УДК 517.95

ОБОБЩЁННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ГЛОБАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2025 **Ф. А. Абдукаримов**

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия

E-mail: abdukarimovfarhod8@gmail.com

Поступила в редакцию 11.07.2024 г.; после доработки 23.06.2025 г.;
принята к публикации 17.09.2025 г.

Доказано существование обобщённого решения задачи Неймана для глобального по времени параболического уравнения. Глобальность означает, что в уравнении присутствует коэффициент, зависящий от интеграла от решения по всему интервалу времени, на котором решается задача. Для доказательства разрешимости используется метод Галёркина. Показано, что глобальное уравнение с однородным условием Неймана может иметь несколько решений, не зависящих от пространственных переменных.

Ключевые слова: глобальное по времени параболическое уравнение, задача Неймана, разрешимость, метод Галёркина, неединственность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.301

1. ИССЛЕДУЕМАЯ ЗАДАЧА

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с липшицевой границей $\partial\Omega$. В пространственно-временном цилиндре $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $T \in (0,\infty)$, рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\partial_t u - \Delta u + \varphi\left(\int\limits_0^T u(\cdot,\tau)\,d\tau\right)u = f, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при } x \in \Omega, \tag{3}$$

где $x = (x_1,\dots,x_n)$ — пространственная переменная в $\mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$ — скалярная переменная, ν — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ — искомая функция, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \Omega_T \to \mathbb{R}$, $\psi : \partial\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ — заданные функции, условия на которые будут выписаны ниже.

В уравнении (1) аргумент функции φ есть интеграл от решения u по всему интервалу времени $(0,T)$, на котором решается задача. Поэтому рассматриваемое уравнение будем называть глобальным (нелокальным) по времени. Нелокальность по времени вносит в начально-краевую задачу (1) — (3) несколько особенностей. Во-первых, присутствие в (1) интеграла от решения по всему интервалу времени $(0,T)$ означает, что нужно знать «будущее» для определения коэффициента в уравнении. Это не согласуется с принципом причинности, который характерен для параболических задач. Во-вторых, при исследовании разрешимости нелинейное параболическое уравнение часто сначала решается на малом промежутке времени, а затем полученное решение продолжается на весь интервал $(0, T)$. В данной ситуации такой подход невозможно применить.

Задача Дирихле для глобального по времени уравнения возникает при моделировании хаотической динамики полимерной молекулы (цепочки) в водном растворе [1]. В этом случае функция φ называется потенциалом взаимодействия. Глобальность по времени возникает из-за того, что роль времени t в такой модели играет параметр длины дуги вдоль полимерной молекулы (общая длина цепочки равна T) и каждый сегмент цепочки взаимодействует с остальными через окружающую жидкость. В [2] доказана слабая разрешимость задачи для случая, когда u — положительная ограниченная функция, а φ — так называемый потенциал Флори — Хаггинса. Положительность решения является естественным условием, поскольку u соответствует (но не совпадает с ней, см. пояснения в следующем абзаце) плотности вероятности того, что t-й сегмент цепочки находится в точке $x \in \Omega$. Потенциал Флори — Хаггинса — это выпуклая возрастающая функция, стремящаяся к бесконечности по мере приближения её аргумента к определённому положительному значению. В [3] функция φ предполагается неотрицательной и непрерывной такой, что $s \mapsto s\varphi(s)$ является неубывающей дифференцируемой функцией, производная которой ограничена на каждом компактном подмножестве $\mathbb{R}$. Это предположение допускает случай, когда функция φ не выпукла и не растёт при стремлении аргумента к бесконечности. В работе [3] доказано существование слабого решения и установлена единственность решения при ограничении на длину интервала времени T. Уравнение более общего вида по сравнению с работами [2], [3] рассмотрено в [4]: добавлена ненулевая правая часть f, потенциал взаимодействия φ зависит от взвешенного интеграла от решения по всему интервалу времени, на котором рассматривается задача. Кроме того, ослаблены требования на функцию φ: она предполагается непрерывной и ограниченной снизу.

В указанных выше работах [2]–[4] изучались нелокальные по времени уравнения, которые соответствуют модели хаотического движения полимерной молекулы в водном растворе, но не совпадают с ней. Дело в том, что непосредственно в самой модели хаотической динамики полимерной цепочки аргумент потенциала φ есть интеграл по интервалу $(0, T)$ от функции $\varrho(x, t)$ — плотности вероятности того, что t-й сегмент цепочки находится в точке $x \in \Omega$. Функция ϱ связана с решением задачи u следующим нормировочным условием:

$$\varrho(x, t) = \frac{u(x, t)}{\int\limits_{\Omega} u(y, t)\, dy}.$$

Это условие гарантирует, что пространственный интеграл от ϱ, представляющий собой вероятность того, что каждое звено цепи находится в области Ω, равен единице. Появление функции ϱ в аргументе потенциала φ делает уравнение модели нелокальным не только по времени, но и по пространству. Нелокальность по пространству возникает при делении решения u на интеграл от него по области Ω. Значит, данный интеграл не должен обращаться в нуль на множестве положительной одномерной меры Лебега в $(0, T)$. В работе [5] для случая ограниченного потенциала взаимодействия φ удалось показать, что этот интеграл больше некоторой положительной константы. Это позволило доказать обобщённую разрешимость. Уравнение с двойной нелокальностью как по времени, так и по пространству изучалось также в [6]. Нелокальность по пространству в указанной работе носит другой характер: она связана не с условием нормировки, а с наличием интегро-дифференциального оператора Леви вместо лапласиана в уравнении (1). В работе [6] установлено существование слабого решения и доказана единственность решения для достаточно малого T.

Глобальные по времени параболические уравнения возникают также при моделировании динамики популяций (см. [7], [8]). В таких моделях уравнение является ультрапараболическим, и роль второго времени в нём играет возраст особей. Нелокальные члены содержат интеграл по возрасту особи и могут быть как в данных задачи, так и в уравнении.

Насколько нам известно, на сегодняшний день глобальные по времени параболические уравнения изучались с граничным условием Дирихле. В данной работе исследуется такое уравнение с краевым условием Неймана. Как было отмечено в предыдущем абзаце, глобальные по времени уравнения применяются при моделировании динамики популяций. Условие Неймана на границе пространственной области в таких моделях соответствует заданию миграции особей через границу. В настоящей работе доказана обобщённая разрешимость задачи (1)–(3) для неотрицательной непрерывной функции φ, ненулевой правой части f и неоднородного краевого условия ψ. Существование обобщённого решения доказывается методом Галёркина, так как он соответствует методу конечных элементов, который часто используется при численных расчётах параболических задач. Кроме того, в данной работе показано, что глобальное уравнение (1) с однородным условием Неймана может иметь несколько решений, не зависящих от пространственных переменных. Из-за возможной неединственности решения задачи (1)–(3) могут возникнуть проблемы с численным построением галёркинских приближений.

2. ОБОБЩЁННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Мы будем работать со стандартными функциональными пространствами Лебега и Соболева $L^p(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L^q(0,T;L^p(\Omega))$ и $L^q(0,T;H^1(\Omega))$, где $p,q \in [1,\infty]$. Норму и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ будем обозначать через $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ соответственно. Скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ определяется формулой $(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v) + (\nabla u, \nabla v)$.

Определение. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, $T \in (0,\infty)$, $f \in L^2(\Omega_T)$, $\psi \in L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$. Функцию $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ из $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ назовём обобщённым решением задачи (1) — (3), если интегральное тождество

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (u\,\partial_t h - \nabla u \cdot \nabla h - \varphi(\zeta) u h + f h)\, dx d\tau + \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \psi h \, dS d\tau + \int\limits_\Omega u_0 h_0 \, dx = 0$$

выполняется для любой гладкой в Ω_T функции h, такой что $h(\cdot,t) = 0$ при $t = T$. Здесь $\zeta(x) = \int\limits_0^T u(x,\tau)\, d\tau$, $h_0 = h|_{t=0}$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение об обобщённой разрешимости задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, $T \in (0,\infty)$, $f \in L^2(\Omega_T)$, $\psi \in L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$. Тогда существует обобщённое решение $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ задачи (1) — (3). Кроме того, существует положительная постоянная C_1, такая что для u выполняется следующая энергетическая оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(\cdot,t)\|^2 + \|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \varphi(\zeta(x)) u^2(x,\tau)\, dx\, d\tau \leqslant C_1.$$

Постоянная C_1 зависит от f, ψ, u_0, Ω и T.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ

В этом разд. доказывается теорема 1 о существовании обобщённого решения задачи (1)–(3). Доказательство проводится с помощью метода Галёркина и состоит из двух этапов: а) построение галёркинских приближений, б) предельный переход. Для удобства первый этап разделён на два шага. На первом шаге получаются априорные оценки приближений, на следующем — на основе этих оценок и теоремы Шаудера о неподвижной точке вполне непрерывного оператора (см. [9, гл. 8, § 35]) доказывается существование галёркинских приближений. На втором этапе доказательства возникает трудность с предельным переходом в нелинейном члене, которая устраняется с помощью теоремы Витали о предельном переходе под знаком интеграла (см. [10, гл. 4, § 8]).

3.1. Построение галёркинских приближений

Пусть функции $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega})$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L^2(\Omega)$ и ортогональный базис в $H^1(\Omega)$. Например, в качестве $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ можно взять собственные функции оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω с однородным краевым условием Неймана на $\partial\Omega$ (см. [11, гл. 2, § 5]). Зафиксируем натуральное число m. Будем искать галёркинское приближение $u_m(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i(t)w_i(x)$ такое, что при $k = 1,\ldots,m$

$$(u_m', w_k) + (\nabla u_m, \nabla w_k) + (\varphi(\zeta_m)u_m, w_k) = (f, w_k) + \int\limits_{\partial\Omega} \psi\, w_k\, dS, \tag{4}$$

$$(u_m, w_k)|_{t=0} = (u_0, w_k), \tag{5}$$

где $\zeta_m(x) = \int\limits_0^T u_m(x,\tau)\,d\tau$, u_m' — производная по переменной t. Соотношения (4) есть система из m интегро-дифференциальных уравнений на коэффициенты $c_k(t)$ с начальными условиями (5). Запишем (4), (5), подставив $u_m(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i(t)w_i(x)$ и воспользовавшись равенством $(\nabla w_i, \nabla w_k) = 0$, $i \neq k$, которое следует из того, что базис $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ортогонален как в $L^2(\Omega)$, так и в $H^1(\Omega)$. Получим для $k = 1,\ldots,m$

$$c_k'(t) + \|\nabla w_k\|^2 c_k(t) + \sum_{i=1}^{m} (\varphi(\zeta_m)w_i, w_k)c_i(t) = (f, w_k) + \int\limits_{\partial\Omega} \psi\, w_k\, dS, \tag{6}$$

$$c_k(0) = (u_0, w_k). \tag{7}$$

3.1.1. Априорные оценки галёркинских приближений.

Необходимые априорные оценки для галёркинских приближений получены в следующей лемме.

Лемма 1. *Существуют константы C_1 и $C_2(m)$, такие что*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_m(\cdot,t)\|^2 + \|u_m\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \varphi(\zeta_m)u_m^2\,dx\,d\tau \leqslant C_1, \tag{8}$$

$$\|u_m'\|^2_{L^2(\Omega_T)} \leqslant C_2(m). \tag{9}$$

Замечание 1. Отметим, что в энергетической оценке, сформулированной в теореме 1, постоянная C_1 та же, что и в неравенстве (8).

Доказательство. Умножим k-е уравнение в (4) на $c_k(t)$ и просуммируем по $k = 1,\ldots,m$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + (\varphi(\zeta_m)u_m, u_m) = (f, u_m) + \int\limits_{\partial\Omega} \psi\, u_m\, dS. \tag{10}$$

Первое слагаемое в правой части (10) оценим с помощью неравенства Коши — Буняковского и неравенства Юнга

$$(f, u_m) \leqslant \|f\|\|u_m\| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2.$$

Оценим второе слагаемое в правой части (10), снова используя неравенство Коши — Буняковского и неравенство Юнга, а также ограниченность оператора следа, действующего из $H^1(\Omega)$ в $L^2(\partial\Omega)$,

$$\int\limits_{\partial\Omega} \psi\, u_m\, dS \leqslant \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u_m\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant c\, \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u_m\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \frac{c^2}{2} \|\psi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{1}{2} \|u_m\|^2_{H^1(\Omega)},$$

где c есть норма оператора следа. С учётом полученных неравенств перепишем (10)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + (\varphi(\zeta_m)u_m, u_m) \leqslant \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2 + \frac{c^2}{2}\|\psi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_m\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Так как $\|u_m\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2$, то из предыдущего неравенства следует, что

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + (\varphi(\zeta_m)u_m, u_m) \leqslant 2\|u_m\|^2 + c_{f\psi}, \tag{11}$$

где $c_{f\psi} = \|f\|^2 + c^2\|\psi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$ — функция от переменной t. В силу неотрицательности φ из (11) вытекает оценка $\dfrac{d}{dt}\|u_m\|^2 \leqslant 2\|u_m\|^2 + c_{f\psi}$, из которой по неравенству Гронуолла имеем

$$\|u_m(\cdot,t)\|^2 \leqslant e^{2t}\Big(\|u_m(\cdot,0)\|^2 + \int\limits_0^t c_{f\psi}\, d\tau\Big) \quad \text{для всех } t \in [0,T].$$

Отсюда, так как $\|u_m(\cdot,0)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^m (u_0, w_i)^2 \leqslant \|u_0\|^2$, приходим к оценке

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_m\|^2 \leqslant e^{2T}\Big(\|u_0\|^2 + \int\limits_0^T c_{f\psi}\, d\tau\Big). \tag{12}$$

Интегрируя (11) от 0 до T, с учётом (12) получим

$$\int\limits_0^T \|\nabla u_m\|^2\, d\tau + \int\limits_0^T (\varphi(\zeta_m)u_m, u_m)\, d\tau \leqslant (2Te^{2T}+1)\Big(\|u_0\|^2 + \int\limits_0^T c_{f\psi}\, d\tau\Big). \tag{13}$$

Из неравенств (12), (13) вытекает оценка (8).

Оценим производные галёркинских приближений. Для этого умножим k-е уравнение в (4) на $c_k'(t)$ и просуммируем по k

$$\|u_m'\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u_m\|^2 + (\varphi(\zeta_m)u_m, u_m)\Big) = (f, u_m') + \int\limits_{\partial\Omega} \psi\, u_m'\, dS. \tag{14}$$

Оценим первое слагамое в правой части (14), используя неравенство Коши — Буняковского и неравенство Юнга,

$$(f, u_m') \leqslant \|f\|\|u_m'\| \leqslant \|f\|^2 + \frac{1}{4}\|u_m'\|^2.$$

Получим оценку для второго слагаемого, подставив $u_m' = \sum\limits_{i=1}^m c_i' w_i$ и снова воспользовавшись неравенством Юнга,

$$\int\limits_{\partial\Omega} \psi\, u_m'\, dS = \sum_{i=1}^m c_i' \int\limits_{\partial\Omega} \psi\, w_i\, dS \leqslant \frac{1}{4}\sum_{i=1}^m (c_i')^2 + \sum_{i=1}^m \Big(\int\limits_{\partial\Omega} \psi\, w_i\, dS\Big)^2.$$

Замечая, что $\|u'_m\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{m}(c'_i)^2$, выводим

$$\int\limits_{\partial\Omega} \psi\, u'_m\, dS \leqslant \frac{1}{4}\|u'_m\|^2 + \sum_{i=1}^{m}\Big(\int\limits_{\partial\Omega}\psi\, w_i\, dS\Big)^2.$$

Наконец, учитывая полученные оценки на правую часть, из (14) приходим к неравенству

$$\|u'_m\|^2 + \frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u_m\|^2 + (\varphi(\zeta_m)u_m, u_m)\Big) \leqslant 2\|f\|^2 + 2\sum_{i=1}^{m}\Big(\int\limits_{\partial\Omega}\psi\, w_i\, dS\Big)^2,$$

из которого после интегрирования от 0 до T извлекаем оценку

$$\|u'_m\|^2_{L^2(\Omega_T)} \leqslant \|\nabla u_m(\cdot,0)\|^2 + \int\limits_{\Omega}\varphi(\zeta_m)u_m^2(x,0)\,dx + 2\|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} + 2\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^T\Big(\int\limits_{\partial\Omega}\psi\, w_i\, dS\Big)^2 d\tau.$$

В силу непрерывности функции φ найдётся константа $\alpha_m > 0$, такая что $\varphi(\xi) \leqslant \alpha_m$ для всех ξ, удовлетворяющих неравенству $\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}\zeta_m(x) \leqslant \xi \leqslant \max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\zeta_m(x)$. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega}\varphi(\zeta_m)u_m^2(x,0)\,dx \leqslant \alpha_m\|u_m(\cdot,0)\|^2 \leqslant \alpha_m\|u_0\|^2,$$

откуда следует оценка (9). □

3.1.2. Доказательство существования галёркинских приближений.

Используя оценки из леммы 1, докажем существование галёркинских приближений с помощью следующей теоремы Шаудера о неподвижной точке вполне непрерывного оператора (см. [9, гл. 8, § 35]).

Теорема (Шаудера о неподвижной точке). *Пусть оператор F отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество K банахова пространства X в себя. Тогда, если F вполне непрерывен на K, то он имеет на K неподвижную точку.*

Лемма 2. *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует функция $u_m(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i(t)w_i(x)$, которая является решением задачи* (4), (5).

Доказательство. Пусть в обозначениях теоремы Шаудера $X = C(0,T)$ — пространство непрерывных на $[0,T]$ функций $\boldsymbol{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \ldots, \theta_m(t))$ с нормой

$$|\boldsymbol{\theta}| = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\sum_{i=1}^{m}\theta_i^2(t)\Big)^{1/2}.$$

Определим замкнутое ограниченное выпуклое множество в $C(0,T)$

$$K = \{\boldsymbol{\theta} \mid \quad |\boldsymbol{\theta}| \leqslant e^T\Big(\|u_0\|^2 + \int\limits_0^T c_{f\psi}\,d\tau\Big)^{1/2}, \quad \theta_i(0) = (u_0, w_i), \quad i = 1,2,\ldots,m\},$$

где $c_{f\psi} = \|f\|^2 + c^2\|\psi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$ — функция от переменной t из (12). Пусть $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t))$ — произвольный элемент множества K. Для функции $u_\xi = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i w_i$ обозначим $\zeta_\xi(x) = \int\limits_0^T u_\xi(x,\tau)\,d\tau$ и найдём решение $u_\eta = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_i w_i$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(u'_\eta, w_k) + (\nabla u_\eta, \nabla w_k) + (\varphi(\zeta_\xi)u_\eta, w_k) = (f, w_k) + \int\limits_{\partial\Omega} \psi\, w_k\, dS, \tag{15}$$

$$(u_\eta, w_k)|_{t=0} = (u_0, w_k), \tag{16}$$

где $k = 1, \dots, m$.

Подставив $u_\eta = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_i w_i$ в (15), (16), приходим к линеаризации задачи (6), (7)

$$\eta'_k(t) + \|\nabla w_k\|^2\,\eta_k(t) + \sum_{i=1}^{m}(\varphi(\zeta_\xi)w_i, w_k)\eta_i(t) = (f, w_k) + \int\limits_{\partial\Omega} \psi\, w_k\, dS, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$\eta_k(0) = (u_0, w_k), \quad k = 1, \dots, m.$$

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений у получившейся задачи существует единственное решение $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_m(t))$. Таким образом, задано отображение $F : K \to C(0,T)$, действующее по правилу $F(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\eta}$. Убедимся в справедливости оценки $|\boldsymbol{\eta}| \leqslant e^T\Big(\|u_0\|^2 + \int\limits_0^T c_{f\psi}\,d\tau\Big)^{1/2}$, из которой следует, что множество K отображается оператором F в себя. Для этого в (15) умножим k-е уравнение на η_k и повторим вывод оценки (12) из доказательства леммы 1.

Докажем непрерывность оператора F. Возьмём произвольную последовательность $\{\boldsymbol{\xi}_q\}$ в K, которая сходится в $C(0,T)$ к некоторой функции $\boldsymbol{\xi}$. Обозначая $\boldsymbol{\eta}_q = F(\boldsymbol{\xi}_q)$, $\boldsymbol{\eta} = F(\boldsymbol{\xi})$ и $u_{\eta_q} = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_{qi} w_i$, $u_\eta = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_i w_i$, получим, что разность $u_{\eta_q} - u_\eta$ является решением следующей задачи:

$$(u'_{\eta_q} - u'_\eta, w_k) + (\nabla(u_{\eta_q} - u_\eta), \nabla w_k) + (\varphi(\zeta_{\xi_q})(u_{\eta_q} - u_\eta), w_k) = ((\varphi(\zeta_\xi) - \varphi(\zeta_{\xi_q}))u_\eta, w_k),$$

$$(u_{\eta_q} - u_\eta, w_k)|_{t=0} = 0,$$

где $k = 1, \dots, m$. Значит, для неё справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\eta_q} - u_\eta\|^2 + \|\nabla(u_{\eta_q} - u_\eta)\|^2 + (\varphi(\zeta_{\xi_q}), (u_{\eta_q} - u_\eta)^2) \leqslant \|(\varphi(\zeta_\xi) - \varphi(\zeta_{\xi_q}))u_\eta\|\|u_{\eta_q} - u_\eta\|,$$

интегрируя которое от 0 до t, получим

$$\|(u_{\eta_q} - u_\eta)(\cdot,t)\|^2 \leqslant 2\int\limits_0^T \|(\varphi(\zeta_\xi) - \varphi(\zeta_{\xi_q}))u_\eta\|\|u_{\eta_q} - u_\eta\|\,d\tau.$$

Отсюда, вынося $\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_T} u_\eta^2$ за знак интеграла и замечая, что верна равномерная по q оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\|(u_{\eta_q} - u_\eta)(\cdot,t)\| \leqslant 2e^T\Big(\|u_0\|^2 + \int\limits_0^T c_{f\psi}\,d\tau\Big)^{1/2},$$

приходим к неравенству

$$|\boldsymbol{\eta}_q - \boldsymbol{\eta}| = \max_{t\in[0,T]} \|(u_{\eta_q} - u_\eta)(\cdot, t)\| \leqslant C\|\varphi(\zeta_\xi) - \varphi(\zeta_{\xi_q})\|^{1/2}$$

с некоторой константой C, не зависящей от q.

Из того, что $\boldsymbol{\xi}_q \to \boldsymbol{\xi}$ в $C(0,T)$ следует поточечная сходимость $\zeta_{\xi_q}(x) \to \zeta_\xi(x)$ в Ω, из которой в силу непрерывности функции φ вытекает поточечная сходимость $\varphi(\zeta_{\xi_q}(x)) \to \varphi(\zeta_\xi(x))$ в Ω. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $\|\varphi(\zeta_\xi) - \varphi(\zeta_{\xi_q})\| \to 0$ при $q \to \infty$, поэтому из предыдущего неравенства $\boldsymbol{\eta}_q \to \boldsymbol{\eta}$ в $C(0,T)$. Таким образом, непрерывность оператора F доказана.

Осталось проверить, что F отображает K в компактное подмножество из K. Для этого выведем оценки на производные $\eta_k(t)$. Умножим k-е уравнение системы (15) на $\eta_k'(t)$ и просуммируем по k. Далее, повторив вывод оценки (9) из леммы 1, получим неравенство

$$\int\limits_0^T \|u_\eta'\|^2\, d\tau \leqslant C_2(m),$$

из которого следует, что $F(K)$ есть ограниченное множество в $H^1(0,T)$. Значит, по теореме вложения множество $F(K)$ есть компакт в $C(0,T)$.

Оператор F удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера, поэтому имеет на множестве K неподвижную точку $\boldsymbol{\xi}$, которая является решением задачи (6), (7). □

3.2. Предельный переход

В силу равномерной оценки (8) из последовательности u_m можно выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{17}$$

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } L^2(\Omega_T), \tag{18}$$

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{19}$$

Зафиксируем натуральное число N и выберем функцию $h \in C^1(0,T;H^1(\Omega))$ вида

$$h(x,t) = \sum_{k=1}^N g_k(t) w_k(x), \tag{20}$$

где $\{g_k\}_{k=1}^N$ — заданные гладкие функции, $g_k(T) = 0$, $k = 1,\ldots,N$. Выберем $m \geqslant N$, умножим (4) на $g_k(t)$, просуммируем по $k = 1,\ldots,N$ и затем проинтегрируем от 0 до T. Получим

$$\int\limits_0^T (u_m', h) + (\nabla u_m, \nabla h) + (\varphi(\zeta_m)u_m, h)\, d\tau = \int\limits_0^T \left((f,h) + \int\limits_{\partial\Omega} \psi\, h\, dS\right) d\tau.$$

Перепишем первое слагаемое, воспользовавшись формулой интегрирования по частям и тем, что $h|_{t=T} = 0$

$$-\int\limits_0^T (u_m, \partial_t h) + (\nabla u_m, \nabla h) + (\varphi(\zeta_m)u_m, h)\, d\tau - \int\limits_\Omega u_m(x,0)\, h_0\, dx = \int\limits_0^T \left((f,h) + \int\limits_{\partial\Omega} \psi\, h\, dS\right) d\tau.$$

Положим $m = \mu$ и воспользуемся (18), (19)

$$-\int_0^T (u, \partial_t h) + (\nabla u, \nabla h)\, d\tau + \lim_{\mu\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \varphi(\zeta_\mu)\, u_\mu\, h\, dx\, d\tau - \int_\Omega u_0\, h_0\, dx = \int_0^T \Big((f, h) + \int_{\partial\Omega} \psi\, h\, dS \Big) d\tau.$$

Проблема в том, чтобы доказать следующее соотношение

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \varphi(\zeta_\mu)\, u_\mu\, h\, dx\, d\tau = \int_0^T \int_\Omega \varphi(\zeta)\, u\, h\, dx\, d\tau. \tag{21}$$

Обозначим через $R = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_T} |h(x,t)|$. Покажем, что

$$\varphi(\zeta_\mu) \int_0^T u_\mu h\, d\tau \to \varphi(\zeta) \int_0^T u\, h\, d\tau \quad \text{при } \mu \to \infty \text{ в } L^1(\Omega). \tag{22}$$

При доказательстве (22) будем рассуждать, так же как в [4, Theorem 2, Step 3], используя следующую теорему Витали о предельном переходе под знаком интеграла (см. [10, гл. 4, §8]).

Теорема (Витали о предельном переходе). *Пусть $\{z_k\}_{k\geqslant 1}$ — последовательность суммируемых функций, сходящаяся на Ω к функции z по мере. Если $|\Omega| < \infty$ и функции z_k имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то функция z суммируема и $\int\limits_\Omega |z_k - z| dx \to 0$ при $k \to \infty$.*

Из (18) вытекает, что $\int\limits_0^T u_\mu h\, d\tau \rightharpoonup \int\limits_0^T u\, h\, d\tau$ слабо в $L^2(\Omega)$. В силу (8) верно неравенство $\|\nabla \int\limits_0^T u_\mu h\, d\tau\| \leqslant C$, где константа C зависит от функции h. Значит,

$$\int_0^T u_\mu h\, d\tau \to \int_0^T u\, h\, d\tau \quad \text{в } L^2(\Omega).$$

Отсюда, замечая, что аналогично получается $\zeta_\mu \to \zeta$ в $L^2(\Omega)$, вытекает (переходя к подпоследовательности, которую мы обозначаем так же, как и саму последовательность)

$$\int_0^T u_\mu h\, d\tau \to \int_0^T u\, h\, d\tau \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad \zeta_\mu \to \zeta \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

Так как φ непрерывна, $\varphi(\zeta_\mu) \to \varphi(\zeta)$ почти всюду в Ω. Получаем, что

$$\varphi(\zeta_\mu) \int_0^T u_\mu h\, d\tau \to \varphi(\zeta) \int_0^T u\, h\, d\tau \quad \text{почти всюду в } \Omega \text{ при } \mu \to \infty.$$

Докажем, что последовательность $\varphi(\zeta_\mu) \int\limits_0^T u_\mu h\, d\tau$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Ω. Пусть E — произвольное измеримое подмножество Ω, $E_T = E \times [0, T]$ и $G_M^\mu = \{(x,t) \in E_T \,|\, |u_\mu(x,t)| \geqslant M\}$. Тогда

$$\int_{G_M^\mu} \varphi(\zeta_\mu) |u_\mu h|\, dx\, d\tau \leqslant \frac{R}{M} \int_{G_M^\mu} \varphi(\zeta_\mu) u_\mu^2\, dx\, d\tau \leqslant \frac{R}{M} \int_{\Omega_T} \varphi(\zeta_\mu) u_\mu^2\, dx\, d\tau \leqslant \frac{C_1 R}{M},$$

где C_1 — константа из (8).

С другой стороны,

$$\int\limits_{E_T\setminus G_M^\mu} \varphi(\zeta_\mu)|u_\mu h|\,dx\,d\tau \leqslant MR \int\limits_{E_T\setminus G_M^\mu} \varphi(\zeta_\mu)\,dx\,d\tau \leqslant MRT \int\limits_E \varphi(\zeta_\mu)\,dx.$$

Таким образом,

$$\left|\int\limits_E \varphi(\zeta_\mu) \int\limits_0^T u_\mu h\,d\tau\,dx\right| = \left|\int\limits_{E_T} \varphi(\zeta_\mu) u_\mu h\,dx\,d\tau\right| \leqslant \frac{C_1 R}{M} + MRT \int\limits_E \varphi(\zeta_\mu)\,dx. \tag{23}$$

Оценим $\int\limits_E \varphi(\zeta_\mu)\,dx$. Если $E_N^\mu = \{x \in E \,|\, |\zeta_\mu(x)| > N\}$, то

$$\int\limits_{E_N^\mu} \varphi(\zeta_\mu)\,dx \leqslant \frac{1}{N^2} \int\limits_{E_N^\mu} \varphi(\zeta_\mu)\zeta_\mu^2\,dx \leqslant \frac{C_1 T}{N^2}.$$

В силу непрерывности функции φ найдётся константа $\gamma_N > 0$, такая что $\varphi(\xi) \leqslant \gamma_N$ для всех $\xi \in [-N, N]$. Следовательно,

$$\int\limits_{E\setminus E_N^\mu} \varphi(\zeta_\mu)\,dx \leqslant \gamma_N |E|,$$

где $|E|$ — n-мерная мера Лебега множества E. В итоге,

$$\int\limits_E \varphi(\zeta_\mu)\,dx \leqslant \frac{C_1 T}{N^2} + \gamma_N |E|.$$

Поэтому из (23) вытекает

$$\left|\int\limits_E \varphi(\zeta_\mu) \int\limits_0^T u_\mu h\,d\tau\,dx\right| \leqslant \frac{C_1 R}{M} + \frac{MRT^2 C_1}{N^2} + \gamma_N MRT|E|.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем M и N так, что $C_1 R/M < \varepsilon/3$ и $MRT^2 C_1/N^2 < \varepsilon/3$. Если $\delta = \varepsilon/(3\gamma_N MRT)$, то верна оценка

$$\left|\int\limits_E \varphi(\zeta_\mu) \int\limits_0^T u_\mu h\,d\tau\,dx\right| < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad |E| < \delta,$$

которая означает, что последовательность $\varphi(\zeta_\mu)\int\limits_0^T u_\mu h\,d\tau$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы в Ω. Условия теоремы Витали выполнены, поэтому сходимость (22), из которой вытекает предельный переход (21), доказана.

Функции вида (20) плотны во множестве $\{a \in H^1(\Omega_T)| \quad a|_{t=T} = 0\}$, поэтому интегральное тождество из определения обобщённого решения справедливо для любой гладкой в Ω_T функции $h(\cdot, t)$, такой что $h|_{t=T} = 0$.

Энергетическая оценка для обобщённого решения u, сформулированная в теореме 1, получается из (8) в результате предельного перехода при $m = \mu \to \infty$. Предельный переход в первых двух слагаемых левой части (8) следует из (17), (19) и слабой полунепрерывности снизу норм в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ и $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Для третьего слагаемого переход к пределу доказан в [4, Theorem 2, Step 4]. Таким образом, установлена энергетическая оценка для решения u. Теорема 1 доказана. □

4. О ВОЗМОЖНОЙ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

В этом разд. будет показано, что однородная задача Неймана (1)–(3) может иметь несколько решений, не зависящих от пространственных переменных. Рассмотрим (1)–(3) с $f = 0$, $\psi = 0$, $u_0 \equiv \mathrm{const}$

$$\partial_t u - \Delta u + \varphi\left(\int_0^T u(x,\tau)\,d\tau\right)u = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \tag{25}$$

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{при } x \in \Omega. \tag{26}$$

Будем искать решение вида $u(x,t) = \xi(t)$. Очевидно, что краевое условие Неймана (25) выполняется, так как такое решение не зависит от пространственных переменных. После подстановки $u(x,t) = \xi(t)$ в уравнение (24) получим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}\dot{\xi}(t) + \varphi\left(\int_0^T \xi(\tau)\,d\tau\right)\xi(t) = 0, \quad t \in [0,T],\\ \xi(0) = u_0.\end{gathered} \tag{27}$$

Замечание 2. Если $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является неотрицательной непрерывной монотонной функцией, то нетрудно показать, рассуждая «от противного», единственность решения задачи (27).

Покажем, что решение (27) имеет вид $\xi(t) = u_0 e^{at}$, где $a \leqslant 0$. Действительно, если функция $\xi(t)$ есть решение (27), то $\varphi\left(\int\limits_0^T \xi(\tau)\,d\tau\right) \geqslant 0$ — некоторое заданное число. Обозначим $a = -\varphi\left(\int\limits_0^T \xi(\tau)\,d\tau\right) \leqslant 0$. Тогда $\xi(t)$ решает следующую задачу:

$$\begin{gathered}\dot{\xi}(t) - a\xi(t) = 0, \quad t \in [0,T],\\ \xi(0) = u_0,\end{gathered}$$

поэтому $\xi(t) = u_0 e^{at}$, где $a \leqslant 0$.

Пусть $u_0 \neq 0$. Подставим $\xi(t) = u_0 e^{at}$ в (27) для получения уравнения на a:

$$u_0 a e^{at} + \varphi\left(u_0 \frac{e^{at}}{a}\Big|_0^T\right) u_0 e^{at} = 0.$$

После сокращения на $u_0 e^{at}$

$$-a = \varphi\left(u_0 \frac{(e^{Ta} - 1)}{a}\right). \tag{28}$$

В силу замечания 2, чтобы показать неединственность решения необходимо взять немонотонную функцию φ. Положим $\varphi(\xi) = 1 + \sin\xi$, $u_0 = 5$, $T = 3$. Тогда уравнение (28) будет иметь три корня a_1, a_2, a_3. Ниже показано графическое решение этого уравнения.

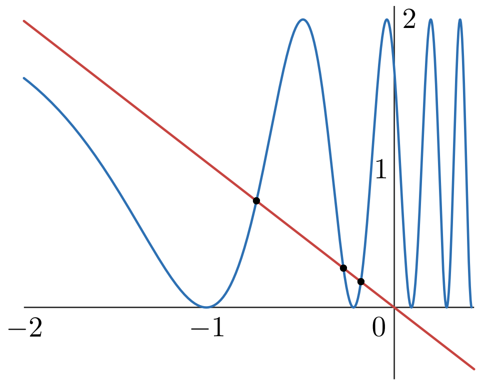

Рис. 1. Неединственность решения при $\varphi(\xi) = 1 + \sin \xi$, $u_0 = 5$, $T = 3$

Красным цветом показан график функции $(-a)$, стоящей в левой части уравнения, синим цветом — график $1 + \sin\left(u_0 \dfrac{(e^{Ta} - 1)}{a}\right)$ из правой части уравнения (28). Функции $(-a)$ и $1 + \sin\left(u_0 \dfrac{(e^{Ta} - 1)}{a}\right)$ пересекаются в трёх точках, которые выделены на рисунке чёрными кругами. Абсциссы точек пересечения графиков и есть корни a_1, a_2, a_3 уравнения (28). Им соответствуют три решения задачи Коши (27) с $u_0 = 5$: $\xi_i(t) = 5e^{a_i t}$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, построены три решения $u_i(x, t) = \xi_i(t) = 5e^{a_i t}$, $i = 1, 2, 3$, однородной задачи Неймана (24)–(26).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00261, https://rscf.ru/project/23-21-00261/). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Starovoitov V.N, Starovoitova B.N.* Modeling the dynamics of polymer chains in water solution. Application to sensor design
J. Physics: Conf. Series. 2017. V. 894, Article 012088; DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012088
2. *Starovoitov V.N.* Initial boundary value problem for a nonlocal in time parabolic equation Siberian Electronic Math. Reports. 2018. V. 15. P. 1311–1319; DOI: 10.17377/semi.2018.15.107
3. *Starovoitov V.N.* Boundary value problem for a global-in-time parabolic equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44, Iss. 1. P. 1118–1126; DOI: 10.1002/mma.6816
4. *Starovoitov V.N.* Weak solvability of a boundary value problem for a parabolic equation with a global-in-time term that contains a weighted integral // J. Elliptic and Parabolic Equ. 2021. V. 7, Iss. 2. P. 623–634; DOI: 10.1007/s41808-021-00103-2
5. *Старовойтов В.Н.* Разрешимость краевой задачи о хаотичной динамике полимерной молекулы в случае ограниченного потенциала взаимодействия // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1714–1719; DOI: 10.33048/semi.2081.18.131
6. *Djida J.-D., Foghem Gounoue G.F., Tchaptchie Y.K.* Nonlocal complement value problem for a global in time parabolic equation // J. Elliptic and Parabolic Equations. 2022. V. 8, Iss. 2, P. 767–789; DOI: 10.1007/s41808-022-00175-8

7. *Walker C.* Some results based on maximal regularity regarding population models with age and spatial structure // J. Elliptic and Parabolic Equations. 2018. V. 4, Iss. 1. P. 69–105; DOI: 10.1007/s41808-018-0010-9

8. *Webb G.F.* Population Models Structured by Age, Size, and Spatial Position. In «Structured population models in biology and epidemiology». P. 1–49. Berlin: Springer-Verl., 2008.

9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2016.

10. *Makarov B., Podkorytov A.* Real Analysis: Measures, Integrals and Applications. London: Springer Science & Business Media, 2013.

11. *Benoit P.* Parabolic Equations in Biology. Springer Internat. Publ. Switzerland, 2015; DOI: 10.1007/978-3-319-19500-1

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

WEAK SOLVABILITY NEUMANN PROBLEM FOR A GLOBAL IN TIME PARABOLIC EQUATION

© 2025 **F. A. Abdukarimov**

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Prosp. Akad. Lavrentieva, 15, Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: abdukarimovfarhod8@gmail.com

Received 11.07.2024, revised 23.06.2025, accepted 17.09.2025

Abstract. The weak solvability of the Neumann problem for a global in time parabolic equation is proven. The globality means that there is a coefficient in the equation that depends on the integral of the solution over the entire time interval where the problem is being solved. The Galerkin method is used to prove the solvability. Besides, it is shown that the problem with the homogeneous Neumann conditions can have several solutions independent of the spatial variables.

Keywords: global in time parabolic equation, Neumann problem, solvability, Galerkin method, non-uniqueness.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.301

REFERENCES

1. Starovoitov V.N, Starovoitova B.N. Modeling the dynamics of polymer chains in water solution. Application to sensor design. *J. Physics: Conf. Ser.*, 2017, Vol. 894, Article 012088; DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012088
2. Starovoitov V.N. Initial boundary value problem for a nonlocal in time parabolic equation Siberian. *Electronic Math. Reports*, 2018, Vol. 15, pp. 1311–1319; DOI: 10.17377/semi.2018.15.107
3. Starovoitov V.N. Boundary value problem for a global-in-time parabolic equation. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2021, Vol. 44, Iss. 1, pp. 1118–1126; DOI: 10.1002/mma.6816
4. Starovoitov V.N. Weak solvability of a boundary value problem for a parabolic equation with a global-in-time term that contains a weighted integral. *J. Elliptic and Parabolic Equ.*, 2021, Vol. 7, Iss. 2, pp. 623–634; DOI: 10.1007/s41808-021-00103-2
5. Starovoitov V.N. Razreshimost' kraevoj zadachi o haotichnoj dinamike polimernoj molekuly v sluchae ogranichennogo potenciala vzaimodejstvija [Solvability of the boundary value problem of chaotic dynamics of a polymer molecule in the case of a bounded interaction potential]. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2021, Vol. 18, No. 2, pp. 1714–1719 (in Russian); DOI: 10.33048/semi.2081.18.131
6. Djida J.-D., Foghem Gounoue G.F., Tchaptchie Y.K. Nonlocal complement value problem for a global in time parabolic equation. *J. Elliptic and Parabolic Equ.*, 2022, Vol. 8, Iss. 2, pp. 767–789; DOI: 10.1007/s41808-022-00175-8
7. Walker C. Some results based on maximal regularity regarding population models with age and spatial structure. *J. Elliptic and Parabolic Equ.*, 2018, Vol. 4, Iss. 1, pp. 69–105; DOI: 10.1007/s41808-018-0010-9
8. Webb G.F. Population Models Structured by Age, Size, and Spatial Position. In «Structured population models in biology and epidemiology», pp. 1–49. Berlin: Springer-Verl., 2008.
9. Trenogin V.A. Funkcional'nyj analiz [Functional analysis]. Moscow: FIZMATLIT, 2016.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2025, Vol. 19, No. 3.

10. Makarov B, Podkorytov A. Real Analysis: Measures, Integrals and Applications. London: Springer Science & Business Media; 2013.
11. Benoit P. Parabolic Equations in Biology. Springer Internat. Publ. Switzerland, 2015; DOI: 10.1007/978-3-319-19500-1