УДК 517.958

АНАЛИЗ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОДИФФУЗИИ

© 2025 Г. В. Алексеев[1,2a], В. В. Пухначев[3b], О. В. Соболева[1c]

[1]*Институт прикладной математики ДВО РАН,*
ул, Радио, 7, г. Владивосток 690041, Россия,
[2]*Дальневосточный федеральный университет,*
пос. Аякс, 10, о. Русский, г. Владивосток 690922, Россия,
[3]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,*
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]alekseev@iam.dvo.ru, [b]pukhnachev@gmail.com, [c]soboleva22@mail.ru

Поступила в редакцию 14.10.2025 г.; после доработки 16.12.2025 г.;
принята к публикации 16.12.2025 г.

Доказывается глобальная разрешимость краевой задачи для стационарной модели термодиффузии, учитывающей эффект Сорé. В случае, когда исходные данные малы, доказывается локальная единственность слабого решения. В работе также выводятся априорные оценки основных компонент (скорости, температуры и концентрации) решения и анализируются результаты исследования их зависимости от всех коэффициентов переноса, входящих в рассматриваемую модель. Устанавливается особый характер зависимости указанных величин от модуля коэффициента Сорé.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, тепломассоперенос, термодиффузия, краевая задача, переменные коэффициенты, разрешимость, единственность, коэффициент Сорé, коэффициент Дюфура.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.401

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое внимание уделяется теоретическому анализу многодиффузионных моделей тепломассопереноса (ТМП) и исследованию качественных свойств их решений. Это связано, с одной стороны, с той большой ролью, которую играют многокомпонентные жидкие системы на практике, а, с другой стороны, с большим разнообразием важных явлений, которые могут происходить в многокомпонентных смесях. Хорошо известно, например, что в теплопроводящей бинарной жидкости диффузионный массоперенос может возникать не только за счёт градиента концентрации в силу закона Фика [1], но и за счёт градиента температуры. Соответствующий эффект получил название эффекта Сорé [2]. В свою очередь, диффузионный теплоперенос может возникать не только за счёт градиента температуры в силу закона Фурье [1], но и за счёт градиента концентрации (согласно эффекту Дюфура [2]).

К настоящему времени в литературе появилось достаточно большое количество работ, посвящённых исследованию качественных свойств решений для моделей ТМП, в том числе для моделей, учитывающих эффекты Сорé и/или Дюфура. Опубликованные работы можно разбить на несколько групп.

Первая группа содержит работы, в которых разрабатываются эффективные методы нахождения точных решений уравнений ТМП. Отметим среди них, начиная с пионерской работы Л. В. Овсянникова [3], работы [4]–[7], а также обзорную статью [8]. Вторая группа содержит работы, посвящённые применению метода симметрии Ли – Овсянникова для исследования качественных свойств решений уравнений ТМП (см., например, [9]–[13]. Ряд работ посвящён разработке эффективных численных алгоритмов решения краевых задач для уравнений ТМП (с учётом эффекта Соре́) [14, 15]. Ещё одна группа содержит работы, касающиеся исследования разрешимости краевых задач для однодиффузионных моделей ТМП с переменными коэффициентами переноса (см., например, [16]–[21]). Но нужно отметить, что авторам неизвестны какие-либо работы по исследованию разрешимости краевых задач для двухдиффузионных моделей ТМП, учитывающих эффект Соре́ или Дюфура. Во всяком случае, несмотря на наш тщательный поиск, мы не смогли найти в литературе публикации, посвящённые строгому исследованию разрешимости краевых задач для указанных моделей.

С учётом этого целью настоящей работы будет являться разработка математического аппарата исследования краевых задач для стационарной модели термодиффузии, описывающей течение теплопроводящей бинарной жидкости с учётом эффекта Соре́. Мы рассмотрим простой, но важный для практики случай, когда все коэффициенты переноса, входящие в указанные модели, постоянны, причём коэффициент Соре́, входящий в уравнение конвекции-диффузии для концентрации, может иметь произвольный знак (и величину). Основываясь на разработанном аппарате, мы докажем глобальную разрешимость сформулированной ниже конкретной краевой задачи для рассматриваемой модели термодиффузии, выведем априорные оценки норм решений, проанализируем их зависимость от всех коэффициентов переноса, а также докажем локальную единственность слабого решения. Аналогичные результаты справедливы в отношении разрешимости краевой задачи для двухдиффузионной модели ТМП, учитываеющей эффект Дюфура (вместо эффекта Соре́).

1. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей: Γ_D и Γ_N. В данной работе мы рассмотрим следующую краевую задачу для модели тепломассопереноса, описывающую движение бинарной теплопроводящей жидкости в области Ω:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - (\beta_T T - \beta_C C)\mathbf{G}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$-k\Delta T + \mathbf{u}\cdot\nabla T = f \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$-\lambda\Delta C - D^\theta\Delta T + \mathbf{u}\cdot\nabla C = f^c \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad C = 0 \text{ на } \Gamma, \quad k\frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Gamma_N. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор скорости, T — температура среды, C — концентрация растворённого вещества, составляющего вместе с основной средой бинарную жидкость, $p = P/\rho_0$, где P — давление, $\rho_0 = \text{const}$ — плотность жидкости, $\nu = \text{const} > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, $k = \text{const} > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\lambda = \text{const} > 0$ — коэффициент диффузии, $D^\theta = \text{const}$ — коэффициент Соре́, $\beta_T > 0$ и $\beta_C > 0$ — постоянные коэффициенты теплового расширения и концентрационного сжатия, $\mathbf{G} = -(0, 0, G)$ — вектор гравитационного ускорения, а выражения $\beta_T T\mathbf{G}$ и $\beta_C C\mathbf{G}$ описывают соответственно плотности сил тепловой либо концентрационной плавучести, $\mathbf{f}$ — плотность гидродинамических источников, f (либо f^c) — плотность источников тепла (либо вещества). Ниже на задачу (1)–(4) для заданных величин ν, k, λ, β_T, β_C, $\mathbf{f}$, f, f^c, $\mathbf{g}$ и χ будем ссылаться как на задачу 1. Более подробно о выводе модели (1), (2), (3), причём в более общем случае переменных коэффициентов, можно прочитать в [8, 22].

Отметим, что для концентрации C мы используем условие Дирихле $C|_\Gamma = 0$ на всей границе Γ, тогда как для температуры T используется условие Дирихле $T|_{\Gamma_D} = 0$ на участке Γ_D и условие Неймана на Γ_N. Оно физически отвечает заданию нормального теплового потока

$k\dfrac{\partial T}{\partial n}$ на участке Γ_N. По аналогичной схеме могут быть исследованы другие краевые задачи для модели (1)–(4).

Для упрощения доказательства разрешимости и бóльшей прозрачности рассуждений мы рассматриваем задачу 1 при однородных граничных условиях Дирихле для T и C соответственно на Γ_D и Γ. Случай неоднородных граничных условий Дирихле для T и C может быть сведён к однородному случаю путём введения лифтингов неоднородных граничных данных для T и C. О деталях сведения можно прочитать в [23, гл. 5].

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Так же, как и в работах [23, 24], при исследовании задачи 1, мы будем использовать пространства $L^r(D)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, и пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо границу Γ, либо часть Γ_0 границы Γ. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{L}^r(D)$ и $\mathbf{H}^s(D)$. Через $(\cdot,\cdot)_{s,\Omega}$, $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ или $|\cdot|_{s,\Omega}$ будем обозначать скалярное произведение, норму или полунорму в $H^s(\Omega)$ или $\mathbf{H}^s(\Omega)$ соответственно. Скалярные произведения и нормы в пространстве $L^2(\Omega)$ или в его векторном аналоге будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|_\Omega$, соответственно. X^* обозначает двойственное пространство к гильбертову пространству X, а отношение двойственности для пары X и X^* записывается через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ или просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

В нашем анализе мы будем также использовать следующие функциональные пространства:

$$L^2_0(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega) \mid (h,1) = 0\}, \quad H^1_0(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_\Gamma = 0\}, \quad \mathcal{C} = H^1_0(\Omega),$$

$$\mathcal{T} = \{h \in H^1(\Omega) \mid h|_{\Gamma_D} = 0\}, \quad \mathbf{H}^1_0(\Omega) = H^1_0(\Omega)^3, \quad V = \big\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \mid \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\big\}.$$

Отметим, что каждое из пространств $H^1(\Omega)$, $\mathcal{C} \equiv H^1_0(\Omega)$ и $\mathcal{T}$ является гильбертовым пространством по норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, которая эквивалентна полунорме $|\cdot|_{1,\Omega}$ для функции $C \in \mathcal{C}$ или $T \in \mathcal{T}$ в соответствии с неравенством Фридрихса — Пуанкаре́ [23, с. 26]:

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant C_P|\varphi|_{1,\Omega} \text{ для любой } \varphi \in \mathcal{T} \text{ (либо } \varphi \in \mathcal{C}), \quad C_P = \text{const} > 1. \tag{5}$$

Для функции $T \in \mathcal{T}$ неравенство (5) имеет место, конечно, в случае, когда $\operatorname{meas}\Gamma_D > 0$, что, конечно, будет предполагаться выполненным (см. условие **2.1** ниже). Определим произведения пространств $X = \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ и $W = V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C} \subset X$ с нормой

$$\|\mathbf{x}\|^2_X = \|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + \|T\|^2_{1,\Omega} + \|C\|^2_{1,\Omega} \text{ для любого } \mathbf{x} \equiv (\mathbf{u},T,C) \in X \\ \text{(или для любого } (\mathbf{u},T,C) \in W) \tag{6}$$

и обозначим через X^* двойственное пространство $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathcal{T}^* \times \mathcal{C}^*$ к X.

Мы предполагаем, что для исходных данных задачи 1 выполняются следующие условия:

2.1. Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots,N$; открытые подмножества Γ_D и Γ_N множества Γ удовлетворяют условиям $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing$ и $\operatorname{meas}\Gamma_D > 0$.

2.2. $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $f \in \mathcal{T}^*$, $f^c \in \mathcal{C}^*$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$.

2.3. $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $(\mathbf{g},\mathbf{n})_{\Gamma^{(j)}} = 0$, $j = 1,2,\ldots,N$; $\mathbf{g}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_N} \geqslant 0$.

2.4. $k \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\nu \in \mathbb{R}^+$, $D^\theta \in \mathbb{R}$, $\beta_T \in \mathbb{R}$, $\beta_C \in \mathbb{R}$.

Здесь и ниже $\mathbb{R}^+ = \{s \in \mathbb{R}, s > 0\}$.

Введём постоянные векторы

$$\mathbf{b}_1 = \beta_T\mathbf{G}, \quad \mathbf{b}_2 = \beta_C\mathbf{G}. \tag{7}$$

Отметим, что существуют константы β_1 и β_2, с которыми выполняются неравенства

$$|(\mathbf{b}_1 T, \mathbf{v})| \equiv |(\beta_T \mathbf{G} T, \mathbf{v})| \leqslant \beta_1 \|T\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } T \in \mathcal{T},\ \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

$$|(\mathbf{b}_2 C, \mathbf{v})| \equiv |(\beta_C \mathbf{G} C, \mathbf{v})| \leqslant \beta_2 \|C\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } C \in \mathcal{C},\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{8}$$

Ниже нам потребуются некоторые хорошо известные свойства билинейных и трилинейных форм, связанных с линейными и нелинейными слагаемыми в уравнениях (1)–(3). Сформулируем их в виде следующей леммы.

Лемма. *Пусть* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ *с* $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ *— заданная функция и пусть выполняются условия* **2.1**, **2.4**. *Тогда существуют положительные константы* δ_0, δ_1, δ_2, γ_1, γ_1', γ_2, γ_2', γ_3 *и* β, *зависящие от* Ω, *такие, что имеют место следующие соотношения:*

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \geqslant \delta_0 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{9}$$

$$(\nabla T, \nabla T) \geqslant \delta_1 \|T\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любой } T \in \mathcal{T}, \tag{10}$$

$$(\nabla C, \nabla C) \geqslant \delta_2 \|C\|_{1,\Omega}^2, \text{ для любой } C \in \mathcal{C}, \tag{11}$$

$$|((\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leqslant \gamma_1' \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_1 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \mathbf{w},\ \mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \tag{12}$$

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}),\ ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \text{ для любых } \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \tag{13}$$

$$|(\mathbf{w} \cdot \nabla T, h)| \leqslant \gamma_2' \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|T\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_2 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|T\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega),\ T \in \mathcal{T},\ h \in \mathcal{T} \text{ (либо } T \in \mathcal{C},\ h \in \mathcal{C}), \tag{14}$$

$$\begin{gathered} (\mathbf{u} \cdot \nabla S, S) = (1/2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, S^2)_{\Gamma_N} \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla h, h) = 0 \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \end{gathered} \tag{15}$$

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi, \varphi) = 0 \text{ для любых } \mathbf{w} \in V,\ \varphi \in \mathcal{T} (\text{либо } \varphi \in \mathcal{C}), \tag{16}$$

$$|(\chi, S)_{\Gamma_N}| \leqslant \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \chi \in L^2(\Gamma_N),\ S \in \mathcal{T}, \tag{17}$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}} -(\operatorname{div} \mathbf{v}, p)/\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \geqslant \beta \|p\|_\Omega \text{ для любой } p \in L_0^2(\Omega). \tag{18}$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ 1

Введём слабую формулировку задачи 1. Для этого умножим первое уравнение в (1) на функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, уравнение (2) — на функцию $S \in \mathcal{T}$, а уравнение (3) — на функцию $h \in \mathcal{C}$, проинтегрируем по области Ω, применим формулы Грина и воспользуемся граничными условиями в (4). В результате мы приходим к слабой формулировке задачи 1, которая заключается в нахождении такой четвёрки функций $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $p \in L_0^2(\Omega)$, $T \in \mathcal{T}$, $C \in \mathcal{C}$, называемой слабым решением задачи 1, что

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1 T - \mathbf{b}_2 C, \mathbf{v}) \text{ для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{19}$$

$$k(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \tag{20}$$

$$\lambda(\nabla C, \nabla h) + D^\theta(\nabla T, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C, h) = \langle f^c, h \rangle \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \tag{21}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma. \tag{22}$$

Рассмотрим сужение тождества (19) на пространство V, имеющее вид

$$\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})+((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v})=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle-(\mathbf{b}_1T-\mathbf{b}_2C,\mathbf{v})\ \text{для любого}\ \mathbf{v}\in V. \tag{23}$$

Несложно показать, рассуждая, как, например, в [23, гл. 5], что для доказательства существования слабого решения задачи 1 достаточно доказать существование решения $(\mathbf{u},T,C)\in\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathcal{T}\times\mathcal{C}$ задачи (20)–(23), а затем восстановить давление $p\in L^2_0(\Omega)$ по стандартной схеме с использованием схемы де Рама (см, например, [25]).

Поскольку скорость $\mathbf{u}$ удовлетворяет неоднородному граничному условию $\mathbf{u}|_\Gamma=\mathbf{g}$, то, как обычно, будем искать компоненту $\mathbf{u}$ решения $(\mathbf{u},T,C)\in\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathcal{T}\times\mathcal{C}$ задачи (20)–(23) в следующем виде:

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\tilde{\mathbf{u}}. \tag{24}$$

В (24) $\tilde{\mathbf{u}}\in V$ — новая неизвестная функция, тогда как $\mathbf{u}_0\equiv\mathbf{u}_{\varepsilon_0}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$ — значение при $\varepsilon=\varepsilon_0$ так называемого лифтинга $\mathbf{u}_\varepsilon$ скорости $\mathbf{u}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, удовлетворяющего условиям

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon=0\ \text{в}\ \Omega,\quad \mathbf{u}_\varepsilon|_\Gamma=\mathbf{g},\ \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega}\leqslant C_\varepsilon\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \tag{25}$$

$$|(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\varepsilon,\mathbf{v})|\leqslant\varepsilon\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}\ \text{для любого}\ \mathbf{v}\in V. \tag{26}$$

Здесь C_ε — константа, не зависящая от $\mathbf{g}$, но зависящая от ε и Ω. Доказательство существования лифтинга $\mathbf{u}_\varepsilon$ с описанными свойствами можно найти в [23, прил. 2] и [25]. Что касается конкретного значения ε_0 параметра ε, характеризующего лифтинг скорости, то, как и в [23, 25], мы выберем его из условия $\varepsilon=\varepsilon_0\leqslant(\nu_*/2)\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$. Из него и (26) следует, что

$$|((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u}_{\varepsilon_0},\mathbf{v})|\leqslant(\nu_*/2)\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}\ \text{для любого}\,\mathbf{v}\in V. \tag{27}$$

Подставляя (24) в (20), (21) и (23), мы получаем следующие тождества для тройки $(\tilde{\mathbf{u}},T,C)$:

$$k(\nabla T,\nabla S)+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla T,S)+(\tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla T,S)=\langle f,S\rangle+(\chi,S)_{\Gamma_N}\ \text{для любой}\ S\in\mathcal{T}, \tag{28}$$

$$\lambda(\nabla C,\nabla h)+D^\theta(\nabla T,\nabla h)+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla C,h)+(\tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla C,h)=\langle f^c,h\rangle\ \text{для любой}\ h\in\mathcal{C}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\nu(\nabla\tilde{\mathbf{u}},\nabla\mathbf{v})&+((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})+((\tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v})+((\tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})\\&=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle-\nu(\nabla\mathbf{u}_0,\nabla\mathbf{v})-((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v})-(\mathbf{b}_1T,\mathbf{v})+(\mathbf{b}_2C,\mathbf{v})\ \text{для любого}\,\mathbf{v}\in V.\end{aligned} \tag{30}$$

Нашей ближайшей целью является доказательство существования решения $(\tilde{\mathbf{u}},T,C)\in W\equiv V\times\mathcal{T}\times\mathcal{C}$ задачи (28), (29), (30). Для этого мы применим теорему Шаудера о неподвижной точке. С этой целью введём тройки $\mathbf{z}=(\mathbf{w},\eta,\mu)\in W$, $\mathbf{y}=(\tilde{\mathbf{u}},T,C)\in W$ и определим оператор $F:W\to W$, действующий по формуле: $F(\mathbf{z})=\mathbf{y}$, где элементы $T\in\mathcal{T}$, $C\in\mathcal{C}$ и $\tilde{\mathbf{u}}\in V$ получаются путём последовательного решения следующих линейных задач:

$$a_1(T,S)\equiv k(\nabla T,\nabla S)+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla T,S)+(\mathbf{w}\cdot\nabla T,S)=\langle l_1,S\rangle\ \text{для любой}\ S\in\mathcal{T}, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}a_2(C,h)\equiv\lambda(\nabla C,\nabla h)&+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla C,h)+(\mathbf{w}\cdot\nabla C,h)\\&=\langle l_2,h\rangle-D^\theta(\nabla T_{\mathbf{w}},\nabla h)\ \text{для любой}\ h\in\mathcal{C},\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}a_0(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})\equiv\nu(\nabla\tilde{\mathbf{u}},\nabla\mathbf{v})&+((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})+((\tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v})\\&+((\mathbf{w}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})=\langle l_0,\mathbf{v}\rangle-(\mathbf{b}_1T_{\mathbf{w}},\mathbf{v})+\mathbf{b}_2C_{\mathbf{w}},\mathbf{v})\ \text{для любого}\ \mathbf{v}\in V.\end{aligned} \tag{33}$$

Здесь $\mathbf{z} \equiv (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ — заданный элемент, тогда как функционалы $l_1 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $l_2 : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ и $l_0 : V \to \mathbb{R}$ определяются формулами

$$\langle l_1, S\rangle = \langle f, S\rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N}, \quad \langle l_2, h\rangle = \langle f^c, h\rangle, \tag{34}$$

$$\langle l_0, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle - \nu(\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) - \big((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}\big). \tag{35}$$

Индекс $\mathbf{w}$ у функций $T_{\mathbf{w}}$ и $C_{\mathbf{w}}$ в (33) означает, что $T_{\mathbf{w}}$ и $C_{\mathbf{w}}$ являются решениями соответственно задач (31) или (32), отвечающих заданному элементу $\mathbf{w} \in V$ или паре $(\mathbf{w}, T_{\mathbf{w}}) \in V \times \mathcal{T}$.

Используя (9), (12), (15), (16) и (26), мы выводим следующие оценки:

$$\nu|(\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v})| \leqslant \nu C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \tag{36}$$

$$|((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v})| \leqslant \gamma_1\|\mathbf{u}_0\|^2_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_1 C^2_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|^2_{1/2,\Gamma}\|\mathbf{v}\|_V \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \tag{37}$$

$$\nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \geqslant (\delta_0\nu/2)\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \tag{38}$$

$$\begin{gathered}(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T, T) = (1/2)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, T^2)_{\Gamma_N} \geqslant 0, \quad (\mathbf{w} \cdot \nabla T, T) = 0,\\ (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C, C) = 0, \quad (\mathbf{w} \cdot \nabla C, C) = 0,\\ \text{для любых } T \in \mathcal{T} \text{ или } C \in \mathcal{C},\ \mathbf{w} \in V.\end{gathered} \tag{39}$$

Из (34), (35), (36), (37) и (17) следует, что $l_1 \in \mathcal{T}^*$, $l_2 \in \mathcal{C}^*$, $l_0 \in V^*$ и выполняются следующие оценки:

$$\|l_1\|_{\mathcal{T}^*} \leqslant \|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3\|\chi\|_{\Gamma_N}, \quad \|l_2\|_{\mathcal{C}^*} = \|f^c\|_{\mathcal{C}^*}, \tag{40}$$

$$\|l_0\|_{V^*} \leqslant M_{l_0} \equiv \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} + M_{\mathbf{g}}, \quad M_{\mathbf{g}} = \nu_{\max}C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} + \gamma_1 C^2_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|^2_{1/2,\Gamma}. \tag{41}$$

Кроме того, для каждого вектора $\mathbf{w} \in V$ билинейная форма $a_1 : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, определённая в тождестве (31), непрерывна с учётом (14) и коэрцитивна на $\mathcal{T}$ с константой $k_* = \delta_1 k$. Последнее следует из (10), (16) и (39), в силу которых имеем:

$$a_1(S, S) \geqslant k(\nabla S, \nabla S) + (1/2)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, S^2)_{\Gamma_N} \geqslant k_*\|S\|^2_{1,\Omega} \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad k_* = \delta_1 k. \tag{42}$$

Точно так же для каждого вектора $\mathbf{w} \in W$ билинейная форма $a_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, определённая в (32), непрерывна с учётом (14) и коэрцитивна на $\mathcal{C}$ с константой $\lambda_* = \delta_2\lambda$, поскольку в силу (11), (16) и (39) имеем

$$a_2(h, h) \geqslant \lambda(\nabla h, \nabla h) \geqslant \lambda_*\|h\|^2_{1,\Omega} \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \quad \lambda_* = \delta_2\lambda. \tag{43}$$

Из теоремы Лакса — Мильграма и оценок (40) следует, что для любой тройки $\mathbf{z} \equiv (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ существует единственное решение $T \equiv T_{\mathbf{w}} \in \mathcal{T}$ задачи (31) и $C \equiv C_{\mathbf{w}} \in \mathcal{C}$ задачи (32). Кроме того, с учётом (40), (42), (43) для функций T и C справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}\|T\|_{1,\Omega} \leqslant c_1(\|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3\|\chi\|_{\Gamma_N}) \equiv M_T \quad (c_1 = 1/k_*),\\ \|C\|_{1,\Omega} \leqslant c_2(\|f\|_{\mathcal{C}^*} + |D^\theta|\|\nabla T\|_\Omega) \leqslant c_2(\|f\|_{\mathcal{C}^*} + |D^\theta|M_T) \equiv M_C \quad (c_2 = 1/\lambda_*).\end{gathered} \tag{44}$$

Теперь рассмотрим задачу (33) относительно $\tilde{\mathbf{u}}$. Из (8), (41) и (44) следует, что для правой части в (33) справедлива следующая оценка:

$$\begin{gathered}|\langle l_0, \mathbf{v}\rangle - (\mathbf{b}_1 T_{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2 C_{\mathbf{w}}, \mathbf{v})| \leqslant [M_{l_0} + \beta_1\|T_{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega} + \beta_2\|C_{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega}]\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\\ [M_{l_0} + (\beta_1 M_T + \beta_2 M_C)]\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любого } \mathbf{v} \in V.\end{gathered} \tag{45}$$

Кроме того, из (13) и (38) следует, что для каждой тройки $(\mathbf{w},\eta,\mu)$ билинейная форма $a_0 : V\times V\to\mathbb{R}$, определённая в (33), непрерывна и коэрцитивна с константой коэрцитивности $(\nu_*/2)$, где $\nu_*=\delta_0\nu$. В таком случае из теоремы Лакса — Мильграма следует, что для каждой тройки $\mathbf{z}=(\mathbf{w},\eta,\mu)\in W\equiv V\times\mathcal{T}\times\mathcal{C}$ существует единственное решение $\tilde{\mathbf{u}}\in V$ задачи (33), и выполняется с учётом (45) следующая оценка:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}\leqslant M_{\tilde{\mathbf{u}}}=(2/\nu_*)(M_{l_0}+\beta_1M_T+\beta_2M_C). \tag{46}$$

Исходя из формул (44) и (46), мы введём выпуклое замкнутое множество (типа бесконечномерного бруса) K в W формулой

$$\begin{aligned}K=\big\{(\mathbf{w},\eta,\mu)\in W\mid \|\eta\|_{1,\Omega}\leqslant M_T\equiv(1/k_*)(\|f\|_{\mathcal{T}^*}+\gamma_3\|\chi\|_{\Gamma_N}),\\ \|\mu\|_{1,\Omega}\leqslant M_C\equiv(1/\lambda_*)(\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}+|D^\theta|M_T),\\ \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\leqslant M_{\tilde{\mathbf{u}}}\equiv(2/\nu_*)(M_{l_0}+\beta_1M_T+\beta_2M_C)\big\}.\end{aligned} \tag{47}$$

Из (44), (46), (47) следует, что определённый выше оператор $F:W\to W$ отображает множество K в себя. Это означает, что для любой тройки $\mathbf{z}=(\mathbf{w},\eta,\mu)\in K$ решение $\mathbf{y}\equiv(\tilde{\mathbf{u}},T,C)$ задачи (31), (32), (33) удовлетворяет следующим оценкам:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}\leqslant M_{\tilde{\mathbf{u}}},\quad \|T\|_{1,\Omega}\leqslant M_T,\quad \|C\|_{1,\Omega}\leqslant M_C. \tag{48}$$

Осталось доказать, что оператор F компактен и непрерывен на множестве K, заданном в (47). Для этого выберем произвольную последовательность $\mathbf{z}_n=(\mathbf{w}_n,\eta_n,\mu_n)$, $n=1,2,\ldots$ из K и положим $\mathbf{y}_n\equiv(\tilde{\mathbf{u}}_n,T_n,C_n)=F(\mathbf{z}_n)\in K$. Покажем, что из последовательности $\mathbf{y}_n$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится по норме X к элементу $\mathbf{y}\in K$. В силу рефлексивности пространств $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и компактности вложений $H^1(\Omega)\subset L^4(\Omega)$, $\mathbf{H}^1(\Omega)\subset\mathbf{L}^4(\Omega)$ существует подпоследовательность последовательности $\{\mathbf{z}_n\}=\{(\mathbf{w}_n,\eta_n,\mu_n)\}$, которую мы снова обозначим через $\{\mathbf{z}_n\}$, и существует элемент $\mathbf{z}=(\mathbf{w},\eta,\mu)\in K$ такой, что

$$\eta_n\to\eta\ \text{ слабо в }\ H^1(\Omega),\ \text{ сильно в }\ L^4(\Omega)\text{ и п.в. в }\Omega\ \text{ при }\ n\to\infty, \tag{49}$$

$$\mu_n\to\mu\ \text{ слабо в }\ H^1(\Omega),\ \text{ сильно в }\ L^4(\Omega)\text{ и п.в. в }\Omega\ \text{ при }\ n\to\infty, \tag{50}$$

$$\mathbf{w}_n\to\mathbf{w}\ \text{ слабо в }\ \mathbf{H}^1(\Omega),\ \text{ сильно в }\mathbf{L}^4(\Omega)\text{ и п.в. в }\Omega\text{ при }n\to\infty. \tag{51}$$

Пусть $\mathbf{y}=F(\mathbf{z})$. По определению, элемент $\mathbf{y}\equiv(\tilde{\mathbf{u}},T,C)\in W$ является решением задачи (31), (32), (33), которая соответствует тройке $\mathbf{z}=(\mathbf{w},\eta,\mu)$, а элемент $\mathbf{y}_n\equiv(\tilde{\mathbf{u}}_n,T_n,C_n)\in W$ является решением следующей задачи:

$$a_1(T_n,S)\equiv k(\nabla T_n,\nabla S)+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla T_n,S)+(\mathbf{w}_n\cdot\nabla T_n,S)=\langle f,S\rangle+(\chi,S)_{\Gamma_N}, \tag{52}$$

$$\begin{aligned}a_2(C_n,h)\equiv\lambda(\nabla C_n,\nabla h)+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla C_n,h)\\ +(\mathbf{w}_n\cdot\nabla C_n,h)=\langle f^c,h\rangle-D^\theta(\nabla T_n,\nabla h)\text{ для любой }h\in\mathcal{C},\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}a_0(\tilde{\mathbf{u}}_n,\mathbf{v})\equiv\nu(\nabla\tilde{\mathbf{u}}_n,\nabla\mathbf{v})+((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}}_n,\mathbf{v})+((\tilde{\mathbf{u}}_n\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v})+((\mathbf{w}_n\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}}_n,\mathbf{v})\\ =\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle-\nu(\nabla\mathbf{u}_0,\nabla\mathbf{v})-((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v})-(\mathbf{b}_1T_n,\mathbf{v})+(\mathbf{b}_2C_n,\mathbf{v}),\mathbf{v})\text{ для любого }\mathbf{v}\in V.\end{aligned} \tag{54}$$

Она получается из (31), (32), (33) заменой элемента $\mathbf{z}=(\mathbf{w},\eta,\mu)$ на $\mathbf{z}_n=(\mathbf{w}_n,\eta_n,\mu_n)$, а тройки $(\mathbf{u},T,C)$ — на $(\mathbf{u}_n,T_n,C_n)$.

Докажем, что $\mathbf{y}_n\to\mathbf{y}$ сильно в X при $n\to\infty$ или, что эквивалентно, $T_n\to T$, $C_n\to C$ сильно в $H^1(\Omega)$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n\to\tilde{\mathbf{u}}$ сильно в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ при $n\to\infty$. Для этого вычтем (31), (32) и (33), соответственно, из (52), (53) и (54). В результате мы получим следующие линейные задачи для разностей $T_n - T$, $C_n - C$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}$:

$$a_1(T_n - T, S) \equiv k(\nabla(T_n - T), \nabla S) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla(T_n - T), S) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla(T_n - T), S) \\ - ((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla T, S) \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (55)$$

$$a_2(C_n - C, h) \equiv \lambda(\nabla(C_n - C), \nabla h) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla(C_n - C), h) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla(C_n - C), h) \\ - D^\theta((\nabla T_n - \nabla T), \nabla h) - ((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla C, h) \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (56)$$

$$a_0(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \equiv \nu(\nabla(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) + (((\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \\ + ((\mathbf{w}_n \cdot \nabla)(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) = -(((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ - (\mathbf{b}_1(T_n - T), \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2(C_n - C), \mathbf{v}) \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (57)$$

Используя (14), (48), (49) и (51), мы имеем

$$|((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla T, S)| \leqslant \gamma_2' \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|T\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \\ \leqslant \gamma_2' M_T \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|S\|_{1,\Omega} \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (58)$$

Как было показано выше, для любой тройки $(\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n) \in V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ билинейная относительно разности $T_n - T$ и S форма $a_1 : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, определённая в (55), непрерывна и коэрцитивна с константой коэрцитивности $k_* > 0$. Отсюда вытекает, в силу (58) и теоремы Лакса — Мильграма, применённой к задаче (55), что

$$\|T_n - T\|_{1,\Omega} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \quad (59)$$

Нам осталось показать, что

$$\|C_n - C\|_{1,\Omega} \to 0, \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \quad (60)$$

Первое утверждение в (60) доказывается аналогично (59) с использованием (14), (59) и оценки

$$\|(\nabla T_n - \nabla T), \nabla h)| \leqslant \|\nabla T_n - \nabla T\|_\Omega \|\nabla h\|_\Omega \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для любой } h \in \mathcal{C}. \quad (61)$$

Для доказательства второго утверждения в (60) обратимся к задаче (57) и рассмотрим, как при выводе оценки (59), сначала первое слагаемое в правой части (57). Используя (12), (46) и (51), выводим что

$$(((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \leqslant \gamma_1' \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \\ \leqslant \gamma_1' M_{\tilde{\mathbf{u}}} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (62)$$

Применяя далее оценки (8) ко второму и третьему слагаемым в правой части (57) и используя (59) и первое соотношение в (60), имеем

$$|(\mathbf{b}_1(T_n - T), \mathbf{v})| \leqslant \beta_1 \|T_n - T\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (63)$$

$$|(\mathbf{b}_2(C_n - C), \mathbf{v})| \leqslant \beta_2 \|C_n - C\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (64)$$

Из (62)–(64) вытекает в силу теоремы Лакса — Мильграма, применённой к задаче (57), коэрцитивной с константой коэрцитивности $\nu_*/2$, не зависящей от n, справедливость второго соотношения в (60).

Из (59) и (60) следует, что упомянутый выше оператор $F : W \to W$ является непрерывным и компактным на множестве $K \subset W$, определённом в (47). Поэтому в силу теоремы Шаудера оператор F имеет неподвижную точку $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, T, C) = F(\mathbf{z}) \in K$, которая, по построению, является искомым решением задачи (28), (29), (30) и, кроме того, удовлетворяет всем оценкам в (48). Это, в свою очередь, означает, что тройка $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$, где вектор $\mathbf{u}$ определён в (24), является искомым решением задачи (20), (21), (22), (23) и справедливы следующие оценки для $(\mathbf{u}, T, C)$:

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leqslant M_{\mathbf{u}} \equiv M_{\tilde{\mathbf{u}}} + C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \quad \|T\|_{1,\Omega} \leqslant M_T, \quad \|C\|_{1,\Omega} \leqslant M_C. \tag{65}$$

Осталось доказать существование компоненты p слабого решения задачи 1, удовлетворяющей вместе с тройкой $(\mathbf{u}, T, C)$ тождеству (19). Это делается с помощью теоремы де Рама (см. детали в [23] и [25]). Кроме того, используя $\inf - \sup$ условие (18) и рассуждая, как в [21], можно получить следующую оценку для p:

$$\|p\|_{\Omega} \leqslant M_p \equiv \beta^{-1}[(\nu + \gamma_1 M_{\mathbf{u}})M_{\mathbf{u}} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}]. \tag{66}$$

Здесь β — константа, введённая в (18). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* **2.1**–**2.4***. Тогда существует слабое решение* $(\mathbf{u}, p, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ *задачи 1, для которого справедливы оценки (65), (66), где* $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$*,* M_T *и* M_C *– непрерывные неотрицательные функции норм* $\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}$*,* $\|f\|_{\mathcal{T}^*}$*,* $\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}$*,* $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$*,* $\|\chi\|_{\Gamma_N}$*, определяемые формулами*

$$\begin{aligned} M_T &\equiv (1/\delta_1 k)(\|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3\|\chi\|_{\Gamma_N}), \\ M_C &\equiv (1/\delta_2\lambda)(\|f^c\|_{\mathcal{C}^*} + |D^\theta| M_T), \\ M_{\tilde{\mathbf{u}}} &\equiv (2/\delta_0\nu)(M_{l_0} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C). \end{aligned} \tag{67}$$

Совершенно по аналогичной схеме может быть исследована краевая задача для двухдиффузионной модели ТМП, учитывающей эффект Дюфура (вместо эффекта Соре́). Для этой модели, называемой моделью концентрационной диффузии, уравнения (1) и (4) не изменяются, а (2) и (3) принимают вид

$$-k\Delta T - D^\delta \Delta C + \mathbf{u}\cdot\nabla T = f \text{ в } \Omega, \tag{2a}$$

$$-\lambda\Delta C + \mathbf{u}\cdot\nabla C = f^c \text{ в } \Omega. \tag{3a}$$

Здесь $D^\delta \in \mathbb{R}$ — коэффициент Дюфура. На полученную задачу (1), (2a), (3a), (4), будем ссылаться как на задачу 2. Для задачи 2 справедлив следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* **2.1**–**2.4** *и* $D^\delta \in \mathbb{R}$*. Тогда существует слабое решение* $(\mathbf{u}, p, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ *задачи* 2*, для которого справедливы оценки* (65), (66)*, где* M_C*,* M_T *и* $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$ *– непрерывные неотрицательные функции норм* $\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}$*,* $\|f\|_{\mathcal{T}^*}$*,* $\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}$*,* $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$*,* $\|\chi\|_{\Gamma_N}$*, определяемые формулами*

$$\begin{aligned} M_C &\equiv (1/\delta_2\lambda)\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}, \\ M_T &\equiv (1/\delta_1 k)(\|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3\|\chi\|_{\Gamma_N} + |D^\delta| M_C), \\ M_{\tilde{\mathbf{u}}} &\equiv (2/\delta_0\nu)(M_{l_0} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C). \end{aligned} \tag{68}$$

Анализ оценок (65)–(68) показывает, что известный факт об обратно пропорциональной зависимости H^1-норм основных компонент (скорости, температуры и концентрации) решения задачи 1 от ведущих коэффициентов ν, k и λ (см., например, [23, гл. 5], [26]) сохраняется и для модели термодиффузии (1)–(3). Но в отношении их зависимости от коэффициента Соре́ наблюдается совсем другая тенденция. Видно, что для задачи 1 оценки H^1–норм скорости и концентрации линейно растут с ростом $|D^\theta|$, тогда как оценка H^1–нормы температуры, вообще, не зависит от $|D^\theta|$. Точно так же для задачи 2 оценки H^1–норм скорости и температуры линейно растут с ростом модуля коэффициента Дюфура $|D^\delta|$, тогда как оценка H^1–нормы концентрации не зависит от $|D^\delta|$. В этом состоит основное отличие в поведении решений краевых задач для классической стационарной модели ТМП, рассмотренной, например, в [26], и исследованных в этой работе краевых задач для модели ТМП, учитывающей эффект Соре́ (или Дюфура).

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Выведем в этом разделе достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность слабого решения задачи 1. Предположим, что, наряду с решением $(\mathbf{u}_1, p_1, T_1, C_1)$ задачи 1, существование которого вместе с оценками (65), (66) вытекает из теоремы 3.1, существует ещё одно решение $(\mathbf{u}_2, p_2, T_2, C_2)$ задачи 1. Полагая $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $p = p_1 - p_2$, $T = T_1 - T_2$, $C = C_1 - C_2$, вычтем соотношения (19)–(22), записанные для $\mathbf{u}_2$, p_2, T_2 и C_2, из этих же соотношений, записанных для $\mathbf{u}_1$, p_1, T_1 и C_1. В результате мы приходим к следующим соотношениям для разностей $\mathbf{u}$, p, T и C:

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_2\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - (\operatorname{div}\mathbf{v}, p) \\ = -(\mathbf{b}_1 T, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2 C, \mathbf{v}) \text{ для любого } \mathbf{v}\in V, \quad (69)$$

$$k(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u}_2\cdot\nabla T, S) + (\mathbf{u}\cdot\nabla T_1, S) = 0 \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (70)$$

$$\lambda(\nabla C, \nabla h) + D^\theta(\nabla T, \nabla h) + (\mathbf{u}_2\cdot\nabla C, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla C_1, h) = 0 \text{ для любой } h\in\mathcal{C}, \quad (71)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma,\ T = 0 \text{ на } \ \Gamma_D,\ C = 0 \text{ на } \ \Gamma. \quad (72)$$

Полагая в (69)–(71) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, $S = T$, $h = C$ и учитывая (13), (15), (16) и условие $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, будем иметь

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) = -((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) - (\mathbf{b}_1 T, \mathbf{u}) + (\mathbf{b}_2 C, \mathbf{u}), \quad (73)$$

$$k(\nabla T, \nabla T) + (\mathbf{u}\cdot\nabla T_1, T) \leqslant 0, \quad (74)$$

$$\lambda(\nabla C, \nabla C) + D^\theta(\nabla T, \nabla C) + (\mathbf{u}\cdot\nabla C_1, C) \leqslant 0. \quad (75)$$

Из (74) и (75) выводим последовательно с учётом (10), (11), (14) и оценок $\|T_1\|_{1,\Omega} \leqslant M_T$, $\|C_1\|_{1,\Omega} \leqslant M_C$, что

$$\|T\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{\gamma_2}{\delta_1 k} M_T \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}, \quad \|C\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{\gamma_2}{\delta_2\lambda} M_C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \frac{|D^\theta|}{\delta_2\lambda}\|T\|_{1,\Omega}. \quad (76)$$

Из (76) вытекает, что

$$\|C\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{\gamma_2}{\delta_2\lambda} M_C\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \frac{|D^\theta|}{\delta_2\lambda}\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1 k}M_T\right)\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leqslant \left[\frac{\gamma_2}{\delta_2\lambda}M_C + \frac{|D^\theta|}{\delta_2\lambda}\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1 k}M_T\right)\right]\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}. \quad (77)$$

Используя предыдущие оценки (12), (8), (76), (77), и оценку $\|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega} \leqslant M_{\mathbf{u}}$ из (73) приходим к неравенству

$$\delta_0\nu\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} \leqslant \gamma_1\|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + (\beta_1\|T\|_{1,\Omega} + \beta_2\|C\|_{1,\Omega})\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \\ \leqslant \left[\gamma_1 M_{\mathbf{u}} + \frac{\beta_1\gamma_2}{\delta_1 k}M_T + \frac{\beta_2}{\delta_2\lambda}\left(\gamma_2 M_C + \frac{\gamma_2 D^\theta}{\delta_1 k}M_T\right)\right]\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega}.$$

Из него вытекает, в свою очередь, следующее основное неравенство:

$$\left[\delta_0\nu-\gamma_1 M_{\mathbf{u}}-\frac{\gamma_2}{\delta_1 k}\left(\beta_1+\frac{\beta_2 D^\theta}{\delta_2\lambda}\right)M_T-\frac{\beta_2\gamma_2}{\delta_2\lambda}M_C\right]\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2\leqslant 0. \tag{78}$$

Пусть исходные данные для задачи 1 таковы, что выполняется условие

$$\gamma_1 M_{\mathbf{u}}+\frac{\gamma_2}{\delta_1 k}\left(\beta_1+\frac{\beta_2|D^\theta|}{\delta_2\lambda}\right)M_T+\frac{\beta_2\gamma_2}{\delta_2\lambda}M_C<\delta_0\nu$$

или (эквивалентное) условие

$$\frac{\gamma_1}{\delta_0\nu}M_{\mathbf{u}}+\frac{\beta_1}{\delta_0\nu}\frac{\gamma_2}{\delta_1 k}M_T+\frac{\beta_2}{\delta_0\nu\delta_2\lambda}\left(\gamma_2 M_C+\frac{\gamma_2|D^\theta|}{\delta_1 k}M_T\right)<1. \tag{79}$$

Из (78) тогда вытекает, что $\mathbf{u}=0$, а из (76), в свою очередь, следует, что $T=0$ и $C=0$. Это означает, что $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$, $T_1=T_2$, $C_1=C_2$. Отсюда и (69) с учётом $\inf-\sup$ условия (18) вытекает, что $p=0$. Тем самым доказана теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.1 *и условие* (79). *Тогда слабое решение задачи* 1 *существует и единственно.*

Аналогичная теорема единственности верна и для задачи 2.

Замечание. При $D^\theta=0$, т. е. в отсутствие эффекта Соре́, неравенство (79) переходит в условие

$$\frac{\gamma_0}{\delta_0\nu}M_{\mathbf{u}}+\frac{\gamma_2}{\delta_0\nu}\frac{\beta_1}{\delta_1 k}M_T+\frac{\gamma_2}{\delta_0\nu}\frac{\beta_2}{\delta_2\lambda}M_C<1, \tag{$*$}$$

имеющее смысл условия единственности решения краевой задачи для классической модели тепломассопереноса, установленное в [26] (см. также [23, гл. 5]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены краевые задачи для стационарных двухдиффузионных моделей тепломассопереноса, учитывающих эффект Соре́ (либо эффект Дюфура). Развит математический аппарат их исследования, на основе которого доказана глобальная разрешимость указанных краевых задач, выведены аппприорные оценки решений и доказана локальная единственность слабого решения. Структура построенных оценок норм основных компонент решения такова, что, в частности, для задачи 1 оценка H^1-нормы температуры не зависит от модуля коэффициента Соре́, тогда как оценки для H^1-норм скорости и концентрации линейно растут с его ростом. Аналогичная ситуация наблюдается и для задачи 2. Отметим, что сценарий, для которого в исходной модели учитываются оба эффекта Соре́ и Дюфура, (с коэффициентами D^θ и D^δ), является существенно более сложным для теоретического анализа. Исследованию этого сценария, так же, как и случаев, когда все входящие в модель коэффициенты переноса зависят от одного или обоих диффузионных параметров, авторы предполагают посвятить отдельную работу.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (проект № 075-00459-25-00). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

Исследование первого автора также выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гебхарт Б. и др.* Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. М: Мир, 1991. Т. 1.
2. *Пригожин И, Кандепуди Д.* Современная термодинамика (От тепловых двигателей до диссипативных структур). Москва: Мир, 2002.
3. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. 1959. Т. 125, № 3. С. 492–495.
4. *Пухначев В.В.* Многомерные точные решения уравнений нелинейной диффузии // Прикл. математика и техн. физика. 1995. Т. 36, № 2. С. 23–31.
5. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338, N 448; http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.016.
6. *Рыжков И.И.* Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии бинарной смеси в случае плоского движения // Прикл. математика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 1. С. 95–108.
7. *Андреев В.К., Рыжков И.И.* Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 4. С. 508–517.
8. *Степанова И.В.* Симметрии в уравнениях тепломассопереноса в вязких жидкостях (обзор) // Вестн. Омск. гос. ун-та. 2019. Т. 24. № 2. С. 51-65.
9. *Stepanova I.V.* Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity // Appl. Math Comput. 2019. V. 343. P. 57–66.
10. *Stepanova I.V.* Symmetry analysis of nonlinear heat and mass transfer equations under Soret effect // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015. V. 20. P. 684–691.
11. *Рыжков И.И.* Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013.
12. *Stepanova I.V.* Group classification for equations of thermodiffusion in binary mixture // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2013. V. 18. P. 1341–1346.
13. *Андреев В.К., Степанова И.В.* Симметрия уравнений термодиффузии при нелинейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 4. С. 47–56.
14. *Lyubimova T., Rushinskaya K., Zubova N.* Onset and nonlinear regimes of convection of a binary mixture in rectangular cavity heated from below // Microgravity Sci. Technol. 2020. V. 32. P. 961–972; https://doi.org/10.1007/s12217-020-09823-x
15. *Любимова Т.П., Рушинская К.С., Зубова Н.А.* Влияние переменного коэффициента термодиффузии на конвекцию бинарной смеси в прямоугольных полостях // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 2. С. 233–244; https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.20
16. Lorca S.A, Boldrini J.L. Stationary solutions for generalized Boussinesq models //J. Diff. Eq. 1996. V. 124. N 389; DOI:10.1006/jdeq.1996.0016
17. *Lorca S.A, Boldrini J.L.* The initial value problem for a generalized Boussinesq model // Nonlinear Anal. 1999. V. 36. N 457; DOI:10.21711/231766361996/rmc115
18. *Гончарова О.Н.* Единственность решения двумерной нестационарной задачи для уравнений конвекции с вязкостью, зависящей от температуры // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 2. С. 234-242; https://www.mathnet.ru/de10552
19. *Antontsev S.N., Diaz J.I., de Oliveira H.B.* Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. 2005. V. 61. P. 1–14.
20. *Antontsev S.N., de Oliveira H.B.* The Oberbeck–Boussinesq problem modified by a thermo-absorption term // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 379. P. 802–817.

21. *Alekseev G.V, Soboleva O.V.* Solvability analysis for the Boussinesq model of heat transfer under the nonlinear Robin boundary condition for the temperature // Phil. Trans. R. Soc. 2024. V. A. Article 382: 20230301; https://doi.org/10.3390/math12030391

22. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.x

23. *Алексеев Г.В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. Москва: Научный мир, 2010.

24. *Kovtunenko V.A., Zubkova A.V.* On generalized Poisson—Nernst—Planck equations with inhomogeneous boundary conditions: a-priori estimates and stability // Math. Methods Appl. Sci. 2017. V. 40. N 6. P. 2284–2299.

25. *Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначёв В.В., Руссо Р.* Задача протекания для уравнений Навье-Стокса // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. Вып. 6. № 420. С. 1065–1122;
DOI: https://doi.org/10.4213/rm9616

26. *Алексеев Г.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 5. С. 971–991.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.958

ANALYSIS OF SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR STATIONARY THERMAL DIFFUSION MODEL

© 2025 **G. V. Alekseev**[1,2a], **V. V. Pukhnachev**[3b], **O. V. Soboleva**[1c]

[1] *Institute of Applied Mathematics, FEB RAS,*
Radio st., 7, Vladivostok 690041, Russia,
[2] *Far Eastern Federal University,*
Campus 10 Ajax Bay, Russky Island, Vladivostok 690922, Russia,
[3] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,*
Acad. Lavrentyev pr., 15, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]alekseev@iam.dvo.ru, [b]pukhnachev@gmail.com, [c]soboleva22@mail.ru

Received 14.10.2025, revised 16.12.2025, accepted 16.12.2025

Abstract. The mathematical apparatus for studying the boundary value problem for a stationary thermal diffusion model taking into account the Soré effect is developed. On the basis of the apparatus, the global solvability of the boundary value problem under study is proved. In the case when the problem data are small, the local uniqueness of the weak solution is proved. Also, we derive a priori estimates of the main components (velocity, temperature and concentration) of the solution of the problem under consideration and discuss the results of a study of the nature of their dependence on all transfer coefficients. A special dependence on the modulus of the Soré coefficient is established.

Keywords: differential equations, heat and mass transfer, thermal diffusion, boundary value problem, variable coefficients, solvability, uniqueness, Soré coefficient.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.401

REFERENCES

1. Gebkhart B., et. al. Svobodnokonvektivnye techeniya, teplo- i massoobmen. [Free-convective flows, heat and mass exchange]. Moscow: Mir, 1991. Vol. 1 (in Russian).
2. Prigozhin I., Kandepudi D. Sovremennaya termodinamika (Ot teplovykh dvigatelei do dissipativnykh struktur) [Modern thermodynamics (From heat engines to dissipative structures)]. Moscow: Mir, 2002 (in Russian).
3. Ovsyannikov L.V. Gruppovye svoistva uravnenii nelineinoi teploprovodnosti [Group properties of nonlinear thermal conductivity equations]. *DAN SSSR*, 1959, Vol. 125, No. 3, pp. 492–495 (in Russian).
4. Pukhnachev V.V. Mnogomernye tochnye resheniya uravnenii nelineinoi diffuzii [Multidimensional exact solutions of nonlinear diffusion equations]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1995, Vol. 36, No. 2, pp. 23–31 (in Russian).
5. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 338, No. 448; http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.016.
6. Ryzhkov I.I. Ob invariantnykh resheniyakh uravnenii termodiffuzii binarnoi smesi v sluchae ploskogo dvizheniya [On invariant solutions of equations of thermal diffusion of binary mixture in case of plane motion]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 2006, Vol. 47, No. 1, pp. 95–108 (in Russian).
7. Andreev V.K., Ryzhkov I.I. Gruppovaya klassifikatsiya i tochnye resheniya uravnenii termodiffuzii. [Symmetry Classification and Exact Solutions of the Thermal Diffusion Equations]. *Differenc. Uravn.* [Diff. Equ.], 2005, Vol. 41, No. 4, pp. 508–517 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2025, Vol. 19, No. 4.

8. Stepanova I.V. Simmetrii v uravneniyakh teplomassoperenosa v vyazkikh zhidkostyakh (obzor) [Symmetries of heat and mass transfer equations in viscous fluids (review)]. *Vestn. Omskogo un-ta* [Herald of Omsk University], 2019, Vol. 24, No. 2, pp. 51-65(in Russian).
9. Stepanova I.V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity. *Appl. Math Comput.*, 2019, Vol. 343, pp. 57–66.
10. Stepanova I.V. Symmetry analysis of nonlinear heat and mass transfer equations under Soret effect // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015. V. 20. P. 684–691.
11. Ryzhkov I.I. Termodiffuziya v smesyakh: uravneniya, simmetrii, resheniya i ikh ustoichivost' [Thermal diffusion in mixtures: equations, symmetries, solutions and their stability]. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2013 (in Russian).
12. Stepanova I.V. Group classification for equations of thermodiffusion in binary mixture. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2013, Vol. 18, pp. 1341–1346.
13. Andreev V.K., Stepanova I.V. Simmetriya uravnenii termodiffuzii pri nelineinoi zavisimosti sily plavuchesti ot temperatury i kontsentratsii [Symmetry of thermal diffusion equations with non-linear dependence of buoyancy force on temperature and concentration]. *Vychisl. Tekhnol.*, 2010, Vol. 15, No. 4, pp. 47–56 (in Russian).
14. Lyubimova T., Rushinskaya K., Zubova N. Onset and nonlinear regimes of convection of a binary mixture in rectangular cavity heated from below. *Microgravity Sci. Technol.*, 2020, Vol. 32, pp. 961–972; https://doi.org/10.1007/s12217-020-09823-x
15. Lyubimova T.P., Rushinskaya K.S., Zubova N.A. Vliyanie peremennogo koeffitsienta termodiffuzii na konvektsiyu binarnoi smesi v pryamougol'nykh polostyakh. [Influence of a variable thermal diffusion coefficient on convection of a binary mixture in rectangular cavities]. *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred*, 2021, Vol. 14, No. 2, pp. 233–244 (in Russian); https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.20
16. Lorca S.A, Boldrini J.L. Stationary solutions for generalized Boussinesq models. *J. Diff. Eq.*, 1996, Vol. 124, No. 389; DOI:10.1006/jdeq.1996.0016
17. Lorca S.A, Boldrini J.L. The initial value problem for a generalized Boussinesq model. *Nonlinear Anal.*, 1999, Vol. 36, No. 457; DOI:10.21711/231766361996/rmc115
18. Goncharova O.N. Edinstvennost' resheniya dvumernoi nestatsionarnoi zadachi dlya uravnenii konvektsii s vyazkost'yu, zavisyashchei ot temperatury [Unique Solvability of a Two-Dimensional Nonstationary Problem for the Convection Equations with Temperature-Dependent Viscosity]. *Differenc. Uravn.* [Diff. Equ.], 2002, Vol. 38, No. 2. pp. 234-242 (in Russian); https://www.mathnet.ru/de10552
19. Antontsev S.N., Diaz J.I., de Oliveira H.B. Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing. *Progress Nonlinear Differ. Equ. Their Appl.*, 2005, Vol. 61, pp. 1–14.
20. Antontsev S.N., de Oliveira H.B. The Oberbeck–Boussinesq problem modified by a thermo-absorption term. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, Vol. 379, pp. 802–817.
21. Alekseev G.V, Soboleva O.V. Solvability analysis for the Boussinesq model of heat transfer under the nonlinear Robin boundary condition for the temperature. *Phil. Trans. R. Soc.*, 2024, V. A. Article 382: 20230301; https://doi.org/10.3390/math12030391
22. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika [Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics]. Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
23. Alekseev G.V. Optimizatsiya v statsionarnykh zadachakh teplomassoperenosa i magnitnoi gidrodinamiki [Optimization in stationary problems of heat and mass transfer and magnetic hydrodynamics]. Moscow: Nauchnyi Mir, 2010 (in Russian).
24. Kovtunenko V.A., Zubkova A.V. On generalized Poisson—Nernst—Planck equations with inhomogeneous boundary conditions: a-priori estimates and stability. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, Vol. 40, No. 6, pp. 2284–2299.
25. Korobkov M.V., Piletskas K., Pukhnachev V.V., Russo R. Zadacha protekaniya dlya uravnenii Nav'e-Stoksa [The flux problem for the Navier—Stokes equations]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 2014, Vol. 69, Iss. 6, No. 420, pp. 1065–1122 (in Russian); DOI: https://doi.org/10.4213/rm9616

26. Alekseev G.V. Razreshimost' obratnykh ekstremal'nykh zadach dlya statsionarnykh uravnenii teplomassoperenosa [Solvability of Inverse Extremal Problems for Stationary Heat and Mass Transfer Equations]. *Sib. mat. zhurn.*, 2001, Vol. 42, No. 5, pp. 971–991 (in Russian).