

УДК 519.677:514.753

МОДЕЛИ ПОСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ© 2025 Е. Ю. Деревцов^{1а}, С. В. Мальцева^{1,2б}

¹Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: ^аeydert@mail.ru, ^бmaltsevasv@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 30.09.2025 г.; после доработки 25.10.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Рассматривается задача рефракционной томографии, поставленная в полупространстве с рефракцией, интерпретируемая как задача интегральной геометрии, в рамках которой рефракция моделируется заданной римановой метрикой, допускающей наличие семейств вполне геодезических подмногообразий топологической размерности два. Предложены варианты послойного решения 3D задачи путём понижения размерности исходной задачи и её сведения к решению серии двумерных задач. Построены 2D метрики в круге, изометричные соответствующим вполне геодезическим подмногообразиям. Установлены геометрические характеристики исходной 3D метрики и порождённых ею 2D метрик. Предложена схема алгоритма послойного решения 3D задачи рефракционной томографии численными методами.

Ключевые слова: рефракционная томография, интегральная геометрия, риманова метрика, кривизна, вполне геодезическое подмногообразие, геодезическое лучевое преобразование, послойная реконструкция.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.405

*Памяти Проф. А. К. Луиса, выдающегося учёного,
доброжелательного коллеги, доброго друга*

ВВЕДЕНИЕ

Явление рефракции луча, вдоль которого распространяется сигнал, возникает в процессе зондирования неоднородной среды физическим полем практически любой природы. В рамках основных моделей томографии, и особенно в рентгеновской, этот эффект пренебрежимо мал, и им вполне обоснованно пренебрегают. В ряде других постановок, например, в рамках сейсмической томографии, рефракция столь значительна или представляет собой настолько важный элемент модели, что пренебречь ею становится уже невозможно. Задача восстановления (по известному экспоненциальному лучевому преобразованию) функции распределения источников, заданной в ограниченной плоской области с известным коэффициентом поглощения в случае, если рефракция (даже значительная) в среде известна, была успешно решена алгоритмами, построенными на основе метода наименьших квадратов с использованием многочленов или *B*-сплайнов в качестве базисов (см. [1, 2]).

Задача рефракционной томографии в трёхмерной постановке существенно отличается от задач традиционной компьютерной 3D-томографии, постановки которых не включают в себя явление рефракции. Отметим, что значения лучевого преобразования, которые используются

в данной работе в качестве данных, представляют собой функции, зависящие от четырёх переменных, и, таким образом, мы приходим к переопределённой по размерности обратной задаче. В рамках компьютерной томографии, с целью сокращения размерности данных обычно прибегают к одному из двух подходов. В первом $3D$ -задача сводится к серии двумерных задач, решение каждой из которых даёт след на плоскости восстанавливаемой функции, зависящей от трёх переменных. Обычно такая плоскость является одной из фиксированного семейства параллельных плоскостей. Второй подход состоит в использовании конусной схемы наблюдения, в которой источники трансмиссии располагают на пространственной кривой, удовлетворяющей определённым геометрическим требованиям. Задача, тем самым, ставится как задача конусной томографии, и топологическая размерность данных сокращается до трёх (см. [3–5]).

К сожалению, если не удовлетворены довольно жёсткие требования к римановой метрике, оба эти подхода к задаче рефракционной $3D$ -томографии неприменимы. Причина заключается в том, что у произвольного риманова многообразия, заданного в ограниченной области из \mathbb{R}^3 , как правило, отсутствует достаточно богатое семейство вполне геодезических подмногообразий размерности два, аналогичное по своим свойствам семейству плоскостей в евклидовом пространстве. Упомянутое обстоятельство ставит под сомнение возможность использования в общем случае часто применяемой в задачах томографии процедуры организации таких схем наблюдения, которые часто порождают новые томографические операторы и сокращают топологическую размерность образов лучевых преобразований до трёх с целью исключения фактора переопределённости данных обратной задачи (см. [6–8]).

Возникает вопрос о существовании таких римановых областей и метрик, заданных, в частности, в полупространстве, которые бы позволили свести трёхмерную задачу рефракционной томографии в общей постановке к серии двумерных, и, тем самым, к общеизвестной методике послойного восстановления искомой функции. Ответ положительный, хотя и не исчерпывающий. Ниже рассматриваются задачи рефракционной томографии, состоящие в определении в полупространстве скалярного поля по его известным геодезическим лучевым преобразованиям. Обосновывается методика приближённого решения задачи, основанная на последовательном решении серии двумерных задач, каждая из которых сводится к задаче рефракционной скалярной томографии.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть (D, g) — риманова область в \mathbb{R}^3 , т. е. область D с заданной в ней простой римановой метрикой g с элементом длины

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{1}$$

где $x = (x^1, x^2, x^3) \in D$ (по разноразмерным индексам в одном мономе подразумеваем суммирование по $i, j = 1, 2, 3$); область D такова, что её граница ∂D строго выпукла по отношению к метрике g . Напомним, что риманова метрика характеризуется как простая, если любые две точки из $\bar{D} \equiv D \cup \partial D$ соединяются единственной геодезической, а риманово многообразие, атлас которого состоит из одной карты, называем римановой областью. Для точек $x, y \in \bar{D}$ через $\gamma_{x,y}(t)$ обозначим геодезическую, соединяющую эти точки. При этом параметр t — длина (в смысле римановой метрики) дуги, $\gamma_{x,y}(0) = x$, $\gamma_{x,y}(t_+) = y$.

Приведём систему, состоящую из обыкновенных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, решениями которых являются геодезические римановой метрики (1),

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2}$$

По i, j производится суммирование от 1 до 3, параметр s пропорционален длине дуги, а символы Кристоффеля задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} \left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} \right). \tag{3}$$

Определения (1), (2), (3) применимы и в двумерном случае, нужно всего лишь исправить диапазон изменения индексов i, j, k ; в 2D случае значения индексов меняются от 1 до 2.

В настоящей работе в качестве области D выбирается полупространство

$$D = \mathbb{R}_{x^3+}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 > 0\}.$$

Обычно при моделировании явления рефракции в полупространстве римановой метрикой фиксируется условие, что метрика — отрицательной кривизны. Здесь и далее координаты точки $p \in \mathbb{R}^3$ в индексных (x^1, x^2, x^3) или традиционных (x, y, z) обозначениях считаем равноправными.

В качестве \bar{D} выбираем замкнутое полупространство $\mathbb{R}_{z+}^3 \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$. Элемент длины метрики в \mathbb{R}_{z+}^3 зададим следующим образом,

$$ds^2 = \lambda^2(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4)$$

Метрику такого вида, в рамках настоящей работы, условно будем называть «изотермической». Строго говоря, термин не вполне корректен, так как обычно говорят о (локальной) «изотермической» системе координат, в которой возможно представление римановой метрики (1) в диагональной форме (4). Двумерное риманово многообразие допускает возможность введения (локальной) изотермической системы координат всегда. Если многообразие трехмерно, то необходимым и достаточным условием существования такой системы координат является условие обращения в нуль тензора Коттона.

Пусть на плоскости $z = 0$ заданы две произвольные точки $q_1(x_1, y_1, 0)$, $q_2(x_2, y_2, 0)$. Соединим их геодезической линией γ_{q_1, q_2} , задаваемой изотермической метрикой (4), и рассмотрим функционал

$$\varrho(q_1, q_2) = \int_{\gamma(q_1, q_2)} \lambda(x, y, z) |dp|, \quad (5)$$

где $|dp| = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$. Функция $\lambda(x, y, z)$ является величиной, обратной скорости, и, следовательно, $\varrho(q_1, q_2)$ представляет собой время пробега сигнала от точки q_1 до точки q_2 . Интегральный оператор в правой части (5) часто называют геодезическим лучевым преобразованием. Функция $\lambda(x, y, z)$ и геодезическая γ_{q_1, q_2} тесно связаны: изменение скорости распространения сигнала влечёт изменение метрики (4) и, следовательно, её геодезических. Нелинейные функционалы (5), известные для любых пар точек $q_1, q_2 \in \partial D$, являются исходными данными для обратной кинематической задачи сейсмологии (см. [9, 10]), состоящей в отыскании функции скорости $v(x, y, z) = \lambda^{-1}(x, y, z)$ распространения сигнала в среде по известным временам $\varrho(q_1, q_2)$ его пробега.

В настоящей работе рассматриваемые 3D задачи рефракционной томографии, при известной римановой метрике, могут быть охарактеризованы как задачи скалярной томографии, состоящие в восстановлении функции λ , которая уже не связана с римановой метрикой (4) и её геодезическими. Оставляем за восстанавливаемой функцией в этой задаче прежнее обозначение λ (иногда заменяя её на f), а геодезическое лучевое преобразование определим следующим образом,

$$\mathcal{R}(p, q) = \int_{\gamma_{p, q}} \lambda(x, y, z) |dp| = \int_0^{t_+} \lambda(\gamma_{p, q}(t)) dt, \quad p \in D \cup \partial D, \quad q \in \partial D. \quad (6)$$

Напомним, что значения $0, t_+$ параметра t выбраны таким образом, что $\gamma_{p, q}(0) = p$, $\gamma_{p, q}(t_+) = q$.

2. СВЯЗЬ 3D И 2D ЗАДАЧ

Ограниченную поверхность $E \subset D$ будем называть вполне геодезической подобластью, если из того, что $p, q \in E$ следует, что $\gamma_{p,q} \subset E$. Риманову метрику g , заданную в D , назовём точно расслаивающей область D метрикой, если:

1) для любой точки $p \in D \setminus \partial D$ существует хотя бы одна вполне геодезическая подобласть E_p , содержащая точку p ;

2) в области D существует хотя бы одна геодезическая $\gamma(t)$ такая, что вполне геодезические подобласти E_p, E_q , соответствующие различным точкам $p \equiv \gamma(t_1), q \equiv \gamma(t_2)$ геодезической, не пересекаются.

Рассмотрим один класс точно расслаивающих полупространство римановых метрик. Конкретизируем вид метрики (4), полагая $\lambda(x, y, z) = 1/(az + b)$, $a, b > 0$. Иными словами, $g_{jj} = (az + b)^{-2}$, $j = 1, 2, 3$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Отличные от нуля символы Кристоффеля таковы,

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{33}^3 = -\Gamma_{11}^3 = -\Gamma_{22}^3 = -\frac{a}{az + b}. \quad (7)$$

Приведём общие формулы [11], в соответствии с которыми проводятся вычисления. Тензор кривизны Римана — Кристоффеля \mathfrak{R}_{jkl}^i выражается через символы Кристоффеля и их производные,

$$\mathfrak{R}_{jkl}^i = \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sl}^i \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{sk}^i \right), \quad (8)$$

а ковариантные компоненты тензора кривизны (8), образуемые по правилу $\mathfrak{R}_{ijkl} = g_{is} \mathfrak{R}_{jkl}^s$, могут быть заданы прямыми формулами

$$\mathfrak{R}_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} \right) - g_{rs} (\Gamma_{jk}^r \Gamma_{il}^s - \Gamma_{jl}^r \Gamma_{ik}^s). \quad (9)$$

Свёртка

$$\mathfrak{R}_{jk} = \mathfrak{R}_{jks}^s = -\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{js}^s + \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{jk}^s + \Gamma_{js}^p \Gamma_{kp}^s - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sp}^p, \quad (10)$$

тензора кривизны (8) приводит к компонентам симметричного тензора Риччи, который в свою очередь порождает скаляр

$$\mathfrak{R} = g^{jk} \mathfrak{R}_{jk}, \quad (11)$$

известный как скалярная кривизна. Тензор Коттона задаётся соотношением (при размерности риманова многообразия $n = 3$), $i, j, k, s, p = 1, 2, 3$,

$$C_{ijk} = \nabla_k \mathfrak{R}_{ij} - \nabla_j \mathfrak{R}_{ik} + \frac{1}{4} (\nabla_j \mathfrak{R} g_{ik} - \nabla_k \mathfrak{R} g_{ij}), \quad (12)$$

где ∇_k — ковариантная производная по координате x^k .

Лемма 1. Пусть в полупространстве $\mathbb{R}_{z+}^3 \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$ задана метрика (4) при $\lambda(x, y, z) = (az + b)^{-1}$, $a, b > 0$. Тогда ненулевые компоненты тензора Римана — Кристоффеля и тензора Риччи принимают значения

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{1212} = \mathfrak{R}_{1313} = \mathfrak{R}_{2323} &= -a^2/(az + b)^4; \\ \mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{R}_{22} = \mathfrak{R}_{33} &= -2a^2/(az + b)^2; \end{aligned}$$

скалярная кривизна постоянна, $\mathfrak{R} = -6a^2$; тензор Коттона C_{ijk} обращается в нуль.

Доказательство. Компоненты тензора кривизны Римана — Кристоффеля вычисляются непосредственно по формулам (9). Применяя соотношения (7)–(12), непосредственными вычислениями получим выражения для компонент тензора Риччи, тензора Коттона и скалярной кривизны. Убедимся в справедливости утверждения леммы, например, для компоненты \mathfrak{R}_{33} , предварительно отметив, что

$$\frac{\Gamma_{13}^1}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma_{23}^2}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma_{33}^3}{\partial z} = a^2/(az+b)^2, \quad \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma_{22}^3}{\partial z} = -a^2/(az+b)^2.$$

Детальное выражение для этой компоненты выглядит следующим образом,

$$\mathfrak{R}_{33} = \frac{\partial \Gamma_{33}^s}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{3s}^s}{\partial x^3} + \Gamma_{s1}^s \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{s2}^s \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{s3}^s \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{31}^s \Gamma_{s3}^1 - \Gamma_{32}^s \Gamma_{s3}^2 - \Gamma_{33}^s \Gamma_{s3}^3.$$

Подставляя в выражение для \mathfrak{R}_{33} значения ненулевых символов Кристоффеля и их производных по z , получаем, что $\mathfrak{R}_{33} = -2a^2/(az+b)^2$. Аналогичным образом убеждаемся в том, что $\mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{R}_{22} = -2a^2/(az+b)^2$, а $\mathfrak{R}_{jk} = 0$, $j \neq k$. Проверим, например, что $\mathfrak{R}_{31} = 0$:

$$\mathfrak{R}_{31} = \frac{\partial \Gamma_{31}^s}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{1s}^s}{\partial x^3} + \Gamma_{s1}^s \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{s2}^s \Gamma_{31}^2 + \Gamma_{s3}^s \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{31}^s \Gamma_{s1}^1 - \Gamma_{32}^s \Gamma_{s1}^2 - \Gamma_{33}^s \Gamma_{s1}^3.$$

Что касается скалярной кривизны, то из того, что $\mathfrak{R} = g^{jj}\mathfrak{R}_{jj}$, $j = 1, 2, 3$, следует, что $\mathfrak{R} = 3g^{11}\mathfrak{R}_{11} = -6a^2$.

Найдём ненулевые производные тензора Риччи,

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_{ii}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^3} (-2a^2(az+b)^{-2}) = \frac{4a^3}{(az+b)^3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Принимая во внимание, что

$$\nabla_k \mathfrak{R}_{ij} = \frac{\partial \mathfrak{R}_{ij}}{\partial x^k} - \mathfrak{R}_{sj} \Gamma_{ik}^s - \mathfrak{R}_{is} \Gamma_{jk}^s, \quad \nabla_j \mathfrak{R}_{ik} = \frac{\partial \mathfrak{R}_{ik}}{\partial x^j} - \mathfrak{R}_{sk} \Gamma_{ij}^s - \mathfrak{R}_{is} \Gamma_{jk}^s,$$

и скалярная кривизна \mathfrak{R} постоянна, получаем, что $\frac{\partial \mathfrak{R}_{ij}}{\partial x^k} = \mathfrak{R}_{sj} \Gamma_{ik}^s + \mathfrak{R}_{is} \Gamma_{jk}^s$ при $i = j$, $k = 3$. При остальных значениях индексов либо компоненты тензора Риччи \mathfrak{R}_{ij} , либо их производные, либо Γ_{jk}^i обращаются в нуль. \square

Система уравнений, задающая геодезические метрики (4) при $\lambda = (az+b)^{-1}$, $a, b > 0$, приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{2a}{az+b} \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{2a}{az+b} \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{a}{az+b} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \frac{a}{az+b} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 - \frac{a}{az+b} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Известно [12], что система уравнений (13), задающая геодезические такой метрики, разрешима в квадратурах, а её геодезические представляют собой дуги окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных оси z . Точнее, геодезическая, проходящая через две точки $q_1(x_1, y_1, 0)$, $q_2(x_2, y_2, 0) \in \mathbb{R}_{z+}^3$, представляет собой дугу окружности радиуса r с центром в точке p_0 , лежащей в плоскости $\mathcal{P}_{q_1 q_2}$, где

$$r = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{|q_1 - q_2|^2}{4}}, \quad p_0 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, -b/a \right). \tag{14}$$

Укажем уравнение, которым задаётся плоскость $\mathcal{P}_{q_1q_2}$,

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - (x_1y_2 - x_2y_1) = 0. \quad (15)$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать параметрическое уравнение плоскости,

$$p = p_0 + ue_1 + ve_2v, \quad (16)$$

которое задаёт собственную систему координат OUV на каждой из «вертикальных» плоскостей, содержащих геодезические метрики (13).

Замечание 1. Каждая из таких «вертикальных» плоскостей представляет собой вполне геодезическое подмногообразие топологической размерности 2. Семейства непересекающихся «вертикальных» плоскостей образуют на плоскости $z = 0$ следующие семейства систем наблюдения: фиксируем две параллельные прямые $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ на плоскости $z = 0$, и множество перпендикулярных им «вертикальных» плоскостей. Точка q_1 пробегает конечное множество эквидистантных точек на прямой \mathcal{L}_1 . Соответствующее множество точек q_2 — конечное множество эквидистантных точек на прямой \mathcal{L}_2 — расположено так, что каждой точке q_1 соответствует одна и только одна точка q_2 такая, что отрезок $[q_1, q_2] \perp \mathcal{L}_1$ (\mathcal{L}_2). Вращая построенные семейства (например, вокруг оси z) «вертикальных» параллельных плоскостей, каждое с двумя параллельными прямыми, получаем данные, «почти» соответствующие параллельной схеме наблюдений.

В уравнении (16) точка $p(x, y, z)$ — текущая точка «вертикальной» плоскости, точка p_0 (центр системы координат на плоскости) определена формулой (14). Базисные векторы $e_1 = (q_1 - q_2)/|q_1 - q_2|$, $e_2 = (0, 0, 1)$ коллинеарны плоскости $\mathcal{P}_{q_1q_2}$ и задают на ней ортогональную декартову систему координат с центром в точке p_0 .

Введём следующие обозначения:

$S_{p_0, R}^2$ — сфера радиуса $R > b/a$ с центром в точке $p_0(x_0, y_0, -b/a)$;

$S_{q_0, \rho}^1 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ — окружность радиуса ρ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$;

$B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ — круг радиуса ρ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$.

Справедлива следующая

Лемма 2. Пусть $a, b > 0, R > b/a$. Тогда поверхность $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z+}^3$ есть вполне геодезическая подобласть полупространства \mathbb{R}_{z+}^3 с заданной на нём римановой метрикой (4) при $\lambda(x, y, z) = (az + b)^{-1}$, $a, b > 0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно в качестве центра сферы $S_{p_0, R}^2$ выбрать точку $p_0 = (0, 0, -b/a)$. Пересечение поверхности $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z+}^3$ с плоскостью OXY представляет собой окружность $S_{q, \rho}^1$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ с центром в точке $q = (0, 0, 0)$. Возьмём на окружности $S_{q, \rho}^1$ две произвольные точки $q_1(x_1, y_1, 0)$, $q_2(x_2, y_2, 0)$. Как уже отмечалось, произвольная точка p геодезической метрики (4), проходящей через точки q_1, q_2 , удовлетворяет соотношениям (см. (14), (15)), и, кроме того,

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{|q_2 - q_1|^2}{4}. \quad (17)$$

Нужно показать, что $p \in S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z+}^3$, т. е. что координаты точки $p(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + (z + b/a)^2 = R^2$. Сравнивая последнее соотношение и (17), приходим к выводу, что для этого достаточно проверить справедливость равенства

$$x^2 + y^2 = \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \rho^2 - \frac{|q_2 - q_1|^2}{4}.$$

Элементарные преобразования приводят к соотношению (15), использование которого приводит к соотношению

$$\rho^2 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} ((x_2)^2 + (y_2)^2 - (x_1)^2 - (y_1)^2) = \rho^2,$$

которое в силу свойства $q_1, q_2 \in S_{q,\rho}^1$, т. е. $|q_1| = |q_2| = \rho$, обращается в тождество. Лемма доказана. \square

2.1. Модель 1 метрики в полупространстве

Теорема 1. Пусть $a, b > 0, R > b/a$ фиксированы, $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$. Тогда вполне геодезическая подобласть $S_{\rho_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3$ полупространства $\mathbb{R}_{z^+}^3$ с метрикой (4), $\lambda = (az + b)^{-1}$, изометрична кругу $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z^+}^3$ с заданной на нём 2D римановой метрикой с элементом длины

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2,$$

где компоненты метрического тензора заданы формулами

$$g_{11} = \frac{1}{a^2 r^2} \left(1 + \frac{(x - x_0)^2}{r^2} \right), \quad g_{12} = \frac{1}{a^2 r^2} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{r^2}, \quad g_{22} = \frac{1}{a^2 r^2} \left(1 + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} \right), \quad (18)$$

где через r обозначена величина $\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$. В частности, при $x_0 = y_0 = 0$

$$g_{11} = \frac{1}{a^2 r^2} \left(1 + \frac{x^2}{r^2} \right), \quad g_{12} = \frac{1}{a^2 r^2} \frac{xy}{r^2}, \quad g_{22} = \frac{1}{a^2 r^2} \left(1 + \frac{y^2}{r^2} \right),$$

где $r = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Доказательство. Так как уравнение поверхности $S_{\rho_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3$ можно записать в виде $z = -b/a + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$, $z \geq 0$, то, выражая из этого уравнения дифференциал dz через дифференциалы dx, dy , подставляя $(dz)^2$ в (4) и замечая, что $(az + b)^2 = a^2 r^2$, получим эквивалентное (4) выражение

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{(az + b)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= \frac{r^2 + (x - x_0)^2}{a^2 r^4} dx^2 + 2 \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{a^2 r^4} dx dy + \frac{r^2 + (y - y_0)^2}{a^2 r^4} dy^2 \end{aligned} \quad (19)$$

для элемента длины. В силу взаимной однозначности отображения

$$F : S_{\rho_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3 \rightarrow B_{q_0, \rho}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}, \quad F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

и справедливости соотношения (19) приходим к утверждению об изометричности. Изометричность обратного отображения

$$F^{-1} : B_{q_0, \rho}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\} \rightarrow S_{\rho_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3, \quad F^{-1}(x, y, 0) = (x, y, z),$$

где $z = -b/a + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$, $z \geq 0$, также имеет место. \square

Далее без ограничения общности будем полагать параметры x_0, y_0 равными нулю.

Найдём $\det(g_{ij})$, контравариантные компоненты g^{ij} , $i, j = 1, 2$ метрического тензора и символы Кристоффеля Γ_{ij}^k метрики (19). Для определителя $\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ получаем выражение $\det(g_{ij}) = R^2/(a^4 r^6)$. Контравариантные компоненты метрического тензора приобретают вид

$$g^{11} = \frac{a^2 r^2}{R^2} (R^2 - x^2), \quad g^{12} = -\frac{a^2 r^2}{R^2} xy, \quad g^{22} = \frac{a^2 r^2}{R^2} (R^2 - y^2). \quad (20)$$

Символы Кристоффеля вычисляются по формулам (3),

$$\Gamma_{11}^1 = 2\frac{x}{r^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{y}{r^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{x}{r^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = 2\frac{y}{r^2},$$

где $r^2 = R^2 - x^2 - y^2$. По формулам (10) находим выражения для компонент тензора Риччи,

$$\mathfrak{R}_{11} = -\frac{1}{r^4}(r^2 + x^2), \quad \mathfrak{R}_{12} = -\frac{1}{r^4}(xy), \quad \mathfrak{R}_{22} = -\frac{1}{r^4}(r^2 + y^2).$$

Использование контравариантных компонент (20) метрического тензора (18) и компонент тензора Риччи позволяет получить скалярную кривизну метрики (19).

Лемма 3. *Риманова метрика (19) обладает постоянной отрицательной скалярной кривизной $\mathfrak{R} = -2a^2$ в круге $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial\mathbb{R}_{z^+}^3$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$.*

Замечание 2. Геодезические римановой метрики (19), заданной в круге $B_{q_0, \rho}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ радиуса ρ , представляют собою «отрезки прямых линий» (проекции дуг окружностей на плоскость OXY), но длина таких отрезков вычисляется в соответствии с метрикой (19) и отличается от евклидовой длины того же отрезка. Эта метрика — метрика отрицательной скалярной кривизны.

Замечание 3. Для каждого круга $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial\mathbb{R}_{z^+}^3$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$, в зависимости от его радиуса (следовательно, и от радиуса R сферы $S_{p_0, R}^2$), метрика своя, и её компоненты определяются формулами (18). Таким образом, трёхмерная задача, поставленная в полупространстве $\mathbb{R}_{z^+}^3$, сводится к серии двумерных задач, каждая из которых поставлена для круга $B_{q_0, \rho}^2$ своего радиуса.

Система дифференциальных уравнений, решениями которой являются геодезические метрики (19), выглядит следующим образом,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} + 2\frac{x}{r^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\frac{y}{r^2}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{ds^2} + 2\frac{x}{r^2}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) + 2\frac{y}{r^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

2.2. Модель 2 метрики в полупространстве

Теорема 2. *Пусть вещественное $R > b/a$ фиксировано, $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$. Тогда под областью $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3$ полупространства $\mathbb{R}_{z^+}^3$ с метрикой (4), при $\lambda \equiv 1$, изометрична кругу $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial\mathbb{R}_{z^+}^3$ с заданной на нём римановой метрикой с элементом длины*

$$ds^2 = \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)(dx^1)^2 + 2\left(\frac{xy}{r^2}\right)dx^1dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right)(dx^2)^2, \quad (21)$$

где через r обозначена величина $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Доказательство. Структура семейств сфер в \mathbb{R}^3 и семейств сечений «вертикальными» плоскостями вполне аналогична участвующим в формулировке теоремы 1. Доказательство поэтому в точности повторяет доказательство указанной теоремы. \square

Найдём $\det(g_{ij})$, контравариантные компоненты g^{ij} , $i, j = 1, 2$, метрического тензора, и символы Кристоффеля Γ_{ij}^k метрики (21). Для определителя $\det(g_{ij})$ получаем выражение $g = \det(g_{ij}) = R^2/r^2$, для контравариантных компонент — выражения

$$g^{11} = \frac{R^2 - x^2}{R^2}, \quad g^{12} = -\frac{xy}{R^2}, \quad g^{22} = \frac{R^2 - y^2}{R^2}. \quad (22)$$

Символы Кристоффеля, вычисленные по формулам (3), приобретают вид

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{x}{R^2 r^2} (R^2 - y^2), & \Gamma_{12}^1 &= \frac{x^2 y}{R^2 r^2}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{x}{R^2 r^2} (R^2 - x^2), \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{y}{R^2 r^2} (R^2 - y^2), & \Gamma_{12}^2 &= \frac{xy^2}{R^2 r^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{y}{R^2 r^2} (R^2 - x^2).\end{aligned}$$

Компонента $R_{1212} = 1/r^2$ тензора Римана — Кристоффеля вычисляется по формуле (9). Применение формул (10) приводит к следующим выражениям для компонент тензора Риччи метрики (19),

$$\mathfrak{R}_{11} = \frac{R^2 - y^2}{R^2 r^2}, \quad \mathfrak{R}_{12} = \frac{xy}{R^2 r^2}, \quad \mathfrak{R}_{22} = \frac{R^2 - x^2}{R^2 r^2}.$$

Использование контравариантных компонент (22) метрического тензора наряду с ковариантными компонентами (18) и компонентами тензора Риччи, позволяет получить значение скалярной кривизны \mathfrak{R} метрики (21).

Лемма 4. *Риманова метрика (21) обладает постоянной положительной скалярной кривизной $\mathfrak{R} = 2/R^2$.*

Замечание 4. Как и в модели 1, заданной в полупространстве римановой метрики, геодезические модели 2 метрики (21), заданной в круге $B_{q_0, \rho}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$, представляют собой «отрезки прямых линий» (проекции дуг окружностей на плоскость OXY). Длина такого отрезка отличается от его евклидовой длины, но совпадает с длиной дуги части окружности, на которую он опирается.

Система дифференциальных уравнений, решениями которой являются геодезические метрики (21) (напоминаем, что $x_0 = y_0 = 0$), выглядит следующим образом,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x(R^2 - y^2)}{R^2 r^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2 \frac{x^2 y}{R^2 r^2} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds}\right) + \frac{x(R^2 - x^2)}{R^2 r^2} \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{y(R^2 - y^2)}{R^2 r^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2 \frac{xy^2}{R^2 r^2} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds}\right) + \frac{y(R^2 - x^2)}{R^2 r^2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 &= 0.\end{aligned}\tag{23}$$

С введением обозначения

$$D(x^1, x^2, s) := (R^2 - y^2) \left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + 2xy \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + (R^2 - x^2) \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2$$

возможно представление системы (23) в следующем виде:

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \frac{x^k}{R^2 r^2} D(x^1, x^2, s) = 0, \quad k = 1, 2.$$

3. ДЕТАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ В «ВЕРТИКАЛЬНОЙ» ПЛОСКОСТИ

Зафиксируем вполне геодезическую область $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3$, при $p_0 = (0, 0, -b/a)$, соответствующий ей круг $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z^+}^3$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ с центром в точке $q_0 = (0, 0, 0)$, лежащий в плоскости OXY , и произвольную «вертикальную» плоскость $\mathcal{P}_{q_1 q_2}$, пересекающую окружность $S_{q_0, \rho}^1 \in \partial \mathbb{R}_{z^+}^3$ в точках $q_1(x_1, y_1, 0)$, $q_2(x_2, y_2, 0)$. На плоскости $\mathbb{R}^2 := \mathcal{P}_{q_1 q_2}$ задаётся ортонормированная прямоугольная декартова система координат OUV с центром в точке $p_0 = (x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2, 0$ и базисными векторами $e_1 = (q_1 - q_2)/|q_1 - q_2|$, $e_2 = (0, 0, 1)$, определяющими оси координат OU, OV , соответственно. Другими словами, ось OU является

следом координатной плоскости OXY на плоскости $\mathcal{P}_{q_1q_2}$, прямая $v = -b/a$ есть след плоскости $z = -b/a$ на плоскости $\mathcal{P}_{q_1q_2}$. Напомним, что радиус r окружности, которой принадлежит дуга, опирающаяся на точки q_1, q_2 , равен $\sqrt{(b^2/a^2 + |q_1 - q_2|^2)/4}$.

На плоскости \mathbb{R}^2 рассматривается полуплоскость $\mathbb{R}_{v+}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0\}$ и параллельная оси абсцисс OU прямая $v = -b/a$, где $a, b > 0$ — те же константы, что фигурируют в изотермической метрике полупространства. В полуплоскости \mathbb{R}_{v+}^2 задана изотермическая риманова метрика

$$ds^2 = \lambda^2(v)(du^2 + dv^2), \quad \lambda(v) = (av + b)^{-1}, \quad (24)$$

индуцированная метрикой (4), при $\lambda(x, y, z) = (az + b)^{-1}$. Компоненты метрического тензора суть $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, определитель $\det g = \lambda^4$.

Символы Кристоффеля метрики (24)

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{a}{av + b}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{a}{av + b}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{a}{av + b}$$

являются коэффициентами системы уравнений, решения которой — геодезические метрики (24),

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} - \frac{2}{v + b/a} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{v + b/a} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 - \frac{1}{v + b/a} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 &= 0, \end{aligned}$$

представляющие собой дуги окружностей O_r радиуса $r \geq b/a$ с центром в точке $(0, -b/a)$ системы координат OUV , точки $(-\tau, 0)$, $(\tau, 0)$ суть точки пересечения окружности O_r с осью OU . Справедливы соотношения $\tau^2 + (b/a)^2 = r^2$, $(b/a) \leq r \leq \sqrt{\rho^2 + (b/a)^2}$.

Исходя из уравнения окружности $u^2 + (v + b/a)^2 = r^2$, стандартно получаем её параметрические уравнения $u = r \cos \alpha$, $v = r \sin \alpha$, при $\alpha \in [0, \pi]$. Сделаем замену переменной $\alpha = \pi/2 - \beta$, тогда промежуток $[0, \pi]$ перейдёт в промежуток $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos \alpha \rightarrow \sin \beta$, $\sin \alpha \rightarrow \cos \beta$, и точка $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ перейдёт в точку $(r \sin \beta, r \cos \beta)$, причём $\beta \in [\beta_l, \beta_r]$, где $\beta_l = -\pi/2 + \arcsin((b/a)/r)$, $\beta_r = \pi/2 - \arcsin((b/a)/r)$.

Рассмотрим частный случай задания в верхней полуплоскости изотропной метрики (24), когда $\lambda(v) \equiv 1$,

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Обозначим дугу окружности, опирающуюся на точки $(-\tau, b/a)$, $(\tau, b/a)$, через $l_{\mp\tau}$. Параметр s (длина дуги) и угол β связаны соотношениями $s = r(\beta - \beta_l)$, $\beta = s/r + \beta_l$. Напомним, что $r^2 = \tau^2 + (b/a)^2$, $\beta \in [\beta_l, \beta_r]$. Приведём параметрические уравнения дуги $l_{\mp\tau}$ окружности O_r ,

$$u = r \sin \beta = r \sin(s/r + \beta_l), \quad v = -b/a + r \cos \beta = -b/a + r \cos(s/r + \beta_l). \quad (25)$$

Для первых и вторых производных от $u(s)$, $v(s)$ по длине дуги s получаем выражения

$$\frac{du}{ds} = \dot{u} = \cos(s/r + \beta_l), \quad \frac{dv}{ds} = \dot{v} = -\sin(s/r + \beta_l), \quad (26)$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \ddot{u} = -\frac{1}{r} \sin(s/r + \beta_l), \quad \frac{d^2v}{ds^2} = \ddot{v} = -\frac{1}{r} \cos(s/r + \beta_l). \quad (27)$$

Геометрически вектор (\dot{u}, \dot{v}) является единичным касательным к кривой $l_{\mp\tau}$ вектором; вектор (\ddot{u}, \ddot{v}) представляет собой нормальный к $l_{\mp\tau}$ вектор, направленный к центру окружности, а его длина совпадает с кривизной.

Вернёмся к случаю, когда в верхней полуплоскости произвольной «вертикальной» плоскости $\mathcal{P}_{q_1q_2}$, задана изотермическая риманова метрика

$$ds^2 = \frac{1}{(av + b)^2} (du^2 + dv^2), \quad v > 0.$$

Так как

$$v = -\frac{b}{a} + \sqrt{r^2 - u^2} \geq 0, \quad dv = -\frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2}} du,$$

то

$$ds^2 = \frac{1}{a^2(v + b/a)^2} \left(1 + \frac{u^2}{r^2 - u^2} \right) du^2, \quad ds = \frac{r}{a} \frac{du}{r^2 - u^2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(v + b/a)^2 = r^2 - u^2$. Вычисление первообразной функции $1/(r^2 - u^2)$ (выбор констант интегрирования диктуется граничными условиями на s и u) даёт связь между s и u ,

$$s = \frac{1}{2a} \ln \frac{r + u}{r - u} + C, \quad u = r \frac{\text{sh}(as)}{\text{ch}(as)} + C,$$

откуда находятся первая и вторая производные функции $u = u(s)$ по s ,

$$\frac{du}{ds} = \dot{u} = \frac{ra}{\text{ch}^2(as)}, \quad \frac{d^2u}{ds^2} = \ddot{u} = -\frac{2ra^2 \text{sh}(as)}{\text{ch}^3(as)}. \quad (28)$$

Аналогичные рассуждения приводят к связи параметра s и переменной $v = v(s)$ с точностью до константы

$$s = \frac{1}{2a} \ln \frac{r - \sqrt{r^2 - t^2}}{r + \sqrt{r^2 - t^2}} + C, \quad t = r \text{ch}^{-1}(as) + C,$$

где $t = v + b/2$. Отсюда следуют выражения для производных по s ,

$$\frac{dv}{ds} = \dot{v} = -ra \frac{\text{sh}(as)}{\text{ch}^2(as)}, \quad \frac{d^2v}{ds^2} = \ddot{v} = -ra^2 \frac{1 - \text{sh}^2(as)}{\text{ch}^3(as)}. \quad (29)$$

Соотношения (25)–(29), дающие выражения для производных переменных u, v по параметру s , позволяют указать касательный и нормальный векторы к геодезическим в моделях 1 и 2 метрик, и тем самым перейти к различным вариантам лучевых преобразований векторных и тензорных полей, заданных в полупространстве.

4. СХЕМА АЛГОРИТМА

Мы предлагаем решение задачи рефракционной томографии в полупространстве, состоящее в сведении исходной 3D задачи к серии двумерных, а затем объединении полученных решений 2D задач в решение трёхмерной. Поэтому основным элементом алгоритма является решение задач рефракционной томографии, поставленных в круге. В качестве исходных данных выступают значения геодезического лучевого преобразования искомой функции, зафиксированные на границе круга. Строгая формулировка задачи рефракционной томографии: пусть задан круг $B_{(0,0,0),\rho}^2$ радиуса ρ с границей — окружностью $S_{(0,0,0),\rho}^1 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$. В круге задана функция $f(x, y)$ и известны её геодезические лучевые преобразования

$$Af \equiv \mathcal{P}(\alpha, \beta) = \int_0^{t_+} f(\gamma_{\alpha,\beta}(t)) dt f(\gamma_{\alpha,\beta}(t)) dt \equiv g, \quad (30)$$

определяемые двумя углами $0 \leq \alpha < 2\pi$ и $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$, первый из которых характеризует положение точки на окружности, а второй — направление, в котором выпускается геодезическая (β — угол между нормалью к окружности в точке x и направлением, задаваемым вектором ξ). В формуле (30) $\gamma_{\alpha,\beta} : [0, t_+] \rightarrow S^1_{(0,0,0),\rho}$ — максимальная геодезическая, определяемая начальными условиями $\gamma_{\alpha,\beta}(0) = x = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$, $\dot{\gamma}_{\alpha,\beta}(0) = \xi = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$. Значения $0, t_+$ параметра t таковы, что $\gamma_{\alpha,\beta}(0) = x$, $\gamma_{\alpha,\beta}(t_+) \in S^1_{(0,0,0),\rho} \neq x$.

Формирование синтетических исходных данных задачи приводит к необходимости решения прямой 3D задачи, поставленной в полупространстве. Кроме того, применяемый для решения 2D задач метод наименьших квадратов требует вычисления образов базисных элементов исходного пространства, что также можно трактовать как часть прямой задачи.

Приведём краткое описание алгоритма решения 3D задачи рефракционной томографии, поставленной в полупространстве с заданной в нём римановой метрикой, допускающей наличие вполне геодезических двумерных подмногообразий. Трёхмерная схема сбора данных представляет собой семейство концентрических окружностей $S^1_{(0,0,0),\rho} \in \partial\mathbb{R}^3_{z+}$ с центром в начале координат, на каждой из которых задана веерная система наблюдения, состоящая из множества выпущенных из каждой точки окружности под всевозможными углами геодезических римановой метрики (19) (с непустыми пересечениями с кругом), вдоль которых произведено интегрирование искомой функции. Каждому кругу $B^2_{(0,0,0),\rho}$ радиуса ρ сопоставлена вполне геодезическая подобласть $S^2_{(0,0,-b/a),R} \cap \mathbb{R}^3_{z+}$ полупространства \mathbb{R}^3_{z+} с метрикой (4), $\lambda = (az + b)^{-1}$, $R^2 = \rho^2 + (b/a)^2$. Теоремы 1, 2 устанавливают взаимно однозначное отображение между каждой вполне геодезической подобластью $S^2_{(0,0,-b/a),R} \cap \mathbb{R}^3_{z+}$ полупространства \mathbb{R}^3_{z+} с метрикой (4) при $\lambda = (az + b)^{-1}$, $\lambda \equiv 1$, и кругом $B^2_{(0,0,0),\rho} \in \partial\mathbb{R}^3_{z+}$ с заданными на нём римановыми метриками (19), (21).

Формирование исходных данных. Приведём схему вычисления лучевого преобразования функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ вдоль геодезических заданной римановой метрики. Преобразуя систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1), которой удовлетворяют геодезические, к системе уравнений первого порядка относительно вектора неизвестных $y = (y_1, \dots, y_6)$:

$$\begin{aligned} x^1(s) &= y_1(s), & x^2(s) &= y_2(s), & x^3(s) &= y_3(s), \\ y_{k+3} &= - \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^k y_{i+3} y_{j+3} \equiv f_{k+3}(y), & k &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dy_j}{ds} &= y_{j+3} \equiv f_j(y), & j &= 1, 2, 3, \\ \frac{dy_k}{ds} &= - \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^{k-3} y_{i+3} y_{j+3} \equiv f_k(y), & k &= 4, 5, 6. \end{aligned}$$

Начальные условия задаются точкой $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))$, из которой выпускается геодезическая, и её направляющий вектор, $(y_4(0), y_5(0), y_6(0))$. Параметром выбирается элемент длины дуги геодезической.

Для численного решения полученной системы уравнений первого порядка используем метод Рунге — Кутты четвёртого порядка точности по шагу Δs , а именно его модификацию — схему Мерсона [13], позволяющую оценивать погрешность вычисления правых частей системы на каждом шаге и, в случае необходимости, корректировать алгоритм и, в частности, варьировать величину шага. Интегрирование по лучу производится с помощью квадратурных формул

трапеций и Симпсона (для разрывных и непрерывных функций), или формулы Боды высокой степени точности $O(h^6)$ для функций достаточной степени гладкости.

Другой вариант получения исходных данных пригоден лишь в условиях моделей 1 или 2 метрик, рассматриваемых в разд. 2 данной работы. Для этого необходимо воспользоваться результатами детализации задач, поставленных в «вертикальных» плоскостях (разд. 3). Каждая такая плоскость, связанная со сферой $S^2_{(0,0,0),R}$, содержит в точности одну геодезическую, и вычислить интеграл вдоль неё от тестовой функции $f(x, y, z)$ не представляет сложности. Более того, следует отметить, что результаты разд. 3 позволяют легко формировать исходные данные и для задач рефракционной томографии векторных и тензорных полей, поставленных в полупространстве. Предположим, что найдены геодезические, являющиеся решениями 3D задачи рефракционной томографии, поставленной для сферы $S^2_{(0,0,0),R}$ радиуса $R(\rho)$ (модель 1 или модель 2 метрики), и вычислены геодезические лучевые преобразования некоторой тестовой функции $f(x, y, z)$. Фиксация их значений никаких дополнительных действий не требует, так как след сферы $S^2_{(0,0,0),R}$ на плоскости OXY есть одновременно и окружность $S^1_{\rho, \rho} \in \partial \mathbb{R}^3_{z+}$, в точках которой задаются исходные данные для решения задачи.

Формирование образов базисных элементов в МНК-алгоритме. Метод наименьших квадратов, используемый для обращения геодезического лучевого преобразования, применяется на этапе решения 2D задачи, поставленной в круге.

В качестве базисных элементов исходного функционального пространства могут выступать мономы двух переменных общего вида, ортогональные многочлены, B -сплайны. Особенно эффективны при решении задач рефракционной тензорной томографии оказались локальные базисы, построенные на основе B -сплайнов [2]. На первом этапе алгоритма МНК требуется вычислить геодезическое лучевое преобразование (6) от базисных элементов. Для простоты продемонстрируем эту часть алгоритма на примере мономов двух переменных, представляющих собой полную линейно независимую последовательность

$$\varphi_1 \equiv 1, \varphi_2 \equiv x, \varphi_3 \equiv y, \varphi_4 \equiv x^2, \varphi_5 \equiv xy, \varphi_6 \equiv y^2, \dots, \varphi_N \equiv y^s,$$

где функции φ_k являются мономами $\varphi_k \equiv x^n y^m, n+m \leq s, k = (n+m)(n+m+1)/2 + m + 1, N = (s+1)(s+2)/2$. Дискретизация значений переменных α, β осуществляется в соответствии с требованиями, налагаемыми процедурой двумерного быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Оператор A , определяемый (30), инъективен, поэтому последовательность элементов

$$\psi_1 = A\varphi_1, \psi_2 = A\varphi_2, \dots, \psi_n = A\varphi_n, \dots \quad (31)$$

линейно независима. Фиксируя некоторое натуральное n , положим $g_{\delta n} = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \psi_k$. Коэффициенты $c_k^{(n)}$ находятся из условия минимальности нормы

$$\|g - g_{\delta n}\| \quad (32)$$

в функциональном пространстве K Соболева.

Алгоритм решения 2D задачи в круге. В силу линейности оператора A и способа построения последовательности (31), получим

$$g_{\delta n} = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \psi_k = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} A\varphi_k = A \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \varphi_k = Af_{\delta n}. \quad (33)$$

Известно, что аппроксимация $f_{\delta n}$ сходится к точному решению f уравнения (30) [1, 2]. Задача минимизации нормы (32) решается методом наименьших квадратов, который приводит к известной системе линейных алгебраических уравнений с матрицей Грама. В алгоритме

решения системы сначала последовательность (31) подвергается процессу ортогонализации, в результате которого получаем ортонормированную систему $\{\omega_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. При этом, если $g_{\delta n} = \sum_{k=1}^n d_k \omega_k$, где $d_k = \langle g_{\delta}, \omega_k \rangle_K$, $k = 1, 2, \dots, n$, — скалярные произведения в соболевском пространстве K образов, то

$$g_{\delta n} = \sum_{k=1}^n d_k \omega_k = \sum_{k=1}^n d_k \left(\sum_{l=1}^k a_{kl} \psi_l \right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=l}^n d_k a_{kl} \right) \psi_l = \sum_{k=1}^n d_k^{(n)} \psi_k.$$

Здесь использовано обозначение $d_k^{(n)} = \sum_{l=k}^n d_l a_{lk}$, где a_{lk} — элементы матрицы Грама для выбранного базиса. Принимая во внимание (33) и соотношение $c_k^{(n)} = d_k^{(n)}$, получаем $f_{\delta n} = \sum_{k=1}^n d_k^{(n)} \varphi_k$ искомую аппроксимацию решения задачи.

Формирование решения 3D задачи по 2D слоям. Предположим, что найдено решение 2D задачи рефракционной томографии, поставленной в круге $B_{(0,0,0),\rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ радиуса ρ с известной метрикой (модель 1 или модель 2 метрики). Перенос аппроксимации искомой функции из точек круга в точки сферы $S_{(0,0,0),R}^2$ радиуса $R(\rho)$ осуществляется в точном соответствии с положениями Теорем 1, 2. Задавая семейство концентрических кругов радиусов $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_K$, K натуральное, фиксируя соответствующее им семейство сфер, и осуществляя перенос искомой функции из точек каждого круга в точки соответствующей ему сферы, получим трёхмерную аппроксимацию функции в части полупространства, ограниченной частью сферы максимального радиуса R_{\max} .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача рефракционной томографии, поставленная в полупространстве с рефракцией, интерпретируемая как задача интегральной геометрии, в рамках которой рефракция моделируется специальной римановой метрикой, допускающей наличие семейств вполне геодезических подмногообразий топологической размерности два. Предложены варианты послойного решения 3D задачи путём понижения размерности исходной задачи и её сведения к решению серии двумерных задач. Построены 2D метрики в круге, изометричные соответствующим вполне геодезическим подмногообразиям. Установлены геометрические характеристики исходных 3D метрик и порождённых ими 2D метрик. Предложена схема алгоритма послойного решения 3D задачи рефракционной скалярной томографии численными методами.

Планируется продолжение проведённых в статье исследований. Прежде всего, предполагается непосредственное продолжение статьи, а именно алгоритмическая и программная реализация предложенного подхода и его изучение методами вычислительного эксперимента. Представляется интересным распространение подходов послойного решения 3D задач, поставленных в полупространстве и цилиндре, на задачи векторной и тензорной томографии, с целью их изучения на относительно простых 3D и 2D римановых метриках, использованных в настоящей работе. Томографические операторы, действующие на 3D векторные и тензорные поля, обладают непустыми ядрами, и вопросы единственности реконструкции полей или их частей по 3D геодезическим лучевым преобразованиям и по семействам 2D преобразований представляются актуальными. Отметим, что в 3D случае имеется 3 разных варианта геодезических лучевых преобразований векторного поля, и 6 вариантов различных лучевых преобразований симметричного 2-тензорного поля. Установление взаимосвязей между 3D томографическими операторами и соответствующими им семействами 2D геодезических лучевых преобразований — актуальная и нетривиальная задача.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00200). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Derevtsov E.Yu., Kleshchev A.G., Sharafutdinov V.A.* Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction // *Inverse Ill-Posed Probl.* 1999. V. 7, N 1. P. 83–103; DOI: 10.1515/jiip.1999.7.1.83
2. *Svetov I.E., Derevtsov E.Yu., Volkov Yu.S., Schuster T.* A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium // *Math. Comput. Simul.* 2014. V. 97. P. 207–223; DOI: 10.1016/j.matcom.2013.10.002
3. *Кириллов А.А.* Об одной задаче И.М. Гельфанда // *ДАН СССР.* 1961. Т. 137, № 2. С. 276–277.
4. *Тцу Н.К.* An inversion formula for cone-beam reconstruction // *SIAM J. Appl. Math.* 1983. V. 43. P. 546–552; DOI: 10.1137/0143035
5. *Finch D.V.* Cone-beam reconstruction with sources on a curve // *SIAM J. Appl. Math.* 1985. V. 45. P. 665–673; DOI: 10.1137/0145039
6. *Svetov I.E., Maltseva S.V., Louis A.K.* The Method of Approximate Inverse in Slice-by-Slice Vector Tomography Problems // *Lecture Notes Comput. Sci.* 2020. V. 11974. P. 487–494; DOI: 10.1007/978-3-030-40616-5-47
7. *Svetov I.E., Polyakova A.P.* Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor fields // *Inverse Problems.* 2024. V. 40, N 1. Article 015009; DOI: 10.1088/1361-6420/ad0fac
8. *Wensrich C.M., Holman S., Lionheart W.R.B., Courdurier M., Polyakova A., Svetov I., Doubikin T.* General Reconstruction of Elastic Strain Fields from their Longitudinal Ray Transform // *SIAM J. Appl. Math.* 2025. V. 85(2). P. 945–960; DOI: 10.1137/24M1684852
9. *Гольдин С.В.* Введение в геометрическую сейсмологию // Учеб. пособие. Новосибирск: изд. НГУ, 2016.
10. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
11. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
12. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, том IV. М.: ГИИТЛ, 1957.
13. *Ланс Дж.Н.* Численные методы для быстродействующих машин. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

UDC 519.677:514.753

MODELS OF A SLICE-BY-SLICE SOLUTION FOR THE REFRACTIVE TOMOGRAPHY PROBLEM IN A HALF-SPACE© 2025 E. Yu. Derevtsov^{1a}, S. V. Maltseva^{1,2b}¹*Novosibirsk State University,**Pirogov st., 1, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,**Acad. Koptyug pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^aeydert@mail.ru, ^bmaltsevasv@math.nsc.ru

Received 30.09.2025, revised 25.10.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. The problem of refractive tomography is considered, posed in a half-space with refraction interpreted as a problem of integral geometry, within which refraction is modeled by a given Riemannian metric that allows the presence of families of totally geodesic submanifolds of topological dimension two. Variants of slice-by-slice solution to the 3D problem by reduction the dimensionality of the original problem and reducing it to solving a series of two-dimensional problems are proposed. 2D metrics in a disk are constructed, isometric to the corresponding totally geodesic submanifolds. The geometric characteristics of the original 3D metric and the 2D metrics generated by it are established. A scheme of the algorithm for slice-by-slice solution to the 3D problem of refractive tomography by numerical methods is proposed.

Keywords: refractive tomography, integral geometry, Riemannian metric, curvature, totally geodesic submanifold, geodesic ray transform, slice-by-slice reconstruction.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.405

*In memory of Prof. A. K. Louis, an outstanding scientist,
a kind colleague, a good friend*

REFERENCES

1. Derevtsov E.Yu., Kleshchev A.G., Sharafutdinov V.A. Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction. *Inverse III-Posed Probl.*, 1999, Vol. 7, No. 1, pp. 83–103; DOI: 10.1515/jiip.1999.7.1.83
2. Svetov I.E., Derevtsov E.Yu., Volkov Yu.S., Schuster T. A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium. *Math. Comput. Simul.*, 2014, Vol. 97, pp. 207–223; DOI: 10.1016/j.matcom.2013.10.002
3. Kirillov A.A. Ob odnoi zadache I. M. Gel'fanda [About one problem by I. M. Gelfand]. *DAN USSR*, 1961, Vol. 137, No. 2, pp. 276–277 (in Russian).
4. Tuy H.K. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM J. Appl. Math.*, 1983. Vol. 43, pp. 546–552; DOI: 10.1137/0143035
5. Finch D.V. Cone-beam reconstruction with sources on a curve. *SIAM J. Appl. Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 665–673; DOI: 10.1137/0145039
6. Svetov I.E., Maltseva S.V., Louis A.K. The Method of Approximate Inverse in Slice-by-Slice Vector Tomography Problems. *Lecture Notes Comput. Sci.*, 2020, Vol. 11974, pp. 487–494; DOI: 10.1007/978-3-030-40616-5-47

7. Svetov I.E., Polyakova A.P. Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor fields. *Inverse Problems*, 2024, Vol. 40, No. 1. Article 015009; DOI: 10.1088/1361-6420/ad0fac
8. Wensrich C.M., Holman S., Lionheart W.R.B., Courdurier M, Polyakova A., Svetov I., Doubikin T. General Reconstruction of Elastic Strain Fields from their Longitudinal Ray Transform. *SIAM J. Appl. Math.*, 2025, Vol. 85, No. 2, pp. 945–960; DOI: 10.1137/24M1684852
9. Goldin S.V. Vvedenie v geometricheskuyu seismiku. Ucheb. posobie [Introduction to geometric seismics. Study guide]. Novosibirsk: Publ. NSU, 2016 (in Russian).
10. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]. Moscow: Nauka, 1980 (in Russian).
11. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Sovremennaya geometriya [Modern Geometry]. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
12. Smirnov V.I. Kurs vysshei matematiki [Higher Mathematics Course]. Moscow: GITTL, 1957 (in Russian).
13. Lance J.N. Chislennye metody dlya bystrodeistvuyushchikh mashin [Numerical Methods for High-Speed Machines]. Moscow: Foreign Lang. Publ., 1962 (in Russian).