

УДК 539.376

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2025 И. А. Банщикова^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева 15, г. Новосибирск, 630090, Россия

²Новосибирский государственный технический университет
просп. К.Маркса, 20, г. Новосибирск, 630073, Россия

E-mail: bia@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 11.03.2024 г.; после доработки 25.12.2025 г.;
принята к публикации 25.12.2025 г.

Рассмотрена задача о кручении стержня квадратного сечения, находящегося под действием постоянного момента в условиях ортотропной ползучести. Полагается, что точки на торцах стержня могут свободно смещаться в направлении оси стержня, т.е. отсутствует стеснение. Расчёт выполнен для стержней, изготовленных из трансверсально-изотропной плиты из алюминиевого сплава В95пч (Al-Zn-Mg-Cu). Исследована сходимость решения в зависимости от плотности разбиения сетки в конечно-элементном пакете ANSYS. Для оценки угловой скорости закручивания на установившейся стадии ползучести применён метод, основанный на принципе минимума дополнительного рассеяния. Получено удовлетворительное соответствие с решением, найденным методом конечных элементов. Показано: направление вырезки стержней из трансверсально-изотропной плиты оказывает существенное влияние на величину угла закручивания; депланация поперечного сечения зависит не только от его геометрической формы, но и свойств ортотропии материала.

Ключевые слова: конструкционные сплавы, ортотропия, ползучесть, кручение стержня квадратного сечения, минимум дополнительного рассеяния, депланация.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.402

ВВЕДЕНИЕ

Профили с поперечными сечениями уголкового, таврового, прямоугольного и других типов широко применяются в качестве подкрепляющих элементов обшивки корпусов летательных аппаратов и изделий общего машиностроения. Как следствие возникают задачи по расчёту напряжённо-деформированного состояния таких изделий как в процессе эксплуатации [1–3], так и при их производстве путём придания необходимой формы заготовкам, которые или уже изначально отфрезерованы с рёбрами [4–6] или получены методом наклёпа рёбер жёсткости на гладкие панели [7, 8].

Используемый в практике проектирования подход, в котором тонкая обшивка относится к продольным рёбрам в виде присоединённых полос, применяется к упругой многослойной ортотропной обшивке из композиционных материалов [1], что даёт возможность с использованием гипотез балочной теории, учитывая изгиб, сдвиг и кручение, найти осреднённые напряжения в продольных рёбрах и по контуру панелей обшивки крыла или фюзеляжа. В [2] приводятся результаты расчётов критической нагрузки потери устойчивости в условиях упругости неподкреплённой пластины и подкреплённой тонкостенными стержнями пластины с учётом депланации сечений стержней и без учёта. Показано, что не учёт депланации приводит к завышению критической силы. В [3] рассматривается знакопеременный изгиб балок с учётом накопления

повреждений применительно к задачам сохранения ресурса и материала на стадии производства.

В [4] исследуется задача о кручении в седловидную поверхность оребрённой пластины четырьмя силами, приложенными в углах в условиях ползучести. Показано, что свойство пониженного сопротивления деформациям ползучести в сдвиговом направлении приводит к снижению жёсткости оребрённой пластины. Работы [5, 6] посвящены решению обратных задач формообразования в условиях пластичности и ползучести балок с тавровым сечением и оребрённых панелей из сплава АК4-1 с учётом разных механических свойств материала при растяжении и сжатии. В [7, 8] проводится моделирование процесса высокоресурсного заклёпочного соединения элементов панелей двойной кривизны с рёбрами жёсткости из сплава В95пчТ2, анализируется влияние маршрута клёпки на торцевые перемещения элемента обшивки и отклонение фактических геометрических параметров обшивки от заданных.

При решении технологических задач, возникающих при изготовлении конструкций и их эксплуатации, приходится учитывать ортотропные свойства современных материалов. Ортотропия металлических плит, из которых вырезаются заготовки, может появиться после различных типов обработок, таких как прокатка, дробеструйная обработка поверхностного слоя и других. В подкрепляющих балках и стрингерах под действием постоянной или меняющейся нагрузки могут возникать изгибно-крутильные деформации.

В данной работе решается задача о кручении стержня квадратного сечения из ортотропного материала под действием постоянного момента в условиях ползучести. Один из подходов к решению задач теории ползучести состоит в комбинировании решений, соответствующих аналогичным задачам в упругой и пластической постановках. Общая теория кручения упругих изотропных и анизотропных неоднородных стержней с различными типами поперечных сечений изложена в [9, 10]. В [11] приводятся решения по упругому деформированию многослойных композитных стержней при кручении и растяжении, показано, что из-за свойств анизотропии могут значительно увеличиваться нормальные и касательные напряжения в наружных слоях, что сказывается на долговечности конструкции. В ряде работ авторов [12] изучаются общие соотношения теории кручения стержней из пластического анизотропного материала. В [13] рассмотрено кручение призматических стержней из изотропного упрочняющегося вязкопластического материала, получены аналитические решения для напряжений и деформаций в случае стержней полигонального поперечного сечения.

В условиях ползучести кручение изотропных стержней с нестеснёнными торцами рассматривается в [14, 15], тонкостенных стержней со стеснёнными торцами в [16, 17], кручение стержней кольцевого и сплошного круглого сечений с учётом больших деформаций в [18, 19]. Работа [20] посвящена решению прямых и обратных задач кручения стержней прямоугольного и уголкового сечений с нестеснёнными торцами в условиях изотропной ползучести методами конечных разностей и конечных элементов. В [21] исследовано реологическое поведение стержней при кручении с применением уравнений ползучести по наследственной теории, по технической теории старения и обобщённой нелинейной вязкоупругой модели Фойгта; в [22–24] для ортотропных при ползучести стержней с круглыми сечениями получен ряд аналитических решений и оценок, а также приводятся результаты расчёта методом конечных элементов (МКЭ) в программе ANSYS.

В данной работе при решении задачи о кручении стержня квадратного сечения в условиях ползучести учитывается возникновение депланации сечения (смещение точек поперечного сечения в направлении оси стержня) не только за счёт геометрической формы сечения, но и в результате наличия ортотропных свойств материала. Предполагается, что точки на торцах могут свободно перемещаться в направлении оси стержня. Так как стеснение на торцах отсутствует, то задачу можно сформулировать в двумерной постановке. Для нахождения угловой скорости закручивания на установившейся стадии ползучести используется методика расчёта на основе принципа минимума дополнительного рассеяния (метод 1), позволяющая

получить оценку сверху. Полученное решение сравнивается с расчётом, выполненным МКЭ (метод 2). Оба подхода рассматриваются в геометрически линейной постановке.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Для описания ортотропной ползучести используется модель Соснина, которая обобщает модель Хилла ортотропной пластичности:

$$\eta_{ij} = \partial\Phi/\partial\sigma_{ij}, \quad \Phi = T_s^{n+1}/(n+1), \quad (1)$$

$$T_s(\sigma_{ij}) = [A_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}\sigma_{12}^2 + 2A_{23}\sigma_{23}^2 + 2A_{31}\sigma_{31}^2]^{0.5}. \quad (2)$$

Здесь $\eta_{ij} = d\varepsilon_{ij}^c/dt$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; ε_{ij}^c , σ_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести и тензора напряжений; A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — коэффициенты ортотропии [25], n — показатель ползучести считается одинаковым для растяжения и сжатия и не зависит от направления. В (2) учтено, что $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ и $A_{ij}\sigma_{ij}^2 = A_{ji}\sigma_{ji}^2$ при $i \neq j$.

Из (1), (2) следует

$$\eta_{11} = T_s^{n-1}((A_{22} + A_{33})\sigma_{11} - A_{33}\sigma_{22} - A_{22}\sigma_{33}), \quad \eta_{12} = \eta_{21} = T_s^{n-1}A_{12}\sigma_{12}. \quad (3)$$

Остальные компоненты η_{ij} получаются круговой перестановкой индексов.

Рассматривается трансверсально-изотропная (транстропная) плита. Пусть ось x_3 совпадает с направлением нормали к трансверсально-изотропной плите, а оси x_1 и x_2 с продольным и поперечным направлениями плиты. Предполагается трансверсальная изотропия, при которой свойства в направлении под углом $\pi/4$ к направлению нормали к плите отличаются от свойств в плоскости плиты и по нормали к плите. Для констант B_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), характеризующих процесс одномерной установившейся ползучести в трёх главных направлениях ($\eta_{ii} = B_{ii}\sigma_{ii}^n$) и в трёх направлениях вдоль осей системы координат, которые являются результатом поворота исходной системы координат на угол $\pi/4$ ($\eta_{ij} = B_{ij}\sigma_{ij}^n$, $i \neq j$), выполняются следующие условия

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{12} = B_0, \quad B_{23} = B_{31} = B_\Delta \neq B_0. \quad (4)$$

В этом случае для коэффициентов A_{ij} имеем [25]

$$2A_{12} = 3B_0^{2/(n+1)}, \quad 2A_{31} = 2A_{23} = 4B_\Delta^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}, \quad A_{11} = A_{22} = A_{33} = B_0^{2/(n+1)}/2. \quad (5)$$

Отметим, что для коэффициентов сдвига выполняется

$$A_{31} = A_{23} \neq A_{12}. \quad (6)$$

В частном случае изотропного материала $B_{ij} = B_0$, т.е. если полагать, что свойства плиты по всем направлениям одинаковые и совпадают со свойствами в её плоскости ($B_\Delta = B_0$), то

$$2A_{12} = 2A_{31} = 2A_{23} = 3B_0^{2/(n+1)}, \quad A_{11} = A_{22} = A_{33} = B_0^{2/(n+1)}/2. \quad (7)$$

Исследуем задачу о кручении стержней трёх типов: первый тип — в предположении изотропных свойств материала (7); второй и третий типы — стержни, изготовленные из описываемой параметрами (4) трансверсально-изотропной плиты и ориентированные соответственно в направлении её нормали и в продольном направлении.

2. ОЦЕНКА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ЗАКРУЧИВАНИЯ СВЕРХУ

Рассмотрим решение задачи о кручении на основе принципа минимума дополнительного рассеяния (*метод 1*), позволяющего получить оценку угловой скорости закручивания на установившейся стадии ползучести сверху.

2.1. Кручение стержня, вырезанного вдоль нормали к трансверсально-изотропной плите

При кручении стержня, вырезанного вдоль нормали трансверсально-изотропной плиты (в направлении оси x_3), при отсутствии стеснения на торцах перемещений в направлении оси стержня для напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0$, $\sigma_{23} \neq 0$, $\sigma_{13} \neq 0$ выполняется уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0. \quad (8)$$

Граничные условия на контуре поперечного сечения

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0, \quad (9)$$

где n_1, n_2 компоненты нормали к контуру сечения в плоскости x_1x_2 . Предполагается установившееся состояние ползучести. Скорости деформаций ползучести (3) в направлении сдвига записываются в виде

$$2\eta_{13} = \dot{W}_{,1} - \theta x_2 = 2T_s^{n-1}A_{31}\sigma_{13}, \quad 2\eta_{23} = \dot{W}_{,2} + \theta x_1 = 2T_s^{n-1}A_{23}\sigma_{23}. \quad (10)$$

Здесь $W = W(x_1, x_2)$ — смещение точек поперечного сечения (депланация) в направлении x_3 , точка сверху означает производную по времени; θ — скорость погонного угла закручивания. Так как выполняется (5), (6), то $T_s = \sqrt{2A_{31}\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}}$. В случае изотропного материала (7), так как $B_\Delta = B_0$, константы A_{31}, A_{23} в (10) заменяются на A_{12} , а выражение для T_s переписывается в виде $T_s = \sqrt{2A_{12}\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}}$.

Крутящий момент есть

$$M = \iint_S (\sigma_{23}x_1 - \sigma_{13}x_2) dx_1 dx_2, \quad (11)$$

S — площадь поперечного сечения.

Для решения воспользуемся подходом, предложенным для расчёта изотропного стержня квадратного поперечного сечения путём нахождения минимума дополнительного рассеяния [14]

$$I = \iint_S (T_s^{n+1}/(n+1) - 2\theta F_s) dS. \quad (12)$$

Здесь $F_s = F_s(x_1, x_2)$ — функция напряжений, для которой выполняется

$$\sigma_{13} = \frac{\partial F_s}{\partial x_2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial F_s}{\partial x_1}. \quad (13)$$

В этом случае уравнение равновесия (8) с условиями на контуре сечения (9) тождественно удовлетворяются. Запись решения задачи о кручении изотропного стержня прямоугольного поперечного сечения в условиях установившейся ползучести в виде аналитической зависимости встречает определённые сложности. Поэтому будем искать решение вариационного уравнения $\delta I = 0$ аналогично [14] в виде комбинации функции напряжений соответствующей упругой задаче $F^e(x_1, x_2)$ с функцией напряжений в предельном состоянии ползучести $F^p(x_1, x_2)$:

$$F_s = F^p + K(F^e - F^p), \quad (14)$$

где $K = K(n)$ — искомая константа, зависящая от n . Предельное состояние ползучести ($n \rightarrow \infty$) в задаче о кручении совпадает с идеально пластическим распределением напряжений, при этом функция F^p соответствует поверхности равного ската. На контуре $F^e = 0$ и $F^p = 0$. Поверхность ската $x_3 = F^p(x_1, x_2)$ для квадратного поперечного сечения имеет рёбра и производные $F^p(x_1, x_2)$ имеют разрывы. Константа K находится из условия

$$\frac{\partial I}{\partial K} = 0. \quad (15)$$

Дифференцируя (15) и учитывая, что

$$2 \iint_S F^e dx_1 dx_2 = 2 \iint_S F^p dx_1 dx_2 = M = \text{const},$$

получаем уравнение для нахождения константы K

$$\iint_S T_s^{n-1} \left[\frac{\partial F_s}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F^e}{\partial x_2} - \frac{\partial F^p}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial F_s}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F^e}{\partial x_1} - \frac{\partial F^p}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 dx_2 = 0. \quad (16)$$

Здесь с учётом (4)–(7), (13) в случае изотропного материала (для стержня первого типа) имеем

$$T_s = \sqrt{2A_{12}} \sqrt{\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_1} \right)^2}.$$

Для стержня второго типа, ориентированного в направлении нормали трансверсально-изотропной плиты,

$$T_s = \sqrt{2A_{31}} \sqrt{\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_1} \right)^2}.$$

Из (13), (14) для напряжений следует

$$\sigma_{13} = \sigma_{13}^p + K(\sigma_{13}^e - \sigma_{13}^p), \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^p + K(\sigma_{23}^e - \sigma_{23}^p). \quad (17)$$

Решение задачи о кручении упруго стержня прямоугольного сечения в виде ряда [10] содержит слишком большое число слагаемых, поэтому будем искать решение приближённо в виде [14]

$$F^e(x_1, x_2) = \left(x_1^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) \left(x_2^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) [L_0 + L_1(x_1^2 + x_2^2)] = MF_0^e(x_1, x_2),$$

где

$$L_0 = \frac{5}{2} \frac{259}{277} \frac{G\alpha_0}{a^2} = \frac{5}{2} \frac{259}{277} \frac{M}{0.1404a^6}, \quad L_1 = 15 \frac{35}{277} \frac{G\alpha_0}{a^4} = 15 \frac{35}{277} \frac{M}{0.1404a^8},$$

G — модуль сдвига, a — длина стороны поперечного сечения, α_0 — погонный угол закручивания, соответствующий решению упругой задачи о кручении стержня моментом M . Тогда

$$\sigma_{13}^e = 3Ms_{13}/a^3, \quad \sigma_{23}^e = 3Ms_{23}/a^3, \quad (18)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} s_{13}(x_1, x_2) &= 1.387 \left(\frac{2}{a} x_2 \right) \left[\left(\frac{2}{a} x_1 \right)^2 - 1 \right] \left[1 + \frac{105}{518} \left(\left(\frac{2}{a} x_1 \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{a} x_2 \right)^2 - 1 \right) \right], \\ s_{23}(x_1, x_2) &= 1.387 \left(\frac{2}{a} x_1 \right) \left[\left(\frac{2}{a} x_2 \right)^2 - 1 \right] \left[1 + \frac{105}{518} \left(\left(\frac{2}{a} x_2 \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{a} x_1 \right)^2 - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Идеально пластическое распределение напряжений определяется на основе предельной нагрузки. В области 1 поперечного сечения (см. рис. 1(а)) выполняется

$$\sigma_{13}^p = 0, \quad \sigma_{23}^p = 3M/a^3; \quad (20)$$

в области 2 (см. рис. 1(а))

$$\sigma_{13}^p = -3M/a^3, \quad \sigma_{23}^p = 0. \quad (21)$$

Учитывая (17)–(21), находим для области 1

$$\sigma_{13} = 3MKs_{13}/a^3, \quad \sigma_{23} = 3M(1 + K(s_{23} - 1))/a^3; \quad (22)$$

для области 2

$$\sigma_{13} = 3M(-1 + K(s_{13} + 1))/a^3, \quad \sigma_{23} = 3Ms_{23}/a^3. \quad (23)$$

Интеграл (16) разбивается на две подобласти интегрирования. В рассматриваемом случае решение не зависит от параметров A_{31}, A_{23}, A_{12} и значение K для стержня в предположении изотропных свойств материала совпадает со значением для стержня ориентированного в направлении нормали трансверсально-изотропной плиты. Уравнение (16) для нахождения K преобразуется к виду

$$I_1 + I_2 = 0, \quad (24)$$

где

$$I_1 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \int_0^{a/2} \int_0^{x_1} \left[K^2 s_{13}^2 + (K(s_{23} - 1) + 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left[(K(s_{23} - 1) + 1)(s_{23} - 1) + Ks_{13}^2 \right] dx_2 dx_1,$$

$$I_2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \int_0^{a/2} \int_{x_1}^{a/2} \left[K^2 s_{23}^2 + (K(s_{13} + 1) - 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left[(K(s_{13} + 1) - 1)(s_{13} + 1) + Ks_{23}^2 \right] dx_2 dx_1.$$

2.2. Кручение стержня, вырезанного в продольном направлении трансверсально-изотропной плиты

Для стержня третьего типа, ось которого совпадает с направлением оси x_1 , можно записать уравнения аналогичные (8) – (23), используя круговую перестановку индексов. Для напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0, \sigma_{21} \neq 0, \sigma_{31} \neq 0$ выполняется уравнение равновесия

$$\partial\sigma_{21}/\partial x_2 + \partial\sigma_{31}/\partial x_3 = 0. \quad (25)$$

Граничные условия на контуре поперечного сечения в плоскости x_2x_3

$$\sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 = 0, \quad (26)$$

где n_2, n_3 — компоненты нормали к контуру сечения в плоскости x_2x_3 . Скорости деформаций ползучести (1) записываются в виде

$$2\eta_{31} = \dot{W}_{,3} + \theta x_2 = 2T_s^{n-1} A_{31} \sigma_{31}, \quad 2\eta_{21} = \dot{W}_{,2} - \theta x_3 = 2T_s^{n-1} A_{12} \sigma_{21}.$$

Здесь $W = W(x_2, x_3)$ — смещение точек поперечного сечения (депланация) в направлении x_1 ; $T_s = \sqrt{2A_{31}\sigma_{31}^2 + 2A_{12}\sigma_{21}^2}$, при этом $A_{31} \neq A_{12}$. Крутящий момент есть

$$M = \int \int_S (\sigma_{31} x_2 - \sigma_{21} x_3) dx_2 dx_3. \quad (27)$$

Для функции напряжений $F_s = F_s(x_2, x_3)$ выполняется $\sigma_{21} = \frac{\partial F_s}{\partial x_3}$, $\sigma_{31} = -\frac{\partial F_s}{\partial x_2}$, при этом тождественно удовлетворяются уравнение равновесия (25) и условия на контуре сечения (26). При решении аналогичной задачи о кручении ортотропного стержня круглого и кольцевого сечений полагалось, что функция F_s имеет вид, который с точностью до множителя является решением задачи о кручении изотропного стержня в условиях установившейся ползучести [23, 24]. Так как аналитическое решение задачи о кручении изотропного стержня прямоугольного поперечного сечения в условиях установившейся ползучести отсутствует, то будем искать его в виде (14). Повторив преобразования, вместо интеграла (16) получим

$$\int \int_S T_s^{n-1} \left[2A_{12} \frac{\partial F_s}{\partial x_3} \left(\frac{\partial F^e}{\partial x_3} - \frac{\partial F^p}{\partial x_3} \right) + 2A_{31} \frac{\partial F_s}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F^e}{\partial x_2} - \frac{\partial F^p}{\partial x_2} \right) \right] dx_2 dx_3 = 0, \quad (28)$$

где

$$T_s = \sqrt{2A_{12} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_3} \right)^2 + 2A_{31} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_2} \right)^2}.$$

Далее уравнение (28) для определения значения K преобразуется к виду (24), где

$$I_1 = \left(\frac{2}{a} \right)^2 \int_0^{a/2} \int_0^{x_2} \left[2A_{12} K^2 s_{21}^2 + 2A_{31} (K(s_{31} - 1) + 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \times \left[2A_{31} (K(s_{31} - 1) + 1)(s_{31} - 1) + 2A_{12} K s_{21}^2 \right] dx_3 dx_2,$$

$$I_2 = \left(\frac{2}{a} \right)^2 \int_0^{a/2a/2} \int_{x_2}^{a/2} \left[2A_{31} K^2 s_{31}^2 + 2A_{12} (K(s_{21} + 1) - 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \times \left[2A_{12} (K(s_{21} + 1) - 1)(s_{21} + 1) + 2A_{31} K s_{31}^2 \right] dx_3 dx_2.$$

Здесь $s_{21} = s_{21}(x_2, x_3)$, $s_{31} = s_{31}(x_2, x_3)$ получены из (19) циклической перестановкой индексов.

2.3. Обобщение на случай всех трёх типов стержней

Для всех трёх типов стержней выражения для I_1, I_2 , входящие в (24), можно представить в обобщённом виде, перейдя в локальную систему координат xyz , ось z которой направлена вдоль оси стержня:

$$I_1 = \left(\frac{2}{a} \right)^2 \int_0^{a/2} \int_0^x \left[2C_1 K^2 s_x^2 + 2C_2 (K(s_y - 1) + 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \times \left[2C_2 (K(s_y - 1) + 1)(s_y - 1) + 2C_1 K s_x^2 \right] dy dx,$$

$$I_2 = \left(\frac{2}{a} \right)^2 \int_0^{a/2a/2} \int_x^{a/2} \left[2C_2 K^2 s_y^2 + 2C_1 (K(s_x + 1) - 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \times \left[2C_1 (K(s_x + 1) - 1)(s_x + 1) + 2C_2 K s_y^2 \right] dy dx, \quad (29)$$

где выражения для s_x, s_y совпадают с выражениями (19) с заменой x_1 на x и x_2 на y . Для констант в (29) в случае изотропного стержня выполняется $C_1 = C_2 = A_{12} = 3B_0^{2/(n+1)}/2$, для стержня второго типа $C_1 = C_2 = A_{31} = 2B_{\Delta}^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}/2$ и для стержня третьего типа

$$C_1 = A_{12} = 3B_0^{2/(n+1)}/2, \quad C_2 = A_{31} = 2B_{\Delta}^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}/2.$$

Для нахождения угловой скорости закручивания θ будем искать в (12) функцию напряжений $F_s = F_s(x, y)$ с учётом вычисленного K в виде $F_s = \theta^{1/n} C (F^p + K(F^e - F^p))/M = \theta^{1/n} C F_0$, где $F_0 = F_0^p + K(F_0^e - F_0^p)$ [24]. Константа C подлежит определению. Из (12) следует

$$\delta I = \delta \iint_S \left[\frac{1}{n+1} \left(2C_1 \sigma_{xz}^2 + 2C_2 \sigma_{yz}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} - 2\theta F_s \right] dydx = 0. \quad (30)$$

Учитывая, что $\sigma_{xz} = \frac{\partial F_s}{\partial y}$, $\sigma_{yz} = -\frac{\partial F_s}{\partial x}$, (30) преобразуется к виду

$$\delta \left[C^{n+1} \frac{1}{n+1} \iint_S \left[2C_1 \left(\frac{\partial F_0}{\partial y} \right)^2 + 2C_2 \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} dydx - C \iint_S 2F_0 dydx \right] = 0. \quad (31)$$

Варьируя (31) по C и принимая во внимание, что $\iint_S 2F_0 dydx = 1$, получаем

$$C = \left(\frac{1}{\Phi} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \Phi = \iint_S \left[2C_1 \left(\frac{\partial F_0}{\partial y} \right)^2 + 2C_2 \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} dydx. \quad (32)$$

Подынтегральное выражение в (32) в силу симметрии необходимо вычислять в двух областях 1 и 2 (см. рис. 1(а)).

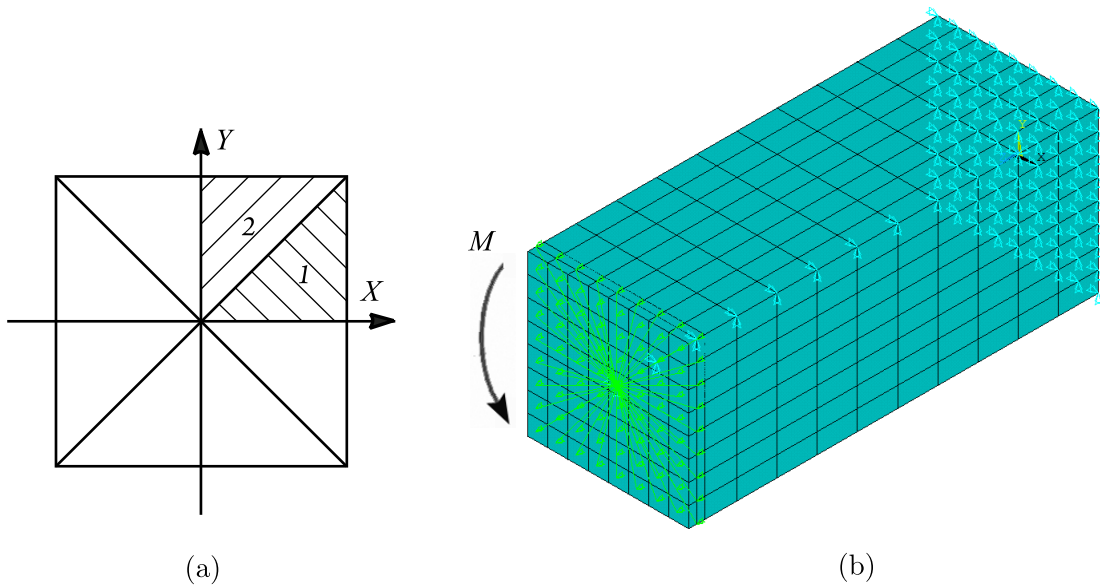


Рис. 1. Поперечное сечение стержня (а); разбиение конечными элементами Solid45 с оболочечными элементами Shell181 на торце $z = L$ и схема закреплений (б)

После преобразований имеем $\Phi = 4(\Phi_1 + \Phi_2)$, где

$$\Phi_1 = \left(\frac{3}{a^3}\right)^{n+1} \int_0^{a/2} \int_0^x \left[2C_1 K^2 s_x^2 + 2C_2 (K(s_y - 1) + 1)^2\right]^{\frac{n+1}{2}} dy dx,$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{3}{a^3}\right)^{n+1} \int_0^{a/2} \int_x^{a/2} \left[2C_2 K^2 s_y^2 + 2C_1 (K(s_x + 1) - 1)^2\right]^{\frac{n+1}{2}} dy dx.$$

Моменты (11) и (27), выраженные через функцию напряжений в системе координат xyz , перепишутся в виде $M = 2 \iint_S F_s dx dy = 2\theta^{1/n} C \iint_S F_0 dx dy$. Откуда $\theta = (M/C)^n$, учитывая (32), приходим к выражению для угловой скорости закручивания

$$\theta = \Phi M^n. \quad (33)$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для решения задачи МКЭ (метод 2) тестировались твёрдотельные 3-D элементы Solid45, а также балочные элементы Beam189 программы ANSYS. При использовании твёрдотельных элементов на одном из торцов для возможности приложения скручивающего момента применялись элементы Shell181. Численная верификация восьмиузловых объёмных конечных элементов Solid45 и оболочечных элементов Shell181 при расчёте скручиваемых круглых стержней в условиях изотропной и ортотропной ползучести выполнена в [23, 24]. Для аппроксимации перемещений внутри элемента Solid45 помимо функций форм соответствующих узлам элемента используются дополнительные функции формы квадратичного вида, что даёт возможность получать сходящиеся решения без сильного измельчения конечно-элементных сеток. Для всех узлов торца, на котором создаются оболочечные элементы задаётся закрепление в виде одинакового угла поворота вокруг оси стержня для избегания возникновения краевых эффектов от приложения сосредоточенной нагрузки. На обоих торцах точки могут свободно перемещаться вдоль оси стержня, т. е. стеснение отсутствует. Перемещения точек оси стержня в направлении осей x и y равны нулю. Какие-либо условия контакта между элементами Solid45 и Shell181 отсутствуют. На рис. 1(b) приведена твёрдотельная конечно-элементная сетка с разбиением поперечного сечения 8×8 элементов и 10 элементов Solid45 вдоль оси стержня, толщина оболочечного элемента Shell181 составляет $h = 0.002$ м. При расчёте МКЭ при $t = 0$ стержень деформируется упруго, затем развиваются необратимые деформации ползучести. В процессе деформирования напряжённое состояние меняется от начального упругого до состояния близкого к состоянию установившейся ползучести, так как $M(t) = \text{const}$.

Результаты расчёта кручения стержня с круглым поперечным сечением в условиях ортотропной ползучести с использованием балочных элементов Beam189 приведены в [4, 23]. Показано, что при включённой опции седьмой степени свободы, учитывающей искривление из плоскости поперечного сечения, депланация, возникающая за счёт ортотропных свойств материала, балочным элементом Beam189 не учитывается. Это приводит к существенному занижению угла закручивания, по сравнению с углом закручивания, который вычислен на основе твёрдотельной сетки.

Для активации модели ортотропной ползучести используются команды TB, Creep и TB, Hill. Коэффициенты ортотропии $R_{xx}, R_{yy}, R_{zz}, R_{xy}, R_{yz}, R_{xz}$ задаются командой TB, DATA. Формулы, связывающие эти коэффициенты с коэффициентами определяемыми по формулам (4), (5) в случае трансверсальной изотропии, приведены в [24].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Расчёт выполнен для сплава В95пч (Al-Zn-Mg-Cu) с учётом свойств на растяжение. Константы для этого сплава $A_{12} = 3B_0^{2/(n+1)}/2$, $A_{31} = 2B_\Delta^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}/2$ при $T = 180^\circ \text{C}$ определены из испытаний образцов, вырезанных из плиты толщиной 50 мм [24, 26]: $B_0 = 6.3 \cdot 10^{-31} (\text{МПа})^{-n}/\text{с}$, $B_\Delta = 3.9 \cdot 10^{-30} (\text{МПа})^{-n}/\text{с}$, $n = 10$. Модуль Юнга $E = 55 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$. Длина стороны квадратного сечения $a = 0.02 \text{ м}$, длина стержня $L = 0.05 \text{ м}$, время деформирования $t_* = 7200 \text{ с}$, крутящий момент $M = 420 \text{ Н}\cdot\text{м}$. В [26] приводятся результаты испытаний на растяжение в диапазоне напряжений от 220 МПа до 310 МПа, поэтому крутящий момент подобран так, чтобы значения интенсивности напряжений на грани, где они максимальные на стадии установившейся ползучести, укладывались в этот диапазон или меньше отклонялись от него.

Линии 1–5 на рис. 2 (а, б) — зависимости погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$ и интенсивности напряжений от времени $\sigma_i(t)$ в узле A с координатами $x = z = 0.01 \text{ м}$, $y = 0$ для стержня из изотропного материала для следующих пяти различных плотностей разбиения N ($N_1 \times N_1 \times N_2$): 1 – $4 \times 4 \times 10$; 2 – $8 \times 8 \times 10$; 3 – $8 \times 8 \times 20$; 4 – $16 \times 16 \times 20$; 5 – $32 \times 32 \times 20$ ($N_1 \times N_1$ число элементов типа Solid45 в поперечном сечении и N_2 вдоль длины стержня), толщина оболочки Shell181 – 0.005 м .

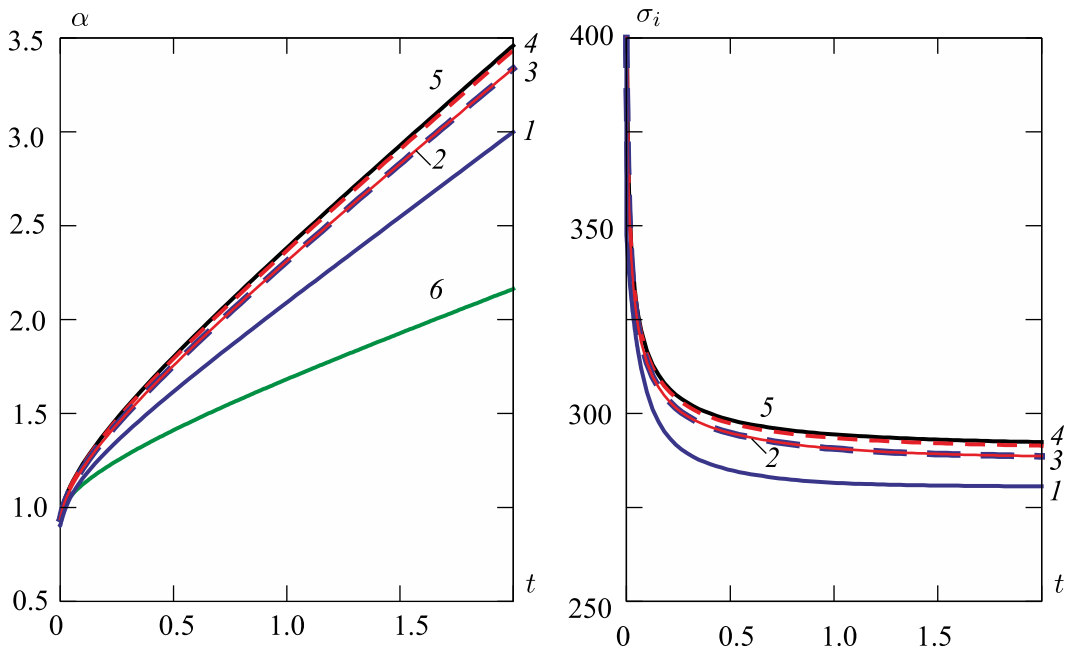


Рис. 2. Зависимость погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$ (а) и интенсивность напряжений от времени $\sigma_i(t)$ в узле с координатами $x = z = 0.01 \text{ м}$, $y = 0$ (б) для стержня из изотропного материала.

Линии 1–5 — расчёт с применением элементов Solid45 с плотностью сетки $4 \times 4 \times 10$, $8 \times 8 \times 10$, $8 \times 8 \times 20$, $16 \times 16 \times 20$, $32 \times 32 \times 20$ соответственно; линия 6 расчёт с использованием элементов Beam189

Интенсивность напряжений σ_i через компоненты девиатора напряжений $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$, где $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$, выражается по формуле $\sigma_i = (3\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ji}/2)^{0.5}$. Из диаграмм на рисунках следует, что увеличение плотности разбиения в плоскости поперечного сечения существенно влияет на сходимость решения, при этом для четвёртого и пятого типов разбиения решения практически совпадают. Совпадение кривых 2 и 3 на рис. 2 (а, б) показывает, что увеличение числа элементов вдоль оси стержня слабо влияет на результаты расчёта, т. е. для моделирования можно использовать элемент, длина которого существенно превосходит два других размера. На рис.

3 (a, b) для стержня из изотропного материала показаны перемещения Uz (изолинии деформации) при $t = t_*$ для плотности разбиения второго типа с толщиной оболочечного элемента Shell181 на торце $z = L$ равной $h = 0.005$ м и 0.002 м соответственно.

В таблице для трёх типов стержней приведены результаты решения разными методами, в том числе и МКЭ с различной плотностью разбиения: значения погонного угла закручивания в начальный момент времени $\alpha_0 = \alpha(0)$ и на момент окончания процесса деформирования $\alpha_* = \alpha(t_*)$, а также скорость погонного угла закручивания θ , вычисленная на установившейся стадии при $0.75 \cdot t_* \leq t \leq t_*$. Для исключения влияния краевого эффекта, возникающего от оболочечных элементов на торце $z = L$ (рис. 3), угол закручивания $\alpha(t) = 2Uy(t)/(az)$ определялся по перемещениям $Uy(t)$ в узле A с координатами $x = z = 0.01$ м, $y = 0$, расположенном вблизи торца $z = 0$, где оболочечные элементы отсутствуют. Различие угловой скорости закручивания (см. таблицу), вычисленной по перемещению в узле A для КЭ-моделей, изображённых на рис. 3, составляет 0.2 %.

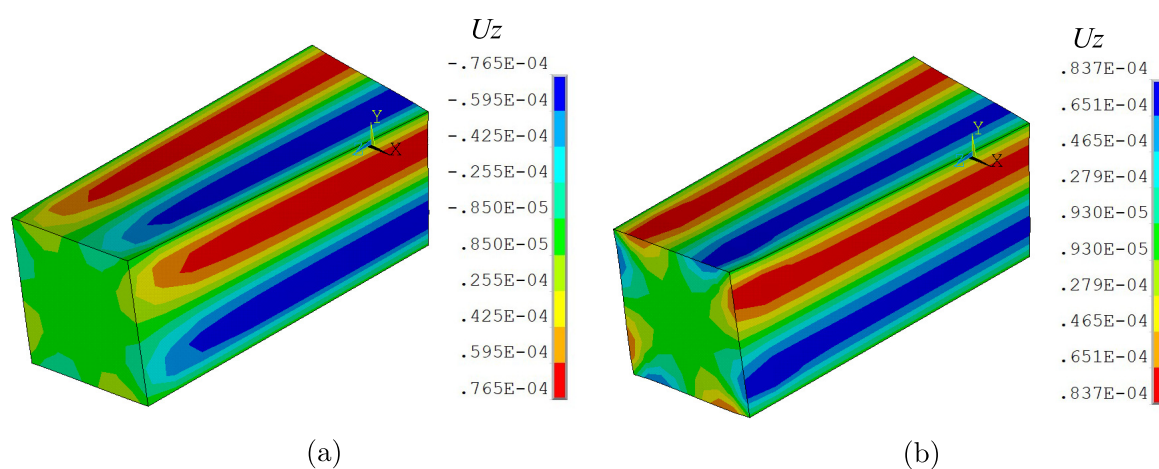


Рис. 3. Изолинии перемещений Uz для стержня из изотропного материала при $t = t_*$ с плотностью разбиения элементами Solid45 $8 \times 8 \times 10$ и толщиной элемента Shell181 на торце $z = L$ равной $h = 0.005$ м (a), 0.002 м (b)

Проведено исследование влияния шага по времени на результаты расчётов, выполненных МКЭ. На рис. 2 (b) видно, что в узле A в начале процесса деформирования происходит резкое уменьшение интенсивности напряжений, а затем интенсивность напряжений становится близкой к некоторому постоянному установившемуся значению. Поэтому в начале расчёта ($0 \leq t \leq 200$ с) автоматический шаг по времени Δt был выбран в диапазоне $0.1 \div 1.0$ с, а затем он был увеличен до 5 с. Для сравнения в таблице для стержня третьего типа с плотностью разбиения $16 \times 16 \times 20$ приведены результаты расчёта с максимальным шагом по времени $\Delta t = 1$ с и 5 с при $t > 200$ с. Различие угловой скорости закручивания, вычисленной по перемещению Uy в узле A , составляет 0,1 %. Расчёты при измельчении сетки и уменьшении шага по времени требуют значительных временных затрат, поэтому с целью уменьшения общего времени численного расчёта величина максимального шага по времени при $t > 200$ с была принята равной 5 с. Из таблицы следует, что для разбиений $16 \times 16 \times 20$ и $32 \times 32 \times 20$ для всех трёх типов стержней различие углов закручивания не превосходит 1%.

В таблице и на рис. 2 (a) (линия б) представлены также результаты решения задачи о кручении стержня в ANSYS с помощью элементов Beam189 с включённой опцией седьмой степени свободы, учитывающей деформацию поперечного сечения. Необходимо отметить, что начальный упругий угол закручивания $\alpha_0 = \alpha(0)$ вычисляется достаточно точно. Угол $\alpha_0 = M/(0.1406G\pi a^4)$, являющийся приближённым решением упругой задачи о кручении [14], составил 0.95 рад. Таким образом, деформация сечения, возникающая при $t = 0$ из-за того,

Таблица

Результаты решения задачи о кручении для трёх типов стержней разными методами

метод решения (тип элемента)	N	Δt (с)	$h \cdot 10^3$ (м)	α_0 (рад/м)	α_* (рад/м)	$\theta \cdot 10^4$ (рад/(мс))
стержень первого типа (изотропный)						
МКЭ (solid45)	1	5	5	0.903	2.999	2.512
МКЭ (solid45)	2	5	5	0.938	3.337	2.820
МКЭ (solid45)	3	5	5	0.938	3.337	2.819
МКЭ (solid45)	4	5	5	0.947	3.434	2.926
МКЭ (solid45)	5	5	5	0.950	3.459	2.955
МКЭ (solid45)	2	5	2	0.938	3.339	2.825
МКЭ (beam189)	–	5	–	0.950	2.164	1.312
Метод 1	–	–	–	0.950	3.172	3.086
стержень второго типа (ориентация по нормали трансформной плиты)						
МКЭ (solid45)	4	5	5	0.947	21.973	28.463
МКЭ (solid45)	5	5	5	0.950	22.140	28.675
Метод 1	–	–	–	0.950	23.500	31.322
стержень третьего типа (продольное направление трансформной плиты)						
МКЭ (solid45)	4	5	5	0.947	8.928	10.315
МКЭ (solid45)	4	1	5	0.947	8.928	10.315
МКЭ (solid45)	5	5	5	0.950	8.997	10.401
Метод 1	–	–	–	0.950	13.320	17.192

что поперечное сечение стержня имеет квадратную форму, учитывается. Однако при деформировании в условиях ползучести, как и в случае стержня с круглым поперечным сечением [23], учёт деформации выполняется некорректно, так как при $t > 0$ угол закручивания намного меньше угла, вычисленного с использованием твёрдотельных элементов и оценки, основанной на принципе минимума дополнительного рассеяния.

Таблица и рис. 4 включают результаты решения задачи о кручении разными методами. На рис. 4, *a* изображена зависимость погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$ для стержней первого, второго и третьего типа соответственно: сплошные линии 1, 2, 3 — расчёт МКЭ с разбиением $32 \times 32 \times 20$; штриховые линии 4, 5, 6 — зависимость $\alpha(t) = \alpha_0 + \theta t$, найденная на основе принципа минимума дополнительного рассеяния с учётом (33).

Из условия (24) при $n = 10$ получено $K = 0.1586$ для стержней первого и второго типа и $K = 0.1567$ для стержня третьего типа. На рис. 4 (b) линии 1, 2 — интенсивность напряжений от времени для стержней первого и второго типа в узле *A*. Линии 3, 4 на рис. 4 (b) — кривые $\sigma_i(t)$ для стержня третьего типа соответственно в узле *A* и в узле *B* с координатами $y = z = 0.01$ м, $x = 0$. Анализируя $\sigma_i(t)$ при $0 \leq t \leq t_*$ можно отметить, что для стержня второго типа состояние, близкое к состоянию установившейся ползучести, наступает быстрее, чем для стержней первого и третьего типа, а для стержня третьего типа быстрее, чем для стержня первого типа. Аналогичный вывод следует из анализа угловой скорости закручивания на участках $0.75 \cdot t_* \leq t \leq t_*$ и $0.973 \cdot t_* \leq t \leq t_*$. Для разбиения $32 \times 32 \times 20$ элементами Solid45 при толщине оболочечного элемента Shell181 $h = 0.005$ м угловая скорость закручивания θ для стержней первого, второго и третьего типов составила на участке $0.75 \cdot t_* \leq t \leq t_*$ соответственно $2.955 \cdot 10^{-4}$, $2.868 \cdot 10^{-3}$ и $1.04 \cdot 10^{-3}$ рад/(мс), а на участке $0.973 \cdot t_* \leq t \leq t_*$ —

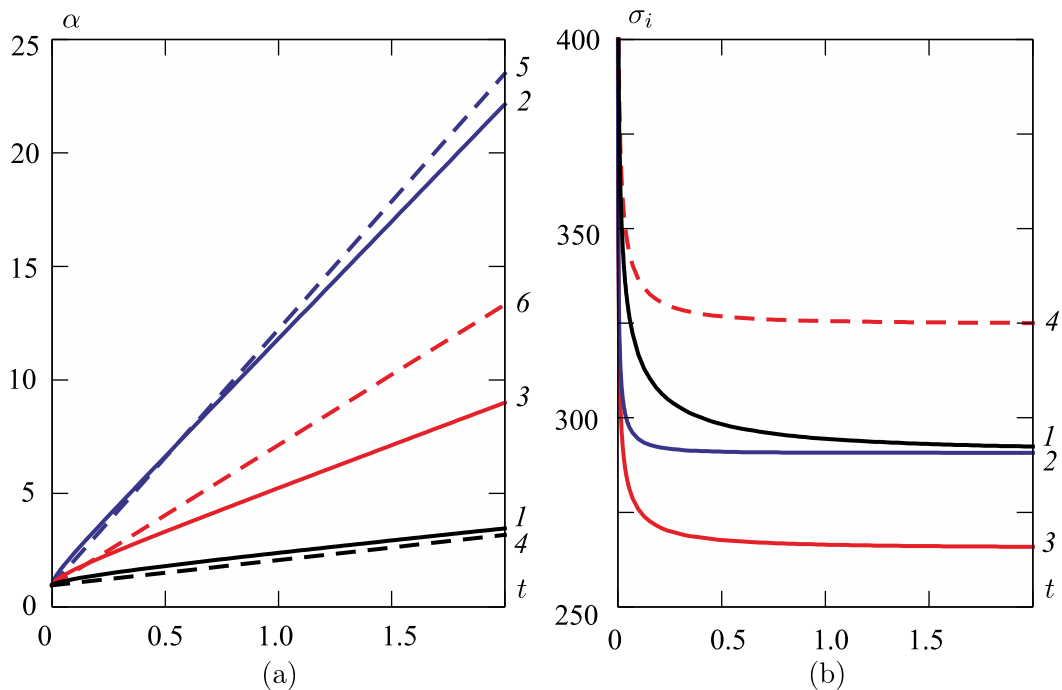


Рис. 4. Зависимость погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$: сплошные линии 1-3 — расчёт МКЭ с плотностью разбиения $32 \times 32 \times 20$; штриховые линии 4 - 6 — зависимость $\alpha(t) = \alpha_0 + \theta t$ (а). Интенсивность напряжений от времени $\sigma_i(t)$: линии 1 - 3 расчёт в узле А с координатами $x = z = 0.01$ м, $y = 0$; линия 4 расчёт в узле В с координатами $y = z = 0.01$ м, $x = 0$ (б). Стержень первого типа - линии 1, 4 (а), линия 1 (б); стержень второго типа - линии 2, 5 (а), линия 2 (б); стержень третьего типа - линии 3, 6 (а), линии 3, 4 (б)

$2.936 \cdot 10^{-4}$, $2.867 \cdot 10^{-3}$ и $1.038 \cdot 10^{-3}$ рад/(м с). Различие составляет 0.647, 0.035, 0.193%.

На рис. 5 изображены изолинии перемещения Uz при $t = t_*$ в сечении $z = 0.01$ м для стержней, вырезанных в направлении нормали (а) и в продольном направлении (б) трансверсально-изотропной плиты. Для этих же стержней на рис. 5 (с, d) представлены изолинии интенсивности напряжений σ_i . Для изотропного стержня и стержня, вырезанного в направлении нормали трансверсально-изотропной плиты, общий вид распределения изолиний перемещения Uz и интенсивности напряжений σ_i совпадает, различие наблюдается в значениях, причём для напряжений это различие незначительно (в узле А его можно оценить по линиям 1, 2 на рис. 4 (б) при $t = t_*$).

Сравнивая результаты расчётов угла закручивания, можно отметить, что для стержней первого и второго типа значения, полученные двумя способами близки. В методе 1 искомая функция (14) является статически допустимой, поэтому решение для угловой скорости закручивания (33) является верхней оценкой истинной угловой скорости закручивания, что подтверждается результатами, приведёнными в таблице. Необходимо отметить, что на рис. 4 (а) штриховые линии, полученные методом 1, для стержней первого и второго типа полностью или частично располагаются ниже сплошных линий, вычисленных методом 2. Это связано с тем, что при решении МКЭ в стержне напряжённо-деформированное состояние меняется от упругого до состояния установившейся ползучести, а при построении линий $\alpha(t) = \alpha_0 + \theta t$ стадия перераспределения от одного состояния до другого не учитывается. Тем не менее, для всех типов стержней на установившейся стадии угловая скорость закручивания, вычисленная МКЭ меньше, полученной методом, основанным на принципе минимума дополнительного рассеяния. Для стержня третьего типа штриховая линия, полученная методом 1, располагается значительно выше сплошной линии, вычисленной методом 2. Это можно объяснить тем, что

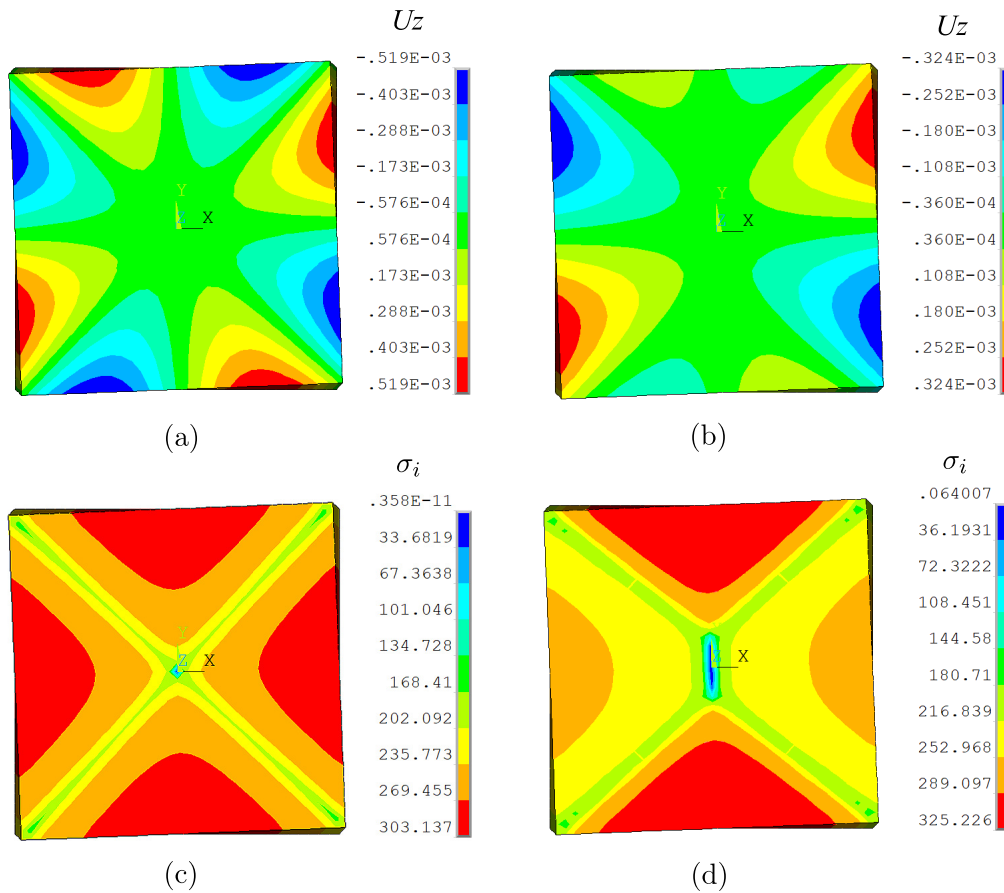


Рис. 5. Изолинии перемещений Uz (a, b) и интенсивность напряжений σ_i (c, d) при $t = t_*$ в сечении $z = 0.01$ м. Стержень, вырезанный в направлении нормали (a, c) и в продольном направлении (b, d) трансверсально-изотропной плиты

функция (14) принята в виде, обеспечивающем симметрию изолиний интенсивности напряжений не только относительно осей x, y , но и относительно диагоналей поперечного сечения, а результаты вычислений для стержня третьего типа на рис. 4 (b) и 5 (d) свидетельствуют, что такая симметрия отсутствует. Вместе с тем метод 1 позволяет получить оценку угловой скорости закручивания сверху для всех типов стержней.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен расчёт напряжённо-деформированного состояния скручиваемого стержня квадратного сечения под действием постоянного момента в условиях ортотропной ползучести. Для решения задачи использовались два способа: метод конечных элементов пакета ANSYS и метод, основанный на принципе минимума дополнительного рассеяния. Протестированы твёрдотельные элементы Solid45 и балочные элементы Beam189. Исследована сходимость решения в зависимости от плотности разбиения сетки. При моделировании полагается, что точки торцов стержня могут свободно смещаться в направлении оси стержня. Вычисления выполнены для алюминиевого сплава В95пч (Al-Zn-Mg-Cu), обладающего свойствами слабого сопротивления деформациям ползучести под углом $\pi/4$ к нормали к плите при температуре 180°C , по сравнению со свойствами сплава в плоскости плиты. Получено, что при моделировании стержня балочными элементами депланация поперечного сечения учитывается корректно только на стадии упругости. Показано:

— на депланацию поперечного сечения влияет не только его геометрическая форма, но и свойства ортотропии материала;

— величина угла закручивания существенно зависит от направления вырезки образцов из трансверсально-изотропной плиты и может отличаться на порядок;

— решение, полученное методом конечных элементов, удовлетворительно согласуется с верхней оценкой угловой скорости закручивания, найденной на основе принципа минимума дополнительного рассеяния.

Результаты проведённых исследований необходимо принимать во внимание при выборе нагрузки в задачах формования элементов конструкций.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (проект FWGG-2021-0013). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шатаев В.Г., Шатаев П.А. К расчёту тонкостенных подкреплённых стержней из композиционных материалов по балочной теории // Изв. вузов. Авиационная техника. 2011. № 1. С. 37–40.
2. Чернов С.А. Моделирование устойчивости подкреплённой тонкостенными стержнями пластины // Программные продукты и системы. 2014. Т. 108, № 4. С. 183–187; DOI: 10.15827/0236-235X.108.183-187
3. Иявойнен С. В., Ларичкин А. Ю., Колодезев В. Е. Численное и экспериментальное исследование чистого изгиба балок из титанового сплава АБВТ-20 в условиях ползучести с учётом различных свойств на растяжение и сжатие // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 430–446; DOI: 10.14498/vsgtu1614
4. Банщикова И.А., Цвелодуб И.Ю., Петров Д.М. Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 157, № 3. С. 34–41.
5. Бойко С. В., Ларичкин А. Ю. Обратная задача чистого изгиба балки в условиях ползучести // Сибирский журнал промышленной математики. 2023. Т. 26, № 2 (94). С. 37–52; DOI: 10.1134/s1990478923020047
6. Бойко С.В., Ларичкин А.Ю. Обратная задача формообразования оребрённой панели // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 3 (379). С. 216–226; DOI: 10.15372/PMTF202215214
7. Бормотин К.С., Олейников А.И., Овчаров И.О. Моделирование клёпочной сборки обшивок крыла с упреждением рёбер жёсткости // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16, № 3. С. 376–386.
8. Олейников А.И., Бормотин К.С. Моделирование процесса клёпки панели // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, № 1. С. 102–106.
9. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физ.-Мат. лит., 1959.
10. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука. 1971.
11. Nurimbetov A. Naturally twisted layered anisotropic rod made of reinforced materials research/A. Nurimbetov, A. Bekbayev, S. Oiyunbayev, M. Dzhamanbayev, M. Keikimanova // Appl. Mech. Materials. 2015. V. 736. P. 30–38; DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.736.30
12. Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б. К вопросу кручения анизотропных стержней, находящихся под действием внешнего давления // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2023. № 2. С. 160–165; DOI: 10.3103/S0025654422600878

13. Спорыхин А.Н., Чупис С.Г., Щеглова Ю.Д. О кручении призматических стержней из упрочняющегося вязкопластического материала // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2006. № 2. С. 235–240.
14. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз. 1960.
15. Манукян М.М. Кручение тел с учётом ползучести. Ереван: Изд-во Ереванского университета, 1972.
16. Наместников В.С. Стеснённое кручение при ползучести тонкостенного стержня замкнутого профиля // Науч. тр. Всесоюз. заоч. машиностроит. ин-т. 1975. Т. 25. С. 109–114.
17. Mordfin L. Torsion creep of circular and noncircular tubes // Journal of research of the national Bureau of standards. C. Engineering and Instrumentation. 1967. V. 71, N 3. P. 209–225.
18. Shutov A.V., Larichkin A.Yu., Shutov V.A. Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // ZAMM. (Z. Angew. Math. Mech.) 2017. P. 1–17; DOI: 10.1002/zamm.201600286
19. Горев Б.В., Клопотов И.Д. Методика построения кривых деформирования на кручение при больших деформациях // Заводская лаборатория. 1995. № 12. С. 50–53.
20. Банщикова И.А. Кручение стержней в кинематических режимах ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63. № 5. С. 185–196; DOI: 10.15372/PMTF20220519
21. Кравчук А.С., Кравчук А.И., Тарасюк И.А. Реология круглого структурно-неоднородного композиционного стержня при кручении и крутильных колебаниях // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81, № 11. С. 53–61.
22. Bhatnagar N.S., Gupta S.K., Gupta R.P. The torsion of an orthotropic rod in the theory of creep // Wood Science and Technology. 1969. V. 3, Iss. 2. P. 167–174.
23. Banshchikova I.A. Evaluation of the stress-strain state of rod at torsion from an anisotropic material in the shear direction at creep // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 894; Article number 012006; DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012006
24. Банщикова И.А. Исследование с использованием метода характеристических параметров ползучести ортотропного стержня при кручении // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 1. С. 169–184; DOI: 10.15372/PMTF202215115
25. Соснин О.В. Об анизотропной ползучести материалов // Прикладная механика и техническая физика. 1965. № 6. С. 99–104.
26. Горев Б.В., Масанов И.Ж. Особенности деформирования листовых конструкционных алюминиевых сплавов и плит в режимах ползучести // Технология машиностроения. 2009. № 7. С. 13–20.

UDC 539.376

TORSION OF SQUARE ROD UNDER ORTHOTROPIC CREEP

© 2025 I. A. Banshchikova^{1,2}

¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Akad. Lavrentyev prosp., 15, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Novosibirsk State Technical University
K. Marks prosp., 20, Novosibirsk 630073, Russia*

E-mail: bia@hydro.nsc.ru

Received 11.03.2024, revised 25.12.2025, accepted 25.12.2025

Abstract. The problem of a square rod torsion loaded by moment under conditions of orthotropic creep is considered. It is assumed that the points of the rod ends can freely move in the direction of the rod axis, i.e. there is no constraint. The calculation was performed for rods made of a transversally isotropic plate of aluminum alloy V95pch (Al-Zn-Mg-Cu). The convergence of the solution depending on finite element mesh density in the ANSYS was studied. To estimate the angular velocity of twisting at the steady stage of creep, a method based on the principle of minimum additional dissipation was used. The resulting solution is in satisfactory agreement with the solution found by the finite element method. It is shown: the direction of rods cutting from a transversally isotropic plate has a significant influence on the value of the twist angle; warping of the cross section depends not only on its geometric shape, but also on the orthotropic properties of the material.

Keywords: structural alloys, orthotropy, creep, torsion of square rod, minimum additional dissipation, warping.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.402

REFERENCES

1. Shataev V.G., Shataev P.A. Analysis of thin-walled stiffened rods using the beam theory. *Russian Aeronautics*, 2011, Vol. 54, Iss. 1, pp. 49–55; DOI: 10.3103/S1068799811010090
2. Chernov S.A. Modeling of stability of a plate stiffened by thin-walled beams. *Software & Systems*, 2014, Vol. 108, No. 4, pp. 183–187; DOI: 10.15827/0236-235X.108.183-187
3. Iyavoynen S.V., Larichkin A.Yu., Kolodezev V.E. Chislennoe i eksperimental'noe issledovanie chistogo izgiba balok iz titanovogo splava ABVT-20 v usloviyakh polzuchesti s uchetom razlichnykh svoystv na rastyazhenie i szhatie [Numerical and experimental research of pure bending of beams made of the titanium ABVT-20 alloy with different properties for tension and compression under creep conditions]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, Vol. 22, No. 3, pp. 430–446 (in Russian); DOI: 10.14498/vsgtu1614
4. Banshchikova I.A., Tsvlodub I.Yu., Petrov D.M. Deformirovanie elementov konstruktсии iz splavov s ponizhennoi soprotivlyaemost'yu deformatsiyam polzuchesti v sdvigovom napravlenii [Deformation of structural elements made of alloys with reduced resistance to creep in shear direction]. *Uch. Zap. Kazan. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2015, Vol. 157, No. 3, pp. 34–41 (in Russian).
5. Boyko S.V., Larichkin A.Y. Inverse problem of pure bending of a beam under creep conditions. *J. Appl. Indust. Math.*, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 260–271; DOI: 10.1134/s1990478923020047

6. Boyko S.V., Larichkin A.Y. Inverse problem of ribbed panel forming. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2023, Vol. 64, No. 3, pp. 546–554; DOI: 10.1134/S0021894423030215
7. Bormotin K. S., Oleinikov A. I., Ovcharov I. O. Modelirovanie klepochnoi sborki obshivok kryla s uprezhdeniem reber zhestkosti [Modeling of riveted assembly of wing sheathing with forward stiffeners]. *Vychislitel'nye metody i programirovanie* [Numer. Meth. Programm.], 2015, Vol. 16, Iss. 3, pp. 376–386 (in Russian).
8. Oleinikov A.I., Bormotin K.S. Modelirovanie protsessa klepki paneli [Modeling of the panel-riveting process]. *Dal'nevost. Mat. Zhurn.* [Far Eastern Math. J.], Vol. 13, No. 1, pp. 102–106 (in Russian).
9. Vlasov V. Z. Thin-walled elastic beams. Washington: Israel Program for Scientific Translations. Translated from Russian [by Y. Schectman], 1961.
10. Lekhnitskii S.G. Kruchenie anizotropnykh i neodnorodnykh sterzhnej [Torsion of Anisotropic and Inhomogeneous Rods]. Moscow: Nauka, 1971 (in Russian).
11. Nurimbetov A., Bekbayev A., Oiybayev S., Dzhamanbayev M., Keikimanova M. Naturally twisted layered anisotropic rod made of reinforced materials research. *Appl. Mech. Materials*, 2015, Vol. 736, pp. 30–38; DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.736.30
12. Mironov B.G., Mironov Yu.B. On the problem of anisotropic rods torsion under external pressure. *Izvestiya RAN, Mekhanika Tverdogo Tela (Mechanics of Solids)*, 2023, Vol. 58, Iss. 2, pp. 511–515; DOI: 10.3103/S0025654422600878
13. Sporykhin A.N., Chupis S.G., Scheglova Y.D. O kruchenii prizmaticheskikh sterzhnei iz uprochnyayushchegosya vyazkoplasticheskogo materiala [On torsion of prismatic viscoplastic bars with hardening]. *Vestnik Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fizika, Matematika*, 2006, No. 2, pp. 235–240 (in Russian).
14. Kachanov L.M. Teoriya polzuchesti [Creep Theory]. Moscow: Fizmatgiz, 1960 (in Russian).
15. Manukyan M. M. Kruchenie tel s uchyotom polzuchesti [Torsion of bodies taking into account creep]. Yerevan: Yerevan Univ. Publ. House, 1972. (in Russian).
16. Namestnikov V.S. Stesnyonnoe kruchenie pri polzuchesti tonkostennogo sterzhnya zamknutogo profilya [Constrained torsion of a thin-walled rod of a closed profile at creep]. *Nauch. Tr. Vsesoyuz. Zaoch. Mashinosroit. Instit.*, 1975, Vol. 25, pp. 109–114 (in Russian).
17. Mordfin L. Torsion creep of circular and noncircular tubes. *J. Research National Bureau Standards. C. Engrg. Instrumentation*. 1967. Vol. 71, No. 3. P. 209–225.
18. Shutov A.V., Larichkin A.Yu., Shutov V.A. Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient. *ZAMM (Z. Angew. Math. Mech)*, 2017, pp. 1-17; DOI: 10.1002/zamm.201600286
19. Gorev V.B., Klopotov I.D. Metodika postroeniya krivykh deformirovaniya na kruchenie pri bol'shikh deformatsiyakh [Method for constructing torsion deformation curves at large strains]. *Zavodskaya laboratoriya*, 1995, No. 12, pp. 50–53 (in Russian).
20. Banshchikova I.A. Rod torsion in kinematic creep modes. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2022, Vol. 63, No. 5, pp. 891–902; DOI: 10.1134/S0021894422050194
21. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Tarasyuk I.A. Reologiya kruglogo strukturno-neodnorodnogo kompozitsionnogo sterzhnya pri kruchenii i krutil'nykh kolebaniyakh [Rheology of round longitudinal fibrous, cross layered and structurally nonuniform composite rod in conditions of torsion and torsional oscillations]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials], 2015, Vol. 81 No. 11, pp. 53–61 (in Russian).
22. Bhatnagar N.S., Gupta S.K., Gupta R.P. The torsion of an orthotropic rod in the theory of creep. *Wood Sci. Technology*, 1969, Vol. 3, Iss. 2, pp. 167–174.
23. Banshchikova I. A. Evaluation of the stress-strain state of rod at torsion from an anisotropic material in the shear direction at creep. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, Vol. 894, Article number 012006; DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012006.
24. Banshchikova I.A. Study of creep of orthotropic rods under torsion using the method of characteristic parameters. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2023, Vol. 64, No. 1, pp. 146–158; DOI: 10.1134/S0021894423010169

25. Sosnin O.V. Anisotropy of creep of materials. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 1965, No. 6, pp. 99–104; DOI: 10.1007/BF00919316
26. Gorev V.B., Masanov I.Zh. Osobennosti deformirovaniya listovykh konstruktsionnykh alyuminievykh splavov i plit v rezhimakh polzuchesti [Specific features of deformation of structural sheet plates made of aluminum alloys in creep regimes]. *Tekhnologiya mashinostroeniya* [Mechanical Engrg. Technol.], 2009, No. 7, pp. 13–20 (in Russian).