СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2025. Т. 28, № 4. С. 55–63

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О СИЛЬНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ

© 2025 С. О. Гладков[a], И. Ю. Зморка[b]

Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет),
Волоколамское шоссе, 4, г. Москва 125993, Россия

E-mails: [a]sglad51@mail.ru , [b]muratov.ilyas2003@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.04.2025 г.; после доработки 24.10.2025 г.;
принята к публикации 06.11.2025 г.

С помощью вариационной задачи с подвижной границей, найдена статическая форма балки, жёстко закреплённая на одном конце, при условии воздействия на её свободный конец постоянной силы тяжести. Получено общее выражение для функционала энергии с учётом двух типов потенциальной энергии: энергии изгиба и энергии сдвига свободного конца по криволинейной траектории. Из решения уравнения Эйлера — Пуассона найдено нетривиальное решение в виде степенной функции с дробным показателем.

Ключевые слова: упругая балка, потенциальная энергия, вариация, условие трансверсальности.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.404

ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача, связанная с установлением формы балки при её изгибе под воздействием какой-либо сосредоточенной силы, описана во многих учебниках по теории упругости, и используется как олимпиадная задача по математике. При этом её условие формулируется следующим образом. Имеется жёстко закреплённая с одного конца упругая балка, к свободному концу которой приложена точечная сила в виде тела массы m, которое под действием силы тяжести каким-то образом изгибает её. Необходимо установить форму балки, которую она приобретает при упругом изгибе. При этом во всех решениях считается, что потенциальная энергия перемещения свободного конца при воздействии силы тяжести в условиях небольшого смещения вдоль оси y просто равна mgy, где g — ускорение силы тяжести, а y — текущая ордината декартовой системы координат. Однако, если внимательно присмотреться к траектории перемещения, то становится вполне понятно, что тело смещает свободный конец совсем не по прямой линии, а по криволинейной, что наглядно может проиллюстрировать эксперимент с обычной деревянной или металлической линейкой, которая вполне может служить хорошим примером абсолютно упругого тела.

Именно поэтому довольно любопытно, на наш взгляд, найти ответ на вполне закономерный вопрос о нахождении формы деформируемой длинной балки под воздействием точечной силы тяжести, приложенной к её свободному концу в случае не малой, а произвольной деформации.

С интуитивной точки зрения абсолютно очевидно, что в рассматриваемом нами двухмерном случае её форма будет описываться некоторой степенной функцией от координаты. Именно поэтому задача здесь как раз и заключается в точном определении этой степени. В случае совсем малых деформаций смещение свободного конца обычно считается прямолинейным. Показатель степени при этом оказывается равным четырём.

В случае же сильных изгибов ситуация существенно изменятся (см. [1–3]). Как будет строго показано ниже, при учёте криволинейного перемещения свободного конца, форма балки оказывается существенно отличной от зависимости $y = Ax^4$

Однако, при этом задача довольно сильно усложняется, поскольку для её решения необходимо будет проинтегрировать нелинейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка, решение которого и даст нам ответ об истинной степенной зависимости.

Стоит также обратить внимание и на то факт, что решаемая в настоящей работе задача, с нашей точки зрения, имеет вполне обоснованное и не только познавательное, но и чисто прикладное значение. Этим фактом подчёркивается актуальность поставленной задачи, поскольку описываемый метод её решения может быть применён также и к множеству подобного рода близких проблем.

Действительно, в настоящем сообщении поднимается вполне актуальный вопрос о решении не просто задач из классической теории упругости, а из области проблем нелинейной теории сильных деформаций упругих стержней, когда помимо произвольного смещения свободного конца (не малого), важным фактором является учёт нелинейности его траектории. Этот факт уже сам по себе является новой и вполне актуальной темой, которая требует строгого математического исследования.

Дело в том, что до настоящего момента времени изучение деформаций стержневых систем проводилось только с точки зрения теории малых изгибов. Сказанное подразумевает квадратичную зависимость плотности свободной энергии упруго — деформируемых тел от тензора деформации u_{ik} . Из курса вариационного исчисления известно, однако, что если хотя бы один из концов экстремали описывает некоторую траекторию, то такая задача сводится к совместному решению уравнения Эйлера при обязательном учёте условия трансверсальности. Именно подобного рода задача и является предметом настоящего сообщения, что и говорит о её вполне обоснованной актуальности.

1. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ БАЛКИ

Поскольку запасённая потенциальная энергия упруго–деформируемой балки пропорциональна квадрату её кривизны, т. е.

$$U_1 = B \int\limits_l \frac{dl}{R^2}, \tag{1}$$

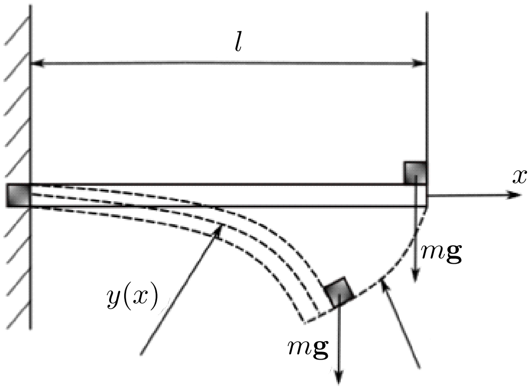
где B — коэффициент упругости балки, R — её радиус кривизны в произвольной точке, который определяется из соотношения

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \tag{2}$$

то в случае относительно небольших изгибов из формулы (2) следует, что $\frac{1}{R} \approx y''$. При этом потенциальную энергию (1) с учётом того, что $dl = dx\sqrt{1+y'^2} \approx dx$, можно переписать в значительно более простом виде, а именно

$$U_1 \approx B \int\limits_0^l y''^2 \, dx. \tag{3}$$

Вторая часть потенциальной энергии связана с вычислением работы, которую совершает сила тяжести, обязанная перемещению тела массой m вдоль криволинейной траектории (см. рисунок).



Схематическое изображение всех параметров задачи

Речь идёт о вычислении интеграла

$$A = m\int\limits_C g\,ds = -mg\int\limits_l^{x_1}\sqrt{1+\psi'^2}\sin\alpha\,dx = mg\int\limits_{x_1}^{l} sqrt1+\psi'^2\sin\alpha\,dx,$$

где функция $\psi(x)$ представляет собой уравнение траектории свободного конца стержня. Угол α — это тупой угол между касательной к функции $\psi(x)$ и осью x.

Однако, здесь следует понимать, что когда мы записываем интеграл (4), то интегрирование начинается от правой точки. Это означает, что при переходе к неподвижной системе координат, начало которой расположено в точке $M_0 = M(0,0)$ нам следует сделать формальную замену переменной $x \to l - x$, в результате чего интеграл (4) перейдёт в интеграл

$$A = mg\int\limits_0^{x_1}\sqrt{1+\psi'^2}\sin\alpha\,dx. \tag{4}$$

Следуя общим принципам решения вариационных задач с подвижными границами (см. [4, 5]), мы можем воспользоваться условием ортогональности экстремали и функции $\psi(x)$, а именно соотношением

$$y'\psi' = -1. \tag{5}$$

Поскольку

$$\psi' = \mathrm{tg}\ \alpha, \tag{6}$$

формула (4) преобразуется к виду

$$A = mg\int\limits_0^{x_1}\psi'\,dx = -mg\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{y'}. \tag{7}$$

Таким образом, искомая потенциальная энергия, обязанная работе силы тяжести по перемещению тела массы m вдоль траектории $\psi(x)$ становится такой

$$U_2 = mg\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{y'}. \tag{8}$$

И, следовательно, с учётом (2) и (8) полный функционал потенциальной энергии в наиболее общем случае приводится к виду

$$U = U_1 + U_2 = \int\limits_0^{x_1} \left[B\frac{y''^2}{(1+y'^2)^{5/2}} + \frac{mg}{y'} \right] dx. \tag{9}$$

Рассмотрим вначале упрощённый вариант решения. А именно, будем считать, что $y'^2 \ll 1$. В этом случае функционал (9) упрощается и становится следующим

$$U = \int\limits_0^{x_1} \left[By''^2 + \frac{mg}{y'} \right] dx.$$

Подынтегральная функция должна удовлетворять уравнению Эйлера — Пуассона

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2F_{y''}}{dx^2} = 0, \tag{10}$$

где

$$F = By''^2 + \frac{mg}{y'}.$$

Поскольку $F_y = 0$, то первый интеграл уравнения (10) даёт

$$By''' + \frac{mg}{y'^2} = C_1, \tag{11}$$

где C_1 — константа интегрирования.

Полагая

$$C_1 = 0$$

и совершая подстановку

$$y' = u, \quad y''' = u^2\frac{d^2u}{dy^2} + u\left(\frac{du}{dy}\right)^2, \tag{12}$$

приходим к уравнению

$$B\left(u^2\frac{d^2u}{dy^2} + u\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right) + \frac{mg}{u^2} = 0,$$

или в более компактном виде

$$B(uu')' + \frac{mg}{u^3} = 0. \tag{13}$$

Полагая здесь

$$u^2 = z, \tag{14}$$

имеем

$$Bz'' + \frac{2mg}{z^{3/2}} = 0. \tag{15}$$

Ещё одна замена

$$z' = V, \qquad z'' = V\frac{dV}{dz} \tag{16}$$

приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$BV\frac{dV}{dz} = -\frac{2mg}{z^{3/2}}.$$

Интегрируя, имеем

$$BV^2 = \frac{8mg}{\sqrt{z}} + C_2, \tag{17}$$

где C_2 — ещё одна константа интегрирования.

Полагая $C_2 = 0$ и вспоминая подстановку (12), получаем из решения (17)

$$z' = \frac{2\lambda}{z^{1/4}}, \tag{18}$$

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{2mg}{B}}. \tag{19}$$

Интегрируя уравнение (18), получаем

$$z^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{2}\lambda y + C_3,$$

где C_3 — константа интегрирования.

Считая, опять–таки, что $C_3 = 0$ и используя подстановки (12) и (14) имеем

$$y'^{5/2} = \frac{5}{2}\lambda y, \tag{20}$$

откуда немедленно следует, что

$$y' = \left(\frac{5}{2}\lambda y\right)^{2/5},$$

и после интегрирования получаем

$$y = \left(\frac{3}{5}\right)^{5/3} \left(\frac{5}{2}\lambda\right)^{2/3} x^{5/3} + C_4, \tag{21}$$

где C_4 — четвёртая постоянная интегрирования, которая находится из условия $y(0) = 0$, и, следовательно, $C_4 = 0$. Таким образом, форма изгибающейся балки должна иметь вид

$$y = \beta x^{5/3}, \tag{22}$$

где

$$\beta = \left(\frac{3}{5}\right)^{5/3} \left(\frac{5}{2}\lambda\right)^{2/3}. \tag{23}$$

Как видно из (23) и определения (19), константа β имеет размерность $L^{-2/3}$.

Если смещения незакреплённого конца совсем маленькие, то классический закон говорит нам о том, что в этом случае зависимость $y(x) \sim x^4$. По большому счёту эта зависимость и зависимость (22) довольно слабо отличаются друг от друга в силу их степенного характера. Хотя с точки зрения качественного анализа вполне очевидно, что когда кривая почти лежит на оси абсцисс, то её полиномиальная степень вполне может быть и больше четырёх. В том же случае, если дело касается несколько более сильных изгибов, то найденная зависимость (22) вполне неплохо их описывает.

2. Общий случай сильных изгибов

Чтобы их описать, возвратимся к функционалу (9)

$$U = \int\limits_0^{x_1} \left(B \frac{y''^2}{(1+y'^2)^{5/2}} + \frac{mg}{y'} \right) dx \tag{24}$$

и запишем для него уравнение Эйлера — Пуассона согласно формуле (10)

После простого дифференцирования находим

$$F_y = 0, \quad F_{y'} = -\frac{5By''^2 y'}{(1+y'^2)^{7/2}} - \frac{mg}{y'^2}, \quad F_{y''} = \frac{2By''}{(1+y'^2)^{5/2}}. \tag{25}$$

В результате из уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

следует, что что первый интеграл есть

$$F_{y'} = \frac{d}{dx} F_{y''} + \mathrm{const}\,.$$

Полагая константу равной нулю, с учётом (25), находим интересующее нас уравнение

$$\frac{2y'''}{(1+y'^2)^{5/2}} - \frac{5y''^2 y'}{(1+y'^2)^{7/2}} + \frac{\lambda}{y'^2} = 0, \tag{26}$$

где параметр

$$\lambda = \frac{mg}{B}.$$

Уравнение (26) проще всего решить с помощью подстановки

$$y' = \operatorname{tg} \alpha. \tag{27}$$

Тогда

$$y'' = \frac{\alpha'}{\cos^2 \alpha}, \quad y''' = \frac{\alpha''}{\cos^2 \alpha} + \frac{2\alpha'^2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha},$$

и уравнение (26) сводится к довольно компактному виду

$$2\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha + \frac{\lambda}{\sin^2 \alpha} = 0 \tag{28}$$

С помощью подстановки

$$\alpha' = u, \quad \alpha'' = u \frac{du}{d\alpha} \tag{29}$$

приходим к уравнению

$$2u \frac{du}{d\alpha} \cos \alpha - u^2 \sin \alpha + \frac{\lambda}{\sin^2 \alpha} = 0. \tag{30}$$

Очередная подстановка здесь вполне очевидна, а именно

$$z = u^2. \tag{31}$$

В результате у нас получается простейшее неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dz}{d\alpha}\cos\alpha - z\sin\alpha = -\frac{\lambda}{\sin^2\alpha},$$

решение которого находится элементарно, и в результате мы получаем, что

$$z = \frac{\lambda}{\sin\alpha} + \frac{C_1}{\cos\alpha}.$$

Физическим смыслом, очевидно, обладает только первое слагаемое, поэтому полагаем $C_1 = 0$, т. е.

$$z = \frac{\lambda}{\sin\alpha}. \tag{32}$$

Согласно (29) и (31) имеем

$$\alpha'^2 = \frac{\lambda}{\sin\alpha}, \tag{5}$$

откуда следует, что

$$x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\sqrt{\sin\alpha}\,d\alpha + C_2, \tag{33}$$

где C_2 — константа интегрирования.

Согласно 27) имеем

$$y = \int \operatorname{tg}\alpha\,dx + C_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\sin\alpha}\,d\alpha + C_3, \tag{34}$$

где C_3 — ещё одна константа интегрирования.

Таким образом, точное параметрическое решение поставленной задачи в квадратурах, мы можем записать в виде следующей очень компактной системы уравнений

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\sqrt{\sin\alpha}\,d\alpha + C_2,\\ y &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\sin\alpha}\,d\alpha + C_3. \end{aligned} \tag{35}$$

Проанализируем полученное решение (35). Если угол отклонения мал, т. е. изгибы относительно невелики, из уравнений (35) следует, что

$$\begin{aligned} x &\approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\sqrt{\alpha}\,d\alpha + C_2 = \frac{2\alpha^{3/2}}{3\sqrt{\lambda}} + C_2,\\ y &\approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int \alpha^{3/2}\,d\alpha + C_3 = \frac{2\alpha^{5/2}}{5\sqrt{\lambda}} + C_3. \end{aligned} \tag{36}$$

Избавляясь здесь от α, получаем

$$\left(\frac{3\sqrt{\lambda}}{2}x - C_2\right)^{2/3} = \left(\frac{5\sqrt{\lambda}}{2}y - C_3\right)^{2/5} \tag{37}$$

Поскольку $y(0) = 0$, то следует считать, что $C_2 = C_3 = 0$.

В результате из (37) следует искомая зависимость

$$y = 0.6\,(1.5)^{2/3}\lambda^{1/3}x^{5/3}. \tag{38}$$

Сравнив решение (38) с полученным выше решением (22), (23) и (19), видим их полную тождественность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая это сообщение, подведём основные итоги проведённого выше анализа:

— найдено общее выражение для функционала при учёте подвижности свободного конца балки;

— из условия экстремума найденного функционала получено дифференциальное уравнение, и проанализировано его решение;

— получено общее решение поставленной задачи в параметрическом виде (35);

— показано, что зависимость линии изгиба при сравнительно небольших деформациях подчиняется степенному закону $y(x) \sim x^{5/3}$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Московского авиационного института. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров Ю.В., Охоткин К.Г.* Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // Прикл. математика и техн. физика. 2002. Т. 43, вып. 5. С. 124–131.
2. *Захаров Ю.В., Охоткин К.Г., Скоробогатов А.Д.* Изгиб стрежней под действием следящей нагрузки // Прикл. математика и техн. физика. 2004. Т. 45, вып. 3. С. 167–175.
3. *Леваков С.В.* Нелинейный пространственный изгиб криволинейных стержней с учётом поперечного сдвига // Прикл. математика и техн. физика. 2012. Т. 53, вып. 2. С. 128–136.
4. *Гладков С.О.* К вопросу о вычислении модуля Юнга // Инж.-физ. журн. 2003. Т. 76, вып. 5. С. 144–147.
5. *Gladkov S.O.* On a transversality condition for one variation problem with moving boundary // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2019. V. 12, N 1. P. 125–129.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3

ON THE ISSUE OF STRONG BENDING OF THE ROD

© 2025 **S. O. Gladkov[a], I. Y. Zmorka[b]**

Moscow Aviation Institute
(National Research University)
Volokolamskoye shosse, 4, Moscow 125993, Russia

E-mails: [a]sglad51@mail.ru , [b]muratov.ilyas2003@yandex.ru

Received 28.04.2025, revised 24.10.2025, accepted 06.11.2025

Abstract. With the help of the variation problem with a moving boundary a static shape of a beam is found rigidly fixed at one end provided that its free end is affected by a constant point force. A general expression is obtained for the energy functional taking into account two types of potential energy: bending energy and free end shear energy along a curved trajectory. From the solution of the Euler-Poisson equation a non-trivial solution was found in the form of a power function with a fractional exponent.

Keywords: elastic beam, potential energy, variation, transversality condition, parametric decision.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.404

REFERENCES

1. Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G. Nelineinyi izgib tonkikh uprugikh sterzhnei [Nonlinear bending of thin elastic rods]. *Prikl. Matematika i Tekhn. Fizika* [Appl. Math. Engrg. Phys.], 2002. Vol. 43, No. 5, pp. 124–131 (in Russian).
2. Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G., Skorobogatov A.D. Izgib strezhnei pod deistviem sledyashchei nagruzki [Bending of the rods under the action of a tracking load]. *Prikl. Matematika i Tekhn. Fizika* [Appl. Math. Engrg. Phys.], 2004. Vol. 45, No. 3, pp. 167–175 (in Russian).
3. Levakov S.V. Nelineinyi prostranstvennyi izgib krivolineinykh sterzhnei s uchetom poperechnogo sdviga [Nonlinear spatial bending of curved rods with allowance for lateral shear]. *Prikl. Matematika i Tekhn. Fizika* [Appl. Math. Engrg. Phys.], 2012, Vol. 53, No. 2, pp. 128–136 (in Russian).
4. Gladkov S.O. K voprosu o vychislenii modulya Yung [On the question of calculating the Young's modulus]. *Inzh.-fiz. zhurn.* [Engrg.-Phys. J.], 2003, Vol. 76, No. 5, pp. 144–147 (in Russian).
5. Gladkov S.O. On a transversality condition for one variation problem with moving boundary. *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, 2019, Vol. 12, No. 1, pp. 125–129.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2025, Vol. 19, No. 4.