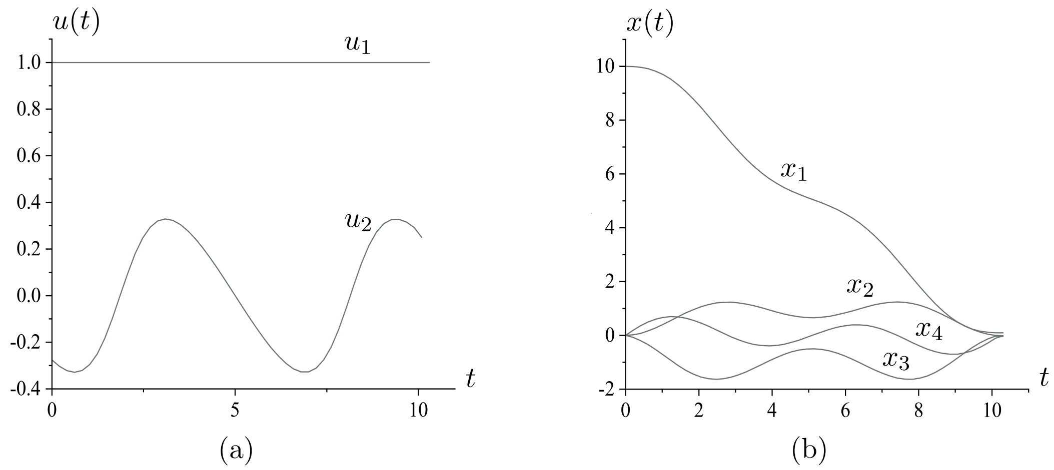

Рис. 3. Приближённое решение задачи (16)–(19):
(a) управляющие функции; (b) фазовые переменные

В результате вычислений получено наименьшее время T, равное 10.3, что на 0.2% превышает его значение, рассчитанного в работе [22] с помощью метода неподвижных точек. Также в работе [22] отмечено, что метод неподвижных точек не сходится к решению задачи при начальном приближении $T^0 = 1$, $u_1^0(t) = 0.5$, $u_2^0(t) = 0.5$. Чтобы проверить эффективность работы генетического алгоритма, было найдено решение задачи быстродействия (16)–(19) при указанных начальных значениях искомых параметров. Для этого начальная популяция на шаге 2 формировалась не случайным образом из области, задаваемой неравенствами (17), и отрезка $[0, \overline{T}]$, а заполнялась фиксированными значениями $p_{jk}^l = 0.5$, $p_{s+1}^l = 1$, $l = \overline{1, q}$, $k = \overline{0, r-1}$, $j = 1, 2$. На рис. 4 показана зависимость управляющих параметров от номера итерации. Из рисунка видно, что значение управляющего параметра u_1 стабилизируется вблизи решения после 2000 итераций, u_2 — после 5000 итераций.

Приведенный пример показывает, что разработанный алгоритм позволяет преодолеть попадание в локальный экстремум и найти приближенное решение задачи.

Таким образом, результаты численных экспериментов подтверждают способность разработанного алгоритма преодолевать локальные минимумы при решении нелинейных задач оптимального быстродействия, что свидетельствует о его эффективности.

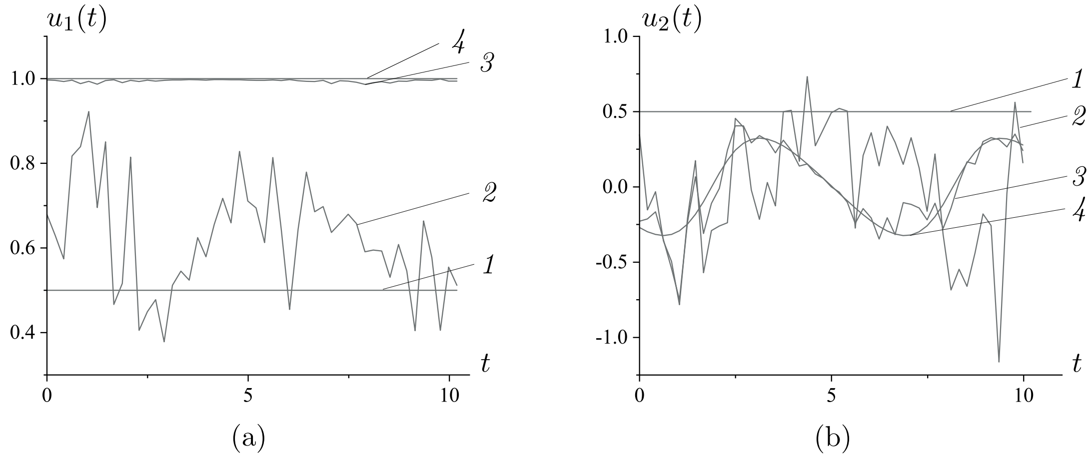

Рис. 4. Итеративное изменение параметров управления u_1, u_2:
(a) *1* — начальное приближение; *2* — после 50 итераций;
3 — после 500 итераций, *4* — после 2000 итераций;
(b) *1* — начальное приближение; *2* — после 50 итераций;
3 — после 2000 итераций; *4* — после 5000 итераций

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный генетический алгоритм позволяет найти приближенное решение нелинейной задачи оптимального быстродействия. Особенностями алгоритма являются специальная структура особи, включающая в себя дискретные значения управляющих параметров и времени, и дополнительный массив, предназначенный для хранения потенциальных решений. В качестве функции приспособленности и условием завершения расчетов задано отклонение от терминальных условий. Алгоритм применим для решения нелинейных задач быстродействия общего вида, и для его использования не требуется применять дополнительные методы и преобразований задачи.

Проведены вычислительные эксперименты по решению задач оптимального быстродействия. Сравнение найденных решений с решениями, рассчитанными с помощью других методов, продемонстрировало эффективность применения разработанного алгоритма.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FZWU-2023-0002). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тятюшкин А.И.* Численные методы расчёта оптимального по быстродействию управления // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2003. Т. 8. С. 164–177.

2. *Шевченко Г.В.* Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1991. Т. 31, № 12. С. 1763–1771.

3. *Флоринский В.В.* Решение линейной задачи быстродействия с двумерным управлением // Научн. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. № 5, Вып. 38. С. 89–95.
4. *Новиков Д.А.* О простейшей задаче быстродействия с фазовым ограничением при управлении пространственной ориентацией тела // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 3. С. 62–72; DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-62-72
5. *Павлюковец С.А., Вельченко А.А., Радкевич А.А.* Математическая модель системы управления мобильным гусеничным роботом с учётом кинематических и динамических параметров // Системный анализ и прикладная информатика. 2023. № 3. С. 33–38; DOI: 10.21122/2309-4923-2023-3-33-38
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
7. *Карамзин Д.Ю.* Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями при ослабленных предположениях управляемости // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2018. № 20. С. 46–61.
8. *Шевченко Г.В.* Метод численного решения нелинейной задачи оптимального быстродействия с аддитивным управлением // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2007. Т. 47, № 11. С. 1843–1854.
9. *Александров В.М.* Итерационный метод вычисления оптимального по быстродействию управления квазилинейными системами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2003. Т. 6, № 3. С. 227–247.
10. *Topunov M.V.* A Nonlinear Time Optimal Control Problem // Automation and Remote Control. 2002. V. 63, N 7. P. 1062–1069.
11. *Срочко В.А.* Модернизация методов градиентного типа в задачах оптимального управления // Изв. вузов. Математика. 2002. № 12. С. 66–78.
12. *Katoch S., Chauhan S.S., Kumar V.* A Review on Genetic Algorithm: Past, Present, and Future // Multimedia Tools and Applications. 2021. V. 80. P. 8091–8126; DOI: 10.1007/s11042-020-10139-6
13. *Трокоз Д.А.* Метод параметрической оптимизации для широких нейронных сетей с использованием генетических алгоритмов // Изв. Самарского научного центра РАН. 2021. Т. 23, № 2. С. 51–56; DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-2-51-56
14. *Kozuch D.J., Stillinger F.H., Debenedetti P.G.* Genetic Algorithm Approach for the Optimization of Protein Antifreeze Activity Using Molecular Simulations // J. Chemical Theory Comput. 2020. V. 16, N 12. P. 7866–7873; DOI: 10.1021/acs.jctc.0c00773
15. *Jalali Z., Noorzai E., Heidari S.* Design and optimization of form and facade of an office building using the genetic algorithm // Sci. Technol. Built Environment. 2020. V. 26, N 2. P. 128–140; DOI: 10.1080/23744731.2019.1624095
16. *Migov D.A., Volzhankina K.A., Rodionov A.S.* Genetic Algorithms for Drain Placement in Wireless Sensor Networks Optimal by the Relibility Criterion // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2021. V. 57, N 3. P. 240–249; DOI: 10.3103/S8756699021030110
17. *Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В.* Применение генетических алгоритмов с бинарным и вещественным кодированием для приближённого синтеза субоптимального управления детерминированными системами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 11. С. 117–129.
18. *Дивеев А.И.* Решение задачи оптимального управления эволюционным алгоритмом на основе принципа максимума Понтрягина // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2018. № 20. С. 3–17.
19. *Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф.* Алгоритм поиска приближённого решения задачи оптимального управления химическим процессом при наличии терминальных ограничений // Вестн. Томск. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 4–12; DOI: 10.17223/19988605/59/1
20. *Горнов А.Ю.* Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009.
21. *Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф.* Программное обеспечение для автоматизации процесса поиска кинетических параметров химических реакций // Программные продукты и системы. 2020. № 1. С. 125–131.

22. *Булдаев А.С.* Методы неподвижных точек в задачах оптимизации управляемых систем // Итоги науки и техники, серия Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 183. С. 22–34; DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-22-34

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.6:004.4

ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF A NONLINEAR PROBLEM OF OPTIMAL PERFORMANCE

© 2025 **E. V. Antipina[a], S. A. Mustafina[b], A. F. Antipin[c]**

Ufa University of Science and Technology, Ufa, 450076 Russia

E-mails: [a]stepashinaev@ya.ru, [b]mustafinasa@mail.ru, [c]andrejantipin@ya.ru

Received 29.09.2024, revised 07.11.2025, accepted 07.11.2025

Abstract. The article proposes an approach to finding an approximate solution to a nonlinear problem of optimal performance based on genetic algorithms. The use of genetic algorithms implies a finite-dimensional approximation of the original problem and the search for control parameters in the class of piecewise constant functions. The advantages of the proposed approach are the lack of need to use additional methods and transformations of the problem, the possibility of using it to solve multi-extremal problems, the absence of requirements for the type of process model equations, and the independence of the solution from the initial approximation. A modified genetic algorithm with real coding is given for solving a finite-dimensional problem. The algorithm is tested on examples of nonlinear problems of optimal performance. The obtained results of solving the problems are compared with the results of using other methods. The independence of the calculated solution from the choice of the initial approximation is shown.

Keywords: optimal performance problem, nonlinear controlled systems, finite-dimensional approximation, genetic algorithms, evolutionary methods.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.302

REFERENCES

1. Tyatyushkin A.I. Chislennye metody rascheta optimal'nogo po bystrodeistviyu upravleniya [Numerical methods for calculating speed-optimal control]. *Izv. Irkutsk. gos. un-ta. Ser. Matematika* [Izv. Irkutsk State University. Ser. Mathematics.], 2003, Vol. 8, pp. 164-–177 (in Russian).
2. Shevchenko G.V. Chislennyi algoritm resheniya lineinoi zadachi optimal'nogo bystrodeistviya [Numerical algorithm for solving a linear problem of optimal performance]. *Zhurn. vychisl. matematiki i matem. fiziki* [J. Calculation. Mathematics Math. Physics.], 1991, Vol. 31, No. 12, pp. 1763—1771 (in Russian).
3. Florinskii V.V. Reshenie lineinoi zadachi bystrodeistviya s dvumernym upravleniem [Solution of a linear time-optimal problem with two-dimensional control]. *Nauchn. vedomosti Belgorod. gos. un-ta. Ser. Matematika. Fizika* [Sci. Vedomosti Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics], 2015, No. 5, pp. 89—95 (in Russian).
4. Novikov D.A. O prosteishei zadache bystrodeistviya s fazovym ogranicheniem pri upravlenii prostranstvennoi orientatsiei tela [On the simplest time-optimal problem with phase constraints in the control of the spatial orientation of a body]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceed. Institute of Mathematics and Mechanics, UB RAS], 2023, Vol. 29, No. 3, pp. 62—72 (in Russian); DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-62-72
5. Pauliukavets S.A., Velchenko A.A., Radkevich A.A. Matematicheskaya model' sistemy upravleniya mobil'nym gusenichnym robotom s uchetom kinematicheskikh i dinamicheskikh parametrov [Mathematical model of the control system of mobile caterpillar robot taking into account kinematic and

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2025, Vol. 19, No. 3.

dynamic parameters]. *Sistemnyi analiz i prikladnaya informatika* [Systems Anal. Appl. Comput. Sci.], 2023, No. 3, pp. 33—38 (in Russian); DOI: 10.21122/2309-4923-2023-3-33-38

6. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
7. Karamzin D.Yu. Printsip maksimuma Pontryagina dlya zadachi optimal'nogo upravleniya s fazovymi ogranicheniyami pri oslablennykh predpolozheniyakh upravlyaemosti [A Pontryagin maximum principle for state constrained optimal control problem under weakened controllability hypothesis]. *Voprosy teorii bezopasnosti i ustoichivosti sistem* [Issues of Security Theory and Stability of Systems], 2018, No. 20, pp. 46—61 (in Russian).
8. Shevchenko G.V. Metod chislennogo resheniya nelineinoi zadachi optimal'nogo bystrodeistviya s additivnym upravleniem [Numerical method for solving a nonlinear time-optimal control problem with additive control]. *Zhurn. vychisl. matematiki i matem. fiziki* [J. Calculation. Mathematics Math. Physics], 2007, Vol. 47, No. 11, pp. 1843-–1854 (in Russian).
9. Aleksandrov V.M. Iteratsionnyi metod vychisleniya optimal'nogo po bystrodeistviyu upravleniya kvazilineinymi sistemami [An iterative method for computation of time-optimal control of quasilinear systems]. *Sib. zhurn. vychisl. matematiki* [Sib. J. Calculation. Mathematics], 2003, Vol. 6, No. 3, pp. 227—247 (in Russian).
10. Topunov M.V. A Nonlinear Time Optimal Control Problem. *Automation and Remote Control*, 2002, Vol. 63, No. 7, pp. 1062—1069.
11. Srochko V.A. Modernizatsiya metodov gradientnogo tipa v zadachakh optimal'nogo upravleniya [Modernization of gradient-type methods in optimal control problems]. *Izv. vuzov. Matematika* [Izv. Universities. Mathematics], 2002, No. 12, pp. 66—78 (in Russian).
12. Katoch S., Chauhan S.S., Kumar V. A Review on Genetic Algorithm: Past, Present, and Future. *Multimedia Tools and Applications*, 2021, Vol. 80, pp. 8091—8126; DOI: 10.1007/s11042-020-10139-6
13. Trokoz D.A. Metod parametricheskoi optimizatsii dlya shirokikh neironnykh setei s ispol'zovaniem geneticheskikh algoritmov [Parametric optimization method for wide neural networks using genetic algorithms]. *Izv. Samar. nauchn. tsentra RAN* [Izv. Samara Sci. Center RAS], 2021, Vol. 23, No. 2, pp. 51-–56 (in Russian); DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-2-51-56
14. Kozuch D.J., Stillinger F.H., Debenedetti P.G. Genetic Algorithm Approach for the Optimization of Protein Antifreeze Activity Using Molecular Simulations. *J. Chemical Theory Comput*, 2020, Vol. 16, No. 12, pp. 7866—7873; DOI: 10.1021/acs.jctc.0c00773
15. Jalali Z., Noorzai E., Heidari S. Design and optimization of form and facade of an office building using the genetic algorithm. *Sci. Technol. Built Environment*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 128—140; DOI: 10.1080/23744731.2019.1624095
16. Migov D.A., Volzhankina K.A., Rodionov A.S. Genetic Algorithms for Drain Placement in Wireless Sensor Networks Optimal by the Relibility Criterion. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2021, Vol. 57, No. 3, pp. 240—249; DOI: 10.3103/S8756699021030110
17. Panteleev A.V., Metlitskaya D.V. Primenenie geneticheskikh algoritmov s binarnym i veshchestvennym kodirovaniem dlya priblizhennogo sinteza suboptimal'nogo upravleniya determinirovannymi sistemami [An application of genetic algorithms with binary and real coding for approximate synthesis of suboptimal control in deterministic systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 2011, No. 11, pp. 117-–129 (in Russian).
18. Diveev A.I. Reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya ehvolyutsionnym algoritmom na osnove printsipa maksimuma Pontryagina [A solution of the optimal control problem by an evolutionary algorithm on the basis of the Pontryagin maximum principle]. *Voprosy teorii bezopasnosti i ustoichivosti sistem* [Issues of Security Theory and Stability of Systems], 2018, No. 20, pp. 3—17 (in Russian).
19. Antipina E.V., Mustafina S.A., Antipin A.F. Algoritm poiska priblizhennogo resheniya zadachi optimal'nogo upravleniya khimicheskim protsessom pri nalichii terminal'nykh ogranichenii [Algorithm for finding an approximate solution of the problem of optimal control of a chemical process in the presence of terminal restrictions]. *Vestn. Tomsk. gos. un-ta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Vestn. Tomsk State University. Management, Comput. Engrg. Comput. Sci.], 2022, No. 59, pp. 4—12 (in Russian); DOI: 10.17223/19988605/59/1

20. Gornov A.Yu. Vychislitel'nye tekhnologii resheniya zadach optimal'nogo upravleniya [Computational technologies for solving optimal control problems]. Novosibirsk: Nauka, 2009 (in Russian).

21. Antipina E.V., Mustafina S.A., Antipin A.F. Programmnoe obespechenie dlya avtomatizatsii protsessa poiska kineticheskikh parametrov khimicheskikh reaktsii [Software for automation of the search process for kinetic parameters of chemical reactions]. *Programmnye produkty i sistemy* [Software Products and Systems], 2020, No. 1, pp. 125—131 (in Russian).

22. Buldaev A.S. Metody nepodvizhnykh tochek v zadachakh optimizatsii upravlyaemykh sistem [Fixed-point methods in optimization problems for control systems]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Results Sci. Technology. Ser. Modern Math. Appl. Thematic Rev.], 2020, Vol. 183, pp. 22—34 (in Russian); DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-22-34